A. hydr.
72 g

Schubert

J. A.

<36621925420015

<36621925420015

Bayer. Staatsbibliothek

Theorie

der

Construction

steinerner

Bogenbrücken

von

Johann Andreas Schubert,
Professor der Ingenieur-Wissenschaften an der technischen Bildungs-Anstalt zu Dresden.

Erster Theil.

Nebst 22 Figurentafeln.

Dresden und Leipzig,
Arnoldische Buchhandlung.
1847.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Excellenz

dem Herrn

Staats-Minister von Falkenstein,

Ritter des Königl. Sächs. Civil-Verdienst-Ordens, Comthur des Herzogl. Sächs. Ernest. Haus-Ordens, Ritter des Civil-Verdienst-Ordens der Bayerschen Krone, Ritter des Königl. Preuss. rothen Adler-Ordens etc.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Ew. Excellenz

überreiche ich gegenwärtige Schrift als ein schwaches Zeichen meiner ungeheuchelten Dankbarkeit dafür, dass Hochdieselben mich würdigten, über jene zwei wichtigen Ueberbrückungsfragen der sächsisch-bayerschen Eisenbahn ein Urtheil mit abgeben zu dürfen, welche die Gemüther so Vieler schon seit einigen Jahren in Bewegung setzen, und dass mir Excellenz damit die Gelegenheit boten, einen hochwichtigen Gegenstand der Ingenieur-Wissenschaften, nämlich die Theorie der Construction steinerner Brücken, wie ich hoffe, zur völligen Erledigung zu bringen.

Es soll das vorliegende Werk, in Verbindung mit seinem Nachfolger, öffentliches Zeugniss davon

geben, wie ich bemüht war, dem ehrenvollen Auftrage zu entsprechen, und wie ich demselben entsprochen habe, mit dem mich Excellenz beehrten. Stiftet dasselbe Nutzen, gehen seine Lehren in das Leben über, was ich zuverlässig hoffe, weil sie allseitig mit der Praxis übereinstimmen, dann gebührt der Dank dafür Ew. Excellenz zunächst.

Dresden, im Monat November 1846.

In tiefster Ehrerbietung

Ew. Excellenz

unterthäniger Diener

Johann Andreas Schubert.

Vorrede.

Für die zwei Brücken von aufsergewöhnlicher Höhe, nämlich von 140 und 120 Ellen, mit welchen die sächsisch-bayer'sche Eisenbahn zwischen Reichenbach und Plauen in Sachsen die Thäler der Göltzsch und der Elster überschreiten wird, forderte das verehrliche Directorium der sächsisch-bayer'schen Eisenbahn-Gesellschaft durch eine Bekanntmachung vom 27. Januar 1845 Ingenieure und Architekten auf, Baupläne zu entwerfen und einzureichen, und sicherte dem, dessen Entwurf nach sachverständiger Prüfung als durchaus zur Ausführung geeignet gefunden würde, einen Preis von 1000 Thlr. zu.

Mehr als 80 Projecte für die Ueberbrückung des Göltzsch- und des Elsterthales gingen in Folge des genannten Preisausschreibens ein. Die Prüfung aller dieser Entwürfe erfolgte, nachdem eine defsfallsige Anfrage an die Königl. Preufs. Ober-Baudeputation abfällig beschieden worden war, durch eine Commission, welche das Königl. Sächs. Hohe Ministerium des Innern, auf Antrag des eben genannten Directoriums, niedersetzte. Das Ergebnifs der stattgehabten Prüfung ist durch dasselbe Directorium unter dem 30. December 1845 (in der Beilage zu Nummer 3 der Leipziger Zeitung vom Jahre 1846) zur öffentlichen Kenntnifs gebracht und besteht der Hauptsache nach darin, dafs von allen Entwürfen, die für die Göltzsch- und Elsterbrücke eingingen, keiner ohne wesentliche Abänderung für die Aus-

führung als geeignet erkannt wurde. Dessen ungeachtet ist, auf Vorschlag der Prüfungs-Commission, der ausgesetzte Preis von 1000 Thlr. zur Vertheilung gekommen und zwar zu je 300 Thlr. an zwei und zu je 200 Thlr. an zwei Preisbewerber.

Schon nach Eröffnung der vorgenannten Concurrenz wurde der Wunsch laut, s. Z. den Standpunct kennen zu lernen, von welchem aus sich die Prüfungs-Commission ihres Auftrages entledigen werde. Durch die bereits angezogene Bekanntmachung vom 30. December v. J. konnte eben dieser Wunsch nur eine Steigerung erfahren, was um so mehr gebilligt werden mufs, als die Prüfungs-Commission nicht als eine technische Autorität besteht, und als überdiefs die Theorie der Brücken bisher nicht in einer Weise entwickelt und ausgebildet war, um dem Bedürfnisse der Praxis zu genügen und um maafsgebend für aufsergewöhnliche Brücken zu sein, obwohl sich seit mehr als 150 Jahren die intelligentesten Mathematiker und Brückenbaumeister damit befassten. Der Unterzeichnete, den die Commission zur Prüfung der eingegangenen Pläne für die Ueberbrückung des Göltzsch- und des Elsterthales mit dem Vorsitze beehrte und dem die Vertretung der rein wissenschaftlichen Entwickelungen und Beleuchtungen der Commissionsarbeiten vornehmlich obliegt, kann den genannten Wunsch der bei der mehrerwähnten Concurrenz betheiligten Herren Ingenieure und Architekten, besonders wegen der angeführten Gründe, nur als gerecht anerkennen, ja ich betrachte die geeignetste Erfüllung desselben als eine mir obliegende moralische Verpflichtung. Anfänglich glaubte ich am zuverlässigsten der überhabenden Obliegenheit zu entsprechen, wenn ich die von mir begründete und durch Experimente erhärtete Theorie des Baues steinerner Brücken in Beziehung auf die eingegangenen Concurrenzpläne, sowie die von der Commission aufgestellten Grundsätze motivirt der Oeffentlichkeit übergäbe, weil jene Theorie und diese Grundsätze wesentlich den Standpunct darlegen, von welchem aus die Commission die Beurtheilung der in der Form und in den Abmessungen so sehr verschiedenen Entwürfe unternahm. Weil aber meine Theorie der Construction steinerner Brücken nicht blos für die Ueberbrückung des Göltzsch- und des Elsterthales,

sondern eine ganz allgemeine Geltung hat, und weil wir z. Z. noch keine solche besitzen, die den Anforderungen der Praxis genügt: so kam ich zu der Ansicht, meiner moralischen Verpflichtung wohl in noch höherem Grade zu genügen, wenn ich von einer blofsen Monographie der Göltzsch- und Elsterüberbrückung absähe, vielmehr eine Theorie der Brückenconstruction überhaupt verfasste und veröffentlichte, darin die nöthigen Rücksichten auf hohe Thalüberbrückungen überhaupt nähme und die Ueberbrückungen des Göltzsch- und des Elsterthales als der höchsten, die bis jetzt der Ausführung vorliegen, als Beispiele in der erforderlichen Allgemeinheit und Ausdehnung behandelte. Diese Ansicht behielt das Uebergewicht über die erste und ist durch die gegenwärtige Schrift zur Hälfte verwirklicht.

Nachdem ich die Entstehungsgeschichte des vorliegenden Werkes in der möglichsten Breite, sowie seine Bestimmung im Allgemeinen vorgeführt habe, wird es zunächst erforderlich sein, den Stoff etwas näher in's Auge zu fassen, den und in welcher allgemeinen Form es denselben zu behandeln hat, oder was durch dasselbe erzielt werden mufs. — Dafs bisher keine Theorie des Brückenbaues bestand, welche den Anforderungen der Wissenschaft und der Praxis zu genügen vermochte, welche uns eine klare, mit der Wirklichkeit übereinstimmende Einsicht in das Wesen, in die Stützungsweise der eignen Masse einer Brücke und der Stützung der über eine solche schreitenden Lasten gegeben, und aus der wir die Form und die Abmessungen mit Zuverlässigkeit hätten entwickeln können, die einer Brücke ertheilt werden müssen, um ihrer Bestimmung vollkommen zu entsprechen, die uns ferner befähigt hätte, die Ursachen gewisser Erscheinungen zu erkennen, die bei dem Bau von Brücken eintreten, um damit denselben entgegenwirken zu können u. s. w., ist jedem Sachkenner zur Genüge bekannt. Bisher dienten bereits ausgeführte Brücken als Muster für neu zu erbauende, die Bauform und die Abmessungen solcher bemafs man nach dem Gefühle, oder man bediente sich sogenannter practischer Regeln, z. B. zur Bestimmung der Scheitelhöhe der Bögen, zur Herleitung der Pfeilermaafse u. dgl. m., denen jede

wahre Begründung und daher auch allseitige Anwendbarkeit mangelt. Das Gefühl oder unbegründete Regeln blieben allein maafsgebend, wenn es sich um den Entwurf zu einer Brücke handelte, die in ähnlichen Abmessungen noch nicht vorhanden war, wie z. B. Brücken, die das Göltzsch- und das Elsterthal fordern. Die für die letztern eingegangenen mehr als 80 verschiedenen Entwürfe haben das Angeführte thatsächlich bestätigt, denn von allen diesen Entwürfen war nur die Bauform und die Construction eines einzigen zu begründen versucht. Was ich über Brücken und Brückenbögen zunächst anführte, das gilt in ganz gleicher Weise auch für Tunnel; denn wo ist die Form begründet nachgewiesen, die einem solchen gegeben werden mufs? Auch hier wird nachgeahmt und gefühlt. Nicht minder unsicher, als über die Construction der Brücken und der Gewölbe im Allgemeinen, sind die Ansichten über die Gründung und das dabei einzuhaltende Verfahren. Der Eine schlägt für eine vorhabende Pfeilergründung einen kostbaren Pfahlrost und hat die meiste Sorge damit, die Pfähle nur in den Grund zu bringen, für welchen ein Zweiter mit einem einfachen Schwellrost und ein Dritter endlich ohne alle Holzgründung zuverlässig auszukommen vorgiebt. Wessen Ansicht ist die richtige? — Es fehlte bisher an den nahe liegenden Grundsätzen zur Entscheidung, durch die oft viel Arbeit, Zeit und Geld, entweder für das, was zu viel, oder für das, was zu wenig gethan wurde, zu ersparen gewesen wäre! Es kann hier nicht der Platz sein, nachzuweisen, welche enormen Summen nur aus vorbemerkten Gründen zwecklos verwendet wurden; überdiefs würde man das, was ich hierüber geben könnte, für eine maafslose Uebertreibung halten. Nur einen ähnlichen Fall will ich hier namhaft machen, dessen Erwähnung Niemanden unangenehm berühren dürfte: Bei dem Bau des derzeitigen Gebäudes der hiesigen technischen Bildungs-Anstalt fand sich nämlich der Grund zum gröfsten Theile so schlecht, dafs die Baugewerken einhellig für Pfahlrostgründung stimmten. Ich wies, gestützt auf eine mit nur wenig Thalern bewirkte Voruntersuchung, nach, dafs eine Pfahlrostgründung überflüssig sei, wenn man eine gewisse Abänderung der Gründung vornähme und wenn man sich eine geringe

Senkung und im schlimmsten Falle einige Rifschen gefallen lassen wolle. Wesentlich nur der Mangel an Geld wurde Veranlassung, dafs man meinen Vorschlag annahm, aus dem eine Ersparnifs von mehr als 8000 Thlr. erwuchs. Die vorausgesagte geringe Senkung ist eingetreten, aber es haben sich an den Stellen, auf die sich mein Vorschlag bezog, keine Risse eingestellt.

In Erwägung der oben angeführten Umstände kann es nicht überraschen, wenn von der aufsergewöhnlich grofsen Anzahl von Brücken, die im Laufe der letzten 10 Jahre gebaut wurden, nicht alle ihrer Bestimmung vollkommen entsprechen, oder wenn diese mit einem viel gröfsern Aufwande an Zeit und Geld erreicht wurde, als streng genommen nothwendig war; wenn in einem Lande eine Brückenbauform vorherrschend ist, die man in einem andern weniger liebt und für weniger tauglich hält, als die hier übliche u. s. w. Diefs Alles wird man nicht den ausführenden Ingenieuren, sondern nur der Wissenschaft zur Last legen müssen, dafs sie nicht besser vorsorgte; man wird vielmehr den ausführenden Technikern zu Dank verpflichtet sein, dafs sie unter den bestehenden Verhältnissen durch blofse Abwägung vorhandener Umstände, durch Uebertragung anderwärts mit Erfolg geübter Baumethoden und durch das blofse Gefühl geleitet, noch so Erhebliches leisteten, als wirklich geleistet wurde, dafern nicht die Grenzen sehr entfernt liegen, innerhalb welcher das Gelingen einer Brücke möglich ist, deren Erheblichkeit allerdings nicht weggeläugnet werden kann, und die durch die nachfolgende Theorie geflissentlich bestimmt werden.

Neben der Ueberzeugung von der Unzulänglichkeit dessen, was die Theorie für Gewölbe und Brücken, sowie für die damit im Zusammenhange stehenden Nebendinge bisher gab, hat Jeder, dem das Gebiet der Mechanik nicht fremd ist, die nicht zu unterdrückende Meinung, es müsse die Aufstellung einer Gewölb- oder Brückentheorie möglich sein, die dem Bedürfnisse der Praxis allseitig genügt, mit deren Hülfe die Ursachen gewisser bei dem Bau von Brücken auf-

tretenden Erscheinungen mit Bestimmtheit zu erforschen sein müssen, die ferner nachweist, welche von den Brückenformen für eine gegebene Bestimmung und unter gewissen Umständen die allertauglichste ist u. s. w., oder, um es noch kürzer auszudrücken: der mit den Grundlehren der Mechanik Vertraute fühlt, es müsse eine Theorie der Brücken möglich sein, welche die Construction derselben auf ein Rechnungsexempel zurückführt, dessen Elemente das Baumaterial, die Bestimmung, die Ueberbrückungshöhe und unter Umständen gewisse vorgeschriebene Abmessungen sind. Diese Ansicht habe ich nicht allein von einer Brückentheorie gehabt, noch ehe ich mich mit der Abfassung der vorliegenden befasste, sondern habe sie auch bei Andern vorgefunden. Die möglichste Verwirklichung dieser Ansicht, meine ich, mufs das Ziel sein, dessen Erreichung man sich bei Aufstellung einer Brückentheorie stellen mufs. Ich habe mir dieses Ziel gesteckt; in wie weit ich mich demselben genähert habe, das möge man nach Vollendung des ganzen Werkes beurtheilen.

Noch ehe mir der Auftrag ward, als Mitglied der im Eingange genannten Commission die Prüfung der Entwürfe für die Ueberbrückung des Göltzsch- und des Elsterthales mit bewirken zu helfen, hatte ich mich bereits mit der Abfassung der Grundzüge der vorliegenden Brückentheorie beschäftigt. Die Durchführung unterblieb wegen der Dringlichkeit anderer mir obliegender Geschäfte, mehr aber noch aus Mangel jener Geräthe, die ich bedurfte, um mich gegen Irrthümer und Trugschlüsse zu sichern, um die Wirklichkeit nicht aus den Augen zu verlieren und um das wissenschaftlich Erforschte mit dem Ergebnifs des Experimentes zusammenzuhalten. Diese Hülfsmittel, deren ich am Schlusse dieses Werkes besonders gedenken werde, konnte ich mir erst mit dem Eintritt in die mehrgenannte Prüfungscommission herstellen, und den Nutzen, den die gegenwärtige Brückentheorie zu schaffen geeignet sein dürfte, mufs ich der Vergünstigung zuschreiben, die mich jener Prüfungscommission zugesellte.

Als ich anfing, die vorliegende Theorie zu begründen,

fühlte ich mich gedrungen, von der früher beliebten Keiltheorie völlig abzusehen, deren Unzulänglichkeiten durch die Ungereimtheiten zur Genüge dargethan sind, auf welche sie unter Umständen führt. Aber auch von den Meinungen und Andeutungen über die Stützungsverhältnisse der Masse eines Brückenbogens, die ich an einigen Orten fand, sah ich ganz absichtlich darum ab, um meinen eignen Ideengang nicht zu unterbrechen. Meine erste Vorarbeit war die Abfassung der Abschnitte vier, fünf und sechs des gegenwärtigen Werkes, welche für eine gegebene Massenanordnung die Gesetze einer freien Stützlinie, die einer vorgeschriebenen Stützlinie mit tangentialer und die einer vorgeschriebenen Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung behandeln. Die Gesetze der freien Stützlinie für eine gegebene Massenanordnung sind bekannt, nicht aber die der vorgeschriebenen mit tangentialer und horizontaler Hinterstützung. Diese drei Abschnitte mit ihrem nachgewiesenen innern Zusammenhang bilden vornehmlich die Hauptgrundlage der gegenwärtigen Theorie. Eben dieser innere Zusammenhang der Gesetze der Stützungsrichtung gegebener Massenanordnungen zeigt nicht blos, dafs eine Stützung in der Richtung unzählig vieler freier Stützlinien, was schon längst bekannt ist, sondern, und hierin besteht das Neue, dafs auch jede gegebene Massenanordnung, aufser in der nächsten Nähe des Scheitels, wo die Stützung stets in einer freien Stützlinie vor sich geht, mehr oder weniger wesentlich in der Richtung einer vorgeschriebenen Stützlinie statthaben kann oder dafs jede krumme Linie bei geeigneter Vorkehrung als Wölb- oder Stützlinie genommen werden kann.

Eine zweite Vorarbeit, die ich nächst der vorerwähnten Fundamentalbegründung der möglichen Stützungsrichtungen der eignen Masse eines Brückenbogens vornahm, bestand in der Aufsuchung der Gesetze, nach welchen ein geschlossener und angemessen hinterstützter Bogen die Lasten stützt, die über einen solchen wegschreiten. Das Ergebnifs dieser Arbeit enthält der dreizehnte Abschnitt. Ich halte die daselbst entwickelten Gesetze für neu. Für Jene, denen die dort gegebene und später noch vervollständigte Begründung

nicht genügen sollte, werde ich schliefslich noch die Art der Uebereinstimmung eben dieser Gesetze mit defsfalls geführten Experimenten vorlegen.

Eine dritte Vorarbeit von Bedeutung für die vorliegende Schrift war die Bestimmungsweise der sogenannten vorläufigen freien Stützlinie für verschiedene Massenanordnungen, wie sie bei Brückenbögen vorkommen. Sie umfasst den wesentlichen Inhalt des neunzehnten Abschnittes. Als neu glaube ich wenigstens die allgemeine Methode zur Aufsuchung einer vorläufigen freien Stützlinie einer beliebigen Massenanordnung bezeichnen zu können, die von Seite 233 ab gegeben ist.

Nach allen diesen Vorarbeiten begann die Abfassung und sofort auch der Druck dieser Schrift. Was ich in derselben, abgesehen von der Ordnung, in der es geschehen, bis jetzt niedergelegt habe, umfafst hauptsächlich folgende Sätze:

a) Dafs die Stützung einer gegebenen Massenanordnung durchaus in freien, aber auch zum Theil in vorgeschriebenen Stützlinien erfolgen kann;

b) dafs die Linien der Stützung stetig aneinander gereihter Massen durchaus stetig gekrümmte sind;

c) dafs der Scheiteldruck einer Stützlinie von ihrem Krümmungshalbmesser im Scheitel und von der Masse daselbst abhängt;

d) dafs der gesammte Schub, der aus der Stützung einer Masse auf die Vertikale durch den Stützbogenanfang übergeht, derselbe bleibt, es mag die Stützung vom Scheitel ab durchgängig in der Richtung einer freien Stützlinie oder in einiger Entfernung vom Scheitel wesentlich in der Richtung einer vorgeschriebenen Stützlinie geschehen;

e) dafs die Last, die einen geschlossenen und gehörig hinterstützten Bogen überschreitet, sich zunächst auf jene Bogenstrecke vertheilt, die durch vom belasteten Puncte der Brückenbahn an den Trag- oder Stützbogen

gezogene Tangenten begrenzt wird, folglich auf der einen Seite oder auch zu beiden Seiten der Last sich über den Bogen bis zu seinen Anfängen hin verbreitet, wenn sich Tangenten nicht ziehen lassen;

f) dafs die Stützung eines Druckes durch einen Mauerkörper hindurch immer in der Richtung geschieht, dafern überhaupt mehre Richtungen möglich sind, in welcher die geringste Zusammendrückung erfolgt;

g) dafs, soll die Massenstützung eines Brückenbogens wesentlich in der Richtung der mittlern Wölblinie des Stützbogens oder des gewölbten Bogens und überdiefs genau in Vertikalebenen erfolgen, welche den Stirnflächen parallel sind, die Lagerflächen der Wölbsteine winkelrecht zur Stirnfläche und winkelrecht zur mittlern Wölblinie, die Stofsflächen aber parallel den Stirnflächen sein müssen;

h) dafs der gewölbte oder der Stützbogen eines Brückenbogens, um die gesammte Masse des letztern wesentlich in seiner Richtung stützen zu können, nothwendig rundbogenförmig gestaltet sein mufs;

i) dafs ein Stützbogen die Gestalt eines Spitzbogens haben mufs, um eine über seinem Scheitel, etwa in der Form einer Mauer oder eines Pfeilers, freistehende Last neben seinem eignen Gewichte hauptsächlich in seiner Richtung stützen zu können;

k) dafs die innere Wölblinie eines Brückenbogens ein beliebiger Rundbogen sein kann, dafs aber die Krümmung der Stützlinie im Scheitel nicht von der Krümmung der innern Wölblinie daselbst wesentlich abhängt;

l) dafs die Stützung der Masse eines Brückenbogens innerhalb des Stützbogens nur in der Richtung einer Stützlinie geschieht;

m) dafs, bei regelrechter Herstellung eines Stützbogens, die Richtung der Massenstützung vom Scheitel des Stützbogens ab in einer freien Stützlinie erfolgt, die

vom Scheitel der mittlern Wölblinie ausgeht, in der Regel die letztere überschreitet, sie ferner nach dem Bogenanfange hin tangirt und von hier aus, bei geeigneter Hinterstützung, der Richtung der mittlern Wölblinie folgt;

n) dafs ein beliebig gewählter oder vorgeschriebener Stützbogen nothwendig bis zu einer gewissen Höhe hintermauert sein mufs, wenn die Massenstützung wesentlich in der Richtung seiner mittlern Wölblinie statthaben soll;

o) dafs die freie Stützlinie, in welcher sich im äufsersten Falle die Masse eines Brückenbogens stützen kann, jene der Massenanreihung zugehörende ist, die vom Scheitel der äufsern Wölblinie ausgeht und in ihrem Fortgange die innere Wölblinie tangirt;

p) dafs die sogenannten Brechungspuncte oder Brechungsfugen, deren Anzahl, wenn sie sichtbar werden, 5 sein mufs, ihrer Lage nach durch die letztbezeichnete Stützlinie bestimmt werden; etc. etc.

q) dafs die Standfähigkeit eines Pfeilers nicht blos von seinen Abmessungen und von der Drückbarkeit der Sohle abhängig ist, auf der er steht, sondern auch von der beanspruchten rückwirkenden Festigkeit seiner Querschnittsflächen; etc. etc.

r) dafs, bei der nämlichen Form der innern Wölblinie, die kleinste lichte Spannweite, die man den Bögen einer Brücke giebt, den geringsten Materialaufwand bedingt, dafs aber dessen ungeachtet, mit Hinsicht auf die Pfeilersteifigkeit, die Spannweite mit der Ueberbrückungshöhe zunehmen mufs etc. etc.

Nach der stufenweise erfolgten Entwickelung der vorgenannten und anderer Sätze, die oft ziemlich bunt untereinander läuft und theilweise auf Voraussetzungen gestützt ist, die erst später ihre Begründung finden, habe ich eine Zusammenstellung aller dieser Sätze in der Form von Regeln in der Absicht gegeben, um damit das scharf zu bezeichnen, was

für die Anwendung besonders wichtig ist. Doch weder eine blofse wissenschaftliche Begründung einer Theorie der Construction steinerner Brücken, noch eine Summe von kahl hingestellten practischen Regeln für diese dürfte völlig ausreichen, um überall das Rechte oder doch das Geeignetere zu finden; darum werde ich noch eine Beurtheilung ausgeführter Brücken anreihen, wobei ich zugleich Gelegenheit finden werde, auf die Vor- und Nachtheile gewisser Brückenformen, Rüstungen, Gründungen, Uebermauerungen u. dg. m. hinzuweisen. Für diesen Zweck sind schon dem vorliegenden Bande eine ziemliche Anzahl von ausgeführten Brücken angeschlossen und eine gleiche Anzahl wird der zweite Band enthalten, von welchen die Mehrzahl gleichzeitig als Muster für auszuführende Brücken dienen kann.

Im zweiten Bande sollen die Regeln für die Construction der steinernen Brücken und für ihre Gründung geschlossen und als Anwendung derselben eine Critik ausgeführter Brücken folgen; ferner sollen hohe Thalüberbrückungen mit Hinsicht auf die Ueberbrückung des Göltzsch- und des Elsterthales, der Erddruck und die Futtermauern und endlich die Tunnel behandelt werden.

Der Umstand, dafs ich für die gegenwärtige Schrift und für deren Nachfolger keine oder nur wenig brauchbare Vorarbeiten hatte, sondern fast Alles von der Wurzel aus schaffen musste, ferner die Natur des Stoffes selbst, welche die stufenweise Entwickelung unter zu machenden Voraussetzungen vorschrieb, die erst später näher zu begründen waren, noch mehr aber die Eile, mit der ich genöthigt war, die vorliegende Arbeit zu beschaffen, haben Wiederholungen und einen Mangel an Abrundung herbeigeführt, die ich selbst in ihrem ganzen Umfange am lebhaftesten fühle und die ich erst bei einer folgenden Ausgabe dieses Werkes, dafern diese nöthig wird, beseitigen kann. Mit diesem Anführen will ich jedoch um keine Schonung meiner in der Form flüchtigen Arbeit gebeten haben, denn dem Gehalte nach habe ich Grund, nur unwesentliche Ausstellungen erwarten zu dürfen; der herbste Tadel meiner Pseudofreunde soll mir

willkommen sein, wenn er mich in den Stand setzt, eine spätere Ausgabe verbessern zu können. Eine eigentliche Beurtheilung dessen nach Form und Inhalt, was ich zu schaffen die Absicht habe, wird jedoch erst nach Ausgabe des zweiten Bandes, der sicher in der ersten Hälfte des nächsten Jahres nachfolgt, möglich sein.

Dresden, im November 1846.

J. A. Schubert.

Inhalts-Verzeichniss.

Seite

Erster Abshnitt. Gewölbe nach Form und Zweck . . . 1

Zweiter Abschnitt. Verwendung und Wirkung gewölbter Bögen . 4

Dritter Abschnitt. Ueber Stützlinien überhaupt 7

Vierter Abschnitt. Gesetze der freien Stützlinie . . . 11

Fünfter Abschnitt. Gesetze der vorgeschriebenen Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung 24

Sechster Abschnitt. Gesetze der vorgeschriebenen Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung 35

Siebenter Abschnitt. Beschaffenheit einer Stützlinie im Scheitel 44

Achter Abschnitt. Horizontaldruck im Scheitel einer Stützlinie für stetig aneinander gereihte Massen 46

Neunter Abschnitt. Gemeinsame und eigenthümliche Eigenschaften der verschiedenen Stützlinien 48

Zehnter Abschnitt. Ueber Stützlinien der Wölbbögen überhaupt 49

Elfter Abschnitt. Verhalten gewölbter Bögen gegen die zugehörenden Pfeiler im Allgemeinen 56

Zwölfter Abschnitt. Ueber die Richtung der Wölbfugen 70

Dreizehnter Abschnitt. Von der Richtung der Lager- und Stofsflächen der Wölbsteine gerader Bögen 77

Vierzehnter Abschnitt. Ueber Lehrbögen im Allgemeinen, über die Ausführung und über das Setzen gewölbter Bögen 81

Fünfzehnter Abschnitt. Ueber schiefe Brücken, Gurt-

Seite

bogen und eigentliche schiefe Brücken. Beschaffenheit und Richtung der Stofs- und Lagerflächen schiefer Brücken und genäherte Construction ihrer Lagerfugen 106

Sechszehnter Abschnitt. Ueber krumme Brücken . . . 126

Siebzehnter Abschnitt. Gesetze der Tragfähigkeit gewölbter Bögen . 134

Achtzehnter Abschnitt. Vorläufige Bestimmungen über die Höhe gewölbter Bögen 166

Neunzehnter Abschnitt. Bestimmung der freien Stützlinie gegebener Brückenbögen 193

a) wenn die innere Wölblinie ein elliptischer Spitzbogen ist, b) wenn im Scheitel eine Last liegt, und c) wenn der Raum zwischen der innern Wölb- und der Brückenbahn gleich dicht und mit gleich schwerem Material erfüllt ist . 194

Beziehung der freien Stützlinien einer Massenanordnung zu einander 198

Gleichung, Formeln und Tabellen für die freie Stützlinie eines Brückenbogens, dessen innere Wölblinie ein Kreisbogen und dessen Raum zwischen der innern Wölblinie und der Brückenbahn mit gleich schwerem Materiale gleich dicht erfüllt ist 199

Bestimmung der freien Stützlinie eines Brückenbogens, dessen innere Wölblinie eine Ellipse und dessen Raum zwischen der horizontalen Brückenbahn und der innern Wölblinie mit gleich schwerem Materiale gleich dicht erfüllt ist 229

Allgemeine Methode zur Bestimmung der freien Stützlinie irgend eines Bogens mit irgend einer Massenanordnung 233

Auffinduug der innern Wölblinie eines Brückenbogens, dessen mittlere Wölblinie eine freie Stützlinie der Masse des Brückenbogens ist 247

Natur der Stützlinie eines Stützbogens, der in allen Puncten eine gleich hohe zu stützende Masse über sich hat 259

Bestimmung der freien Stützlinie eines freistehenden Brückenbogens, dessen innere und äufsere Wölblinie Kreisbögen sind, nebst Tabellen 261

Seite

Bestimmung der freien Stützlinie von Kreisspitzbögen und deren Scheitelbelastung 275

Herleitung der Gestalt der innern Wölblinie eines freistützenden Spitzbogens 297

Zwanzigster Abschnitt. Nähere Bestimmung der Stützungsrichtung gegebener Brückenbögen 303

Vertheilung des Druckes, der auf einen Punct der Brückenbahn trifft, über die Tiefe des Stützbogens . . . 316

Ein und zwanzigster Abschnitt. Ueber Pfeilerformen und deren Standfähigkeit 318

Querschnittsflächen der Pfeiler 320

Kantungspuncte der Pfeiler 328

Zwei und zwanzigster Abschnitt. Ueber den Aufwand an Material bei verschieden weit gespannten Brückenbögen . 347

Drei und zwanzigster Abschnitt. Bestimmung, Gesetze der Stützung und practische Regeln für die Construction steinerner Bogenbrücken.

1) Allgemeine Bestimmung einer Brücke 356

2) Allgemeines über die Beschaffenheit und Lage der Strom- und Thalbrücken 358

3) Ueber den Transport von Gestein durch den Lauf des Wassers in Beziehung auf die Auswaschung der Gerinne zwischen den Pfeilern einer Brücke 366

4) Ueber die Berechnung der Stauhöhe eines Stromes, die durch den Einbau einer Brücke in denselben entsteht 372

5) Statische Bestimmung der Stützbögen, der Pfeiler und der Widerlager einer Brücke 377

6) Allgemeines über die Form der Stützbögen 378

7) Regeln zur Auffindung der Stützlinie eines gegebenen kreisbogenförmigen Brückenbogens mit massiver Hintermauerung und Ueberfüllung 381

8) Regeln zur Auffindung der Stützlinie eines gegebenen elliptischen Brückenbogens mit massiver Hintermauerung und Hinterfüllung 392

9) Bestimmung der freien Stützlinie eines gegebenen beliebigen Brückenbogens 400

Seite

10) Bestimmung der innern Wölblinie eines Stützbogens, mit dessen mittlerer Wölblinie die freie Stützlinie durchaus zusammenfällt 412

11) Bestimmung der Brechungspuncte eines freistehenden gewölbten Bogens 420

12) Bestimmung der Höhe, bis zu welcher ein freistehender Wölbbogen hintermauert sein mufs, um sich nach Entfernung der Lehrgerüste nahe in der Richtung seiner mittlern Wölblinie stützen zu können 422

13) Bestimmung der Hintermauerungshöhe und der Brechungspuncte der Stützbögen von Brückenbögen . . 428

Erster Abschnitt.

Ueber Gewölbe nach Form und Zweck.

Gewölbe sind deckenförmige Verbindungen aufrechtstehender Mauern von gröſserer oder geringerer Höhe. Die Formen, in welchen Gewölbe, von unten angesehen, ausgeführt werden können, sind zum Theil beliebig, zum Theil durch die Lage der Mauern zu einander bedingt, welche sie zu verbinden haben.

Die Grundform eines Gewölbes wird durch die Linien bestimmt, welche die untere Fläche desselben bis zum Anschluſs an die aufrechtstehenden Mauern giebt,

a) wenn man es mit einer Fläche in vertikalen Richtungen und
b) wenn man es mit einer Fläche in horizontalen Richtungen durchschneidet.

Nach der ersten Richtung geschnitten kann die innere Wölbfläche eines Gewölbes geben:

1) eine gerade Linie,
2) eine stetig gekrümmte und
3) eine Linie, die aus zwei stetig gekrümmten zusammengesetzt ist, welche im Scheitel, d. i. im höchsten Puncte des Gewölbes, unter einem Winkel zusammenlaufen, der kleiner als 180^0 ist.

Nach der zweiten, oder in horizontaler Richtung geschnitten, kann die untere Fläche eines Gewölbes geben:

4) zwei gerade Linien,
5) ein Rechteck oder Parallelogramm mit abgerundeten Ecken,

6) eine in sich zurückkehrende krumme Linie, die gewöhnlich ein Kreis ist, und
7) ein Polygon.

Ein Gewölbe nun, dessen untere Fläche, in vertikalen Richtungen durchschnitten,

1) nur gerade Linien giebt, heifst ein wagerechtes oder scheidrechtes Gewölbe,
2) wenn es nach einer Richtung hin gerade, nach einer zweiten aber eine stetig gekrümmte Linie giebt, ein Rundbogen-Gewölbe, und
3) wenn es, nach einer Richtung hin geschnitten, eine gerade, nach andern hin aber zwei im Scheitel unter einem Winckel an einander stofsende krumme Linien giebt, ein Spitzbogen-Gewölbe.

Erhält man von der untern Fläche eines Gewölbes, mit einer horizontalen Ebene geschnitten,

4) zwei gerade Linien, dann heifst es ein Tonnen-Gewölbe,
5) erhält man ein Rechteck oder Parallelogramm mit abgerundeten Ecken, dann heifst es ein Mulden-Gewölbe,
6) erhält man einen Kreis oder überhaupt eine in sich zurückkehrende krumme Linie, dann heifst es ein Kessel- oder Kuppel-Gewölbe und
7) erhält man ein Polygon, dann heifst es ein Stern-Gewölbe.

Die eben aufgezählten Grundformen der Gewölbe kommen in der Ausführung häufig, oft auch mit geringen Abänderungen, oft aber auch in Verbindungen vor und erhalten dann besondere Namen. So werden häufig Tonnengewölbe im Rund- und Spitzbogenstyl ausgeführt, die sich unter rechten oder spitzen Winkeln durchkreuzen und welche mit dem Namen Kreuz-Gewölbe bezeichnet werden.

Die häufigste Anwendung finden die Tonnengewölbe. Ein solches von nur geringer Tiefe oder Breite, das gleichsam aus einer Steinschicht gebildet ist, wird gewöhnlich ein Wölbbogen genannt. Was von einem solchen in der Folge gesagt wird, findet auf eine beliebige Summe derselben oder auf ein Tonnengewölbe von einer beliebigen Tiefe Anwendung.

Der höchste Theil eines Wölbbogens heifst dessen Scheitel, der Stein, der diese Stelle eines Gewölbes einnimmt und mit wel-

chem der Bogen bei der practischen Ausführung geschlossen wird, der Schlufsstein. Die Mauern, an die sich ein Wölbbogen anschliefst oder anlehnt, werden die Widerlager des Bogens, und der mit einer Bekrönung versehene Stein, welcher zwischen einem Widerlager und dem Bogenanfange liegt, der Kämpfer genannt. Die Linie ferner, welche die untere Seite eines Wölbbogens bildet, heifst die innere Wölblinie, die, welche die obere Begränzung giebt, die äufsere Wölblinie. Die lothrechte Fläche eines Wölbbogens in der Richtung seiner Längeausdehnung führt den Namen Stirnfläche.

Brücken bestehen aus einem Tonnengewölbe oder aus mehreren, die sich, wenn die Brücke eine gerade ist, in paralleler Richtung an einander reihen. Die Mauern nun, gegen welche sich im letzteren Falle die Wölbbögen stützen, heifsen Schäfte oder Pfeiler, die Endpfeiler aber Stirnpfeiler oder Widerlagspfeiler.

Im Vorstehenden sind die Gewölbe nach ihrer Form betrachtet worden; rücksichtlich ihrer Bestimmung dienen sie

entweder als blofse Decken, die sich nur selbst zu tragen haben, wie diefs bei Kellergewölben, Kuppelgewölben etc. der Fall ist, oder

sie dienen zur Stützung einer unveränderlichen Last, wie z. B. die über Thür- und Fensteröffnungen geschlagenen Wölbbögen, oder endlich

sie dienen dazu, eine veränderliche Last zu stützen, wie z. B. Deckengewölbe, die für überliegende Räume den Fufsboden bilden, wie die Wölbbögen, welche die Stufen einer Treppe stützen, auf der sich verschieden grofse Lasten bewegen, ferner endlich wie die Wölbbögen von Brücken, über die ebenfalls verschieden grofse Lasten geführt werden.

Die Stirnfläche eines Tonnengewölbes steht in den meisten Fällen normal, bisweilen aber auch schief auf der Richtung seiner innern Wölbfläche. Nach diesen Richtungen, welche die Stirnfläche eines Tonnengewölbes zu seiner inneren Wölbfläche haben kann, theilt man sie in gerade und in schiefe Tonnengewölbe. Eben so heifsen Brücken, je nachdem die Stirnfläche jedes Bogens auf seiner innern Wölbfläche winkelrecht oder schief steht, Brü-

cken mit geraden oder Brücken mit schiefen Bögen. Die Brücken mit schiefen Bögen werden vorzugsweise schiefe Brücken genannt. Schiefe Brücken werden erforderlich, wenn deren Längenrichtung die Richtung der zu überbrückenden Strafse oder die des zu überbrückenden Stromes nicht winkelrecht schneidet.

Zweiter Abschnitt.

Ueber Verwendung und Wirkung gewölbter Bögen im Allgemeinen.

Oeffnungen in Mauern, wie Fenster und Thüren bilden, werden bei Herstellung jener mit einer bogenförmigen Steinschicht, d. i. mit einem gewölbten Bogen *ab* Fig. 1 geschlossen oder, wie man sagt, überwölbt. Eben so werden freistehende Pfeiler *b* und *c* Fig 2 mit einander und mit End- oder Stirnpfeilern *a* und *d* durch bogenförmige Mauern oder durch gewölbte Bögen zunächst verbunden und überdiefs hinter-, wohl auch übermauert, um Brücken für Fahrstrafsen etc. zu erhalten.

Die angeführte Bauform ist zwar nicht die alleinige, die zur Ueberdeckung einer Maueröffnung und zur Verbindung mit gegenüberstehenden Mauern oder Pfeilern Anwendung finden kann, aber sie ist jene, welche die umfassendste Anwendung gestattet, welche den solidesten Mauerverband liefert, es mag die Vermauerung der Steine ohne oder mit einem Bindemittel, wie Kalkmörtel, Cement etc. sind, erfolgen und überdiefs bequemer als jede andere Methode, beträchtlich weite Oeffnungen in Mauern mit verhältnifsmäfsig kleinen Steinen zu schliefsen, oder über freistehende Pfeiler einen Mauerkörper zu errichten.

Ein gewölbter Bogen, welcher zwei sich gegenüberstehende Pfeiler oder Wände verbindet, dient seinem eigenen Gewichte und der darüberstehenden Masse zunächst als Unterstützung. Ein solcher genügt, erfahrungsgemäfs, diesem Zwecke zuverlässig, solange

keine theilweise Zerdrückung der Bogen- oder Wölbsteine erfolgt und solange die Mauerkörper, gegen welche er sich stützt, nicht ausweichen. Ferner genügt ein gewölbter Bogen seiner Bestimmung um so sicherer, je gekrümmter er ist, d. h. der die Thüröffnung Fig. 1 überspannende Bogen wird ungleich leichter durch die überstehende Last zerdrückt werden, wie uns ebenfalls die Erfahrung lehrt, als der Bogen in Fig. 3 unter gleichen Umständen.

Während der Herstellung eines Bogens zur Verbindung zweier Pfeiler oder Wände stützen sich die Bogen- oder Wölbsteine gegen ein untergebautes Holzgerüst, Lehrbogen genannt, das nach dem Schlufs des Bogens entfernt wird.

Gröfsern Wölbsteinen giebt man in der Regel eine keilförmige Gestalt in der Weise, dafs die Berührungs- oder Lagerfläche von je zwei an einander stofsenden Wölbsteinen auf der mittlern Richtung des Bogens winkelrecht steht. Dagegen sieht man von der keilförmigen Gestalt der Wölbsteine ab, wenn deren Länge für den herzustellenden Bogen nur gering ist. Man vermauert solche mit einem guten Mörtel und vermittelt durch diesen die dem Wölbsteine mangelnde keilförmige Gestalt, indem man die mit Mörtel zu erfüllenden Fugen angemessen keilförmig gestaltet.

Bei nur geringen Spannweiten von Bögen, wie Thür- und Fensteröffnungen solche bieten, und bei der Verwendung von verhältnifsmäfsig langen Wölbsteinen können die letztern so angenommen werden, dafs sich die untere Fläche des Bogens wagerecht bildet. Die Bogenform dieser sogenannten scheidrechten Bögen springt zwar nicht sofort in die Augen, sie ist aber vorhanden und ist es allein, welche deren Zulässigkeit bedingt.

Je weiter ein Bogen spannen und je flacher er werden soll, desto fester mufs das Material sein, aus welchem die Wölbsteine herzustellen sind, um dem Zerdrücken widerstehen zu können. Es ist Thatsache, dafs Letzteres schon oft vorgekommen ist und den Niederbruch von Bögen, so wie theilweise den der überstehenden Mauermassen herbeiführte. Dieses Zerdrücken der Wölbsteine ist aber nur dann möglich, wenn aus ihrem Gewichte und aus dem der Mauermasse, die sich gegen den Bogen stützt, ein Druck entspringt, der mit der Richtung des Bogens selbst zusammenfällt. Vom Vorhandensein eines derartigen Druckes kann man sich auf vielfache

Weise und z. B. im Augenblicke der Lüftung eines Lehrbogens überzeugen. Geschieht diese Lüftung eben nach Vollendung eines Bogens, dessen Wölbsteine mit Mörtel verbunden wurden, dann gewährt man eine Verkleinerung der Wölbfugen, ein theilweises Heraustreten des Mörtels aus den letztern, oder überhaupt und als Gesammtwirkung eine Verkürzung des Bogens, mit welcher ein Niedersinken des Gewölbscheitels in Verbindung steht, das man das Setzen des Bogens nennt.

Wenn aber ein Wölbbogen durch sein eigenes Gewicht und durch das einer von ihm gestützten Mauermasse einen Druck erleidet, der nahe mit seiner Richtung zusammenfällt, dann mufs auch jeder Wölbbogen, z. B. jener, der zwei Pfeiler *b* und *c* Fig. 2 verbindet, das Bestreben äufsern, eben diese Pfeiler umzuwerfen. Dem ist wahrhaft so. Schon oft wurde dieses Bestreben beobachtet. Schon mancher Bogen hat durch diesen Schub die ihm zugehörenden Pfeiler umgeworfen und dadurch sich selbst zerstört. Diese nämliche Aeufserung von Schub ist es, die fast allein den Einsturz gemauerter Brücken und zwar dann veranlafst, wenn die Stirnpfeiler *a* und *d* in der Richtung der Brücke demselben nicht genug Widerstand zu leisten vermögen.

Die Last, welche die Schlufsbögen von Oeffnungen tragen, die sich entfernt vom oberen Ende einer Mauer befinden, kann dem Gewichte der über dem Bogen stehenden Mauermasse gleich, sie kann ferner kleiner, sie kann aber auch gröfser als diese sein. Von der Wahrheit der eben gemachten Angaben wird man sich durch folgende Andeutungen überzeugen:

Eine aus gleichmäfsigen Steinen ohne Anwendung eines Bindemittels aufgeführte Mauer Fig. 4 läfst sich winkelförmig öffnen, wenn die über dem obern Ende *a* der gemachten Oeffnung befindliche Mauerhöhe nicht zu gering ist. Die Mauermasse zwischen *ab* und *cd* zeigt das Bestreben sich um die Kante *c* zu drehen, sich also in der Richtung *cd* abzutrennen, woraus ein Schub gegen *ab* entspringt. Genau dasselbe Bestreben wird auch dem Mauerkörper zwischen *ab* und *ef* zugehören. Das Abreifsen der Mauerkörper *ab* und *af* in den Richtungen *cd* und *ef* wird durch die Reibung der daselbst sich übergreifenden Steine defshalb erschwert, weil sich immer ein Stein zwischen zwei andern hindurchziehen mufs. Die

geringste Bewegung in den Richtungen *cd* und *ef* drückt aber die Steinkörper in *ab* gegen einander, womit jede weitere Bewegung endet, wenn keine horizontale Verschiebung in der Höhe *ab* zu Stande kommt.

Zuverlässig wird sich die Oeffnung *cad* unter einem noch stumpfern Winkel als *cae* ist, öffnen lassen, wenn die Steine mehr als die doppelte Höhe zur Länge haben, so wie auch dann, wenn die Steine mit einem Bindemittel vermauert wurden.

Gesetzt nun, es sei zwischen *cd* und *ef* ein Bogen eingewölbt. Setzt sich derselbe in Folge der Belastung, die über ihm und zwischen *ed* und *ef* steht, dann wird er nur noch einen sehr kleinen Theil von Mauerwerk und zwar nur jenen zu tragen haben, der sich zwischen ihm und dem Winkel *cae* befindet. Setzt sich der Bogen mit dem über- und anstehenden Mauerwerke gleichmäfsig, dann tritt die vertikal über ihm stehende Mauer als seine Belastung auf. Der Bogen zwischen *c* und *e* wird aber mehr als das unmittelbar vertikal über ihm stehende Mauerwerk zu tragen bekommen, wenn sich das neben und über dem Bogen befindliche Mauerwerk setzt, während er selbst unverändert bleibt. Der eben erwähnte Fall tritt ein, wenn sich Bögen gegen Gewände oder Schäfte aus langen Werkstücken bereitet stützen, während die Hinter- und Uebermauerung aus kleinen Steinen besteht. Eine sorgfältige Beobachtung in genanntem Falle wird immer Risse *gh* und *ik*, von den Bogenenden aus aufsteigend, erkennen lassen, welche die Begrenzung des Mauerkörpers andeuten, der nun auf dem Bogen lastet.

Dritter Abschnitt.

Ueber Stützlinien überhaupt.

Wenig weitspannende Bögen von nicht zu gedrückter Form, ganz besonders aber solche, die von gröfseren Mauermassen umschlossen werden, können, um noch ihrer Bestimmung zu genügen,

in sehr verschiedenen Formen und in sehr schwachen Dimensionen ausgeführt werden, weshalb denn auch die Praxis kein Bedürfnifs fühlt, nähern Aufschlufs über das Wesen kleiner Stützungsbögen zu haben. Ganz anders aber verhält es sich bei weitgespannten Bögen, die nur wenig Masse neben und über sich haben, die wo möglich mit dem kleinsten Aufwande von Material und Arbeitslohn hergestellt werden, die veränderliche Lasten tragen sollen etc.; oder, um diese Bedingungen und noch andere mit wenigen Worten zu bezeichnen, anders als bei den kleinen von feststehenden Mauern umgrenzten Stützbögen verhält es sich bei den gewölbten Bögen, welche den hauptsächlichsten Theil von Strom- und Landbrücken, von Tunnels etc. bilden. Um solche sich klar bewufst völlig zweckentsprechend und für die obwaltenden Verhältnisse mit dem geringsten Kostenaufwande herstellen zu können, mufs man die Gesetze gründlich kennen, nach welchen Wölbbögen ihr eigenes Gewicht und das aufliegender Massen, sowie darüberschreitender Lasten unter den ungünstigsten Umständen zu tragen vermögen.

Nur um diese Einsicht in das Wesen der Wölbbögen, mit Hinsicht auf die Erfahrung, einzuleiten und um ein Gewölbe auf seine einfachsten oder Grundformen zurückführen zu können, haben wir über Wölbbögen nach ihrer Verwendung und Wirkung im Allgemeinen gesprochen. Wir schöpfen daraus die Ueberzeugung, dafs, wenn ein Wölbbogen sein eigenes Gewicht und das überstehender Massen trägt oder stützt, derselbe einen Druck erleidet, der mit seiner Richtung zusammenfällt und eben defshalb an seinen Anfängen angemessen gestützt sein mufs. Ueber die Gröfse dieses Druckes, so wie darüber, ob ein Wölbbogen unter Umständen noch eine zweite Druckrichtung bedingt, die aufserhalb seiner Richtung liegt, giebt uns die blofse Erfahrung keinen bestimmten Aufschlufs.

Der Druck, den ein Wölbbogen nach seiner Richtung hin durch sein eigenes Gewicht und durch das überstehender Massen erfährt, wird durch einen unendlich schwachen Wölbbogen ebenfalls zu stützen sein, wenn dessen Festigkeit gegen das Zerdrücken unendlich grofs ist. Nichts hindert daher, sich statt eines materiellen Wölbbogens einen linearen zu denken, und die Last, die jener an sichh at und überdiefs stützen soll, sich als Gewichte zu denken, die am letztern und zwar in unendlich nahe an einander befindlichen

Puncten, aufgehangen sind. Diese Form ist zuverlässig eine der einfachsten, auf welche ein materieller Bogen zurückgeführt werden kann, und es wird das Gesetz, nach welchem ein solcher seine Last stützt, sicher auf einen Wölbbogen von beliebiger Höhe zu beziehen sein.

Eine zweite Auffassung desselben Gegenstandes, welche den Wölbbögen aus einzelnen Steinen noch angemessener ist als die angeführte, besteht darin, die Stützung eines Wölbbogens durch ein lineares Polygon von beliebig kurzen Seiten als vertreten anzunehmen, in dessen Ecken Gewichte aufgehangen sind, die mit jenen Massen correspondiren, die ein Wölbbogen an sich und über sich hat.

Nächst dem, dafs die eben angeführte Grundform eines Wölbbogens, nämlich ein lineares Polygon, gewissen Ausführungen solcher am nächsten steht, erleichtert sie die Bestimmung der Gesetze, nach welchen ein linearer Wölbbogen Gewichte stützt, gestattet sehr leicht den Uebertrag eben dieser auf stetig gekrümmte lineare Wölbbögen und führt überdiefs zu den Gesetzen, nach welchen polygonale hölzerne und eiserne Brückenbögen ihr eigenes Gewicht und das aufliegender Massen stützen.

Mit Beziehung auf die eben angeführten Bemerkungen vertrete das in einer vertikalen Ebene gelegene Polygon $MABC \ldots ON$ Fig. 5 die Stützungsfähigkeit eines Wölbbogens nach seiner Richtung hin und die in seinen Ecken aufgehangenen Gewichte P_0, P_1, P_2, $P_3 \ldots$ P_{n-1} mögen mit dem Gewichte des Bogens und seiner Belastung rücksichtlich ihrer Gröfse und Vertheilung übereinstimmen. Der Eckpunct A sei der höchste des Polygons oder sein Scheitelpunct, und M das eine und N das andere Ende desselben. Die vom Scheitel A auslaufenden Polygonseiten AM und AB wollen wir uns in gleicher Richtung gegen eine Vertikale denken. Die Winkel ferner, welche die Polygonseiten AB, BC, $CD \ldots ON$ mit einer Horizontale einschliefsen, sollen die Stellungswinkel der Polygonseiten heifsen und deren Gradmafs aufeinanderfolgend mit α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_n$ bezeichnet werden.

Das Polygon Fig 5 kann, wie uns Versuche mit Bestimmtheit nachweisen, die in seinen Eckpuncten aufgehangenen Gewichte frei oder so stützen, dafs kein Ausweichen einer der Polygonseiten ein-

tritt, wenn dessen Endpuncte gehörig unterstützt sind. Hierzu gehören allerdings Gewichte, die in einer bestimmten Beziehung zur Richtung der Polygonseiten stehen. Ist diese noch zu ermittelnde Beziehung nicht vorhanden, dann lehrt uns das Experiment ferner, dafs ein Polygon die in seinen Eckpuncten befindlichen Gewichte in seiner Richtung allein nicht, sondern nur dann zu stützen vermag, wenn jeder Eckpunct *B*, *C*, *D*.... außerhalb des Polygons, entweder in den Richtungen *Bi*, *Cp*.... der niedersteigenden Polygonseiten *AB*, *BC*...., oder nach horizontaler Richtung *Bh*, *Co*.... oder nach einer zwischen den eben angeführten Richtungen liegenden noch Stützung findet. Die Erfahrung also zeigt uns, dafs ein in seinen Eckpuncten mit Gewichten belastetes Polygon unter Umständen diese nach seiner Richtung allein, oder doch neben einer Stützung jedes Eckpunctes nach horizontaler Richtung, nach den Richtungen der niedersteigenden Polygonseiten, oder nach einer Richtung, die zwischen den eben genannten inne liegt, mit zu stützen vermag.

Insofern ein Polygon in seinen Ecken aufgehangene Gewichte allein, oder doch mit stützt, werden wir ein solches eine Stützlinie für die genannten Gewichte nennen können. Zur Unterscheidung der zwei Hauptklassen von Stützlinien wollen wir diejenigen freie Stützlinien nennen, welche die angehangenen Gewichte in ihrer Richtung allein zu stützen vermögen, dagegen jene mit dem Namen vorgeschriebene Stützlinien belegen, welche die angebrachten Gewichte nicht allein in ihrer Richtung tragen können. Behufs der nähern Bezeichnung einer vorgeschriebenen Stützlinie heifse eine solche eine vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung, wenn das Polygon in jedem Eckpuncte nach der Richtung der niedersteigenden Polygonseite, und ferner eine vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung, wenn jede Polygonecke nach horizontaler Richtung Stützung findet.

Vierter Abschnitt.

Gesetze der freien Stützlinie.

Das Polygon $MABC \ldots ON$ Fig. 5 sei für die in seinen Ecken aufgehangenen Gewichte eine freie Stützlinie.

Die vom Scheitel A aus niedergehenden Polygonseiten AM und AB nahmen wir in gleicher Richtung zu einer Vertikale an, wefshalb die Drücke gleich grofs sein müssen, die das Gewicht P_0 auf diese Polygonseiten äufsert.

Wird P_0 durch die Vertikale Aa dargestellt, dann sind, zufolge der Grundlehren der Statik*), die von P_0 gegen die Polygonseiten AM und AB geäufserten Drücke die auf AM und AB liegenden Seiten Ac und Ab eines Parallelogramms, dem Aa, seiner Gröfse und Richtung nach, $= P_0$ als Diagonale zugehört. Die Rechnung giebt uns für diese Drücke

$$(1)\quad Ab = Ac = \tfrac{1}{2} P_0 \sec\,(90 - \alpha_1) = \frac{\tfrac{1}{2} P_0}{\sin \alpha_1}.$$

Weil die beiden im Scheitel A zusammenstofsenden Polygonseiten gleiche Richtung zu einer Vertikale haben sollen, so mufs jede derselben die Hälfte des Gewichtes P_0 stützen. Die Belastung der Polygonseiten AM und AB durch P_0 bleibt völlig dieselbe, wie uns das Experiment und die Rechnung darthun, wenn wir zwischen ihre Endpuncte bei A eine horizontale Linie einschalten, wie diefs in Fig. 6 angedeutet ist, und jedem der so gebildeten Eckpuncte A und A_1 mit $\tfrac{1}{2} P_0$ belasten. Bei der jetzigen Anordnung ist das Gewicht

$$\tfrac{1}{2} P_0 = Aa$$

nur durch Seitendrücke zu stützen, die in die Richtungen AB und AA_1 fallen. Beschreibt man über diese Seiten ein Parallelogramm, dem Aa als Diagonale zukommt, dann ergeben sich die Drücke, welche $\tfrac{1}{2} P_0$ gegen AB und AA_1 übt, zu

$$Ab = Ab_1.$$

*) Grundlehren der Mechanik von J. A. Schubert, §. 24.

Eben so übt die Belastung $\frac{1}{2} P_0$ am Puncte A_1 hängend einen Druck von A_1 nach M hin, der

$$A_1 c = Ab,$$

und einen Druck von A_1 aus nach A hin, der

$$Ac_1 = Ab$$

ist.

Die Richtung giebt uns für die eben betrachtete Anwendung Fig. 6, wie wir bereits oben fanden,

$$Ab = A_1 c = \frac{\frac{1}{2} P_0}{sin\ \alpha_1},$$

ferner

$$Ab_1 = Ac_1 = \frac{1}{2} P_0\ cotg\ \alpha_1 = \frac{\frac{1}{2} P_0}{tg\ \alpha_1} = C.$$

Der Horizontaldruck Ab_1 geht von A nach A_1 hin, der Horizontaldruck $A_1 c_1$ von A_1 gegen A hin. Weil nun diese Drücke gleich grofs und gegen einander gerichtet sind, so müssen sie sich gegenseitig aufheben und nur das Bestreben zurücklassen, die Endpuncte A und A_1 der Linie AA_1 mit

$$(2)\ C = \frac{1}{2} P_0\ cotg\ \alpha_1$$

gegen einander zu drücken.

Die Gröfse und Wirkung des eben gefundenen Druckes C ist völlig unabhängig von der Entfernung der Puncte A und A_1; dieser Druck bleibt daher auch ungeändert, wie nahe oder wie fern sich eben diese Puncte sein mögen, wenn nur der Richtungswinkel der Polygonseiten dieselbe Gröfse behält; mithin mufs der horizontale Druck C auch dann noch bestehen, wenn sich die Polygonseiten $A_1 M$ und AB unmittelbar, wie in Fig. 5, gegen einander stützen. Also:

Die den Scheitel A Fig. 5 bildenden Polygonseiten üben daselbst einen Horizontaldruck gegen einander, der, wenn beide gleiche Richtung zu einer Vertikale haben,

$$\text{I. } C = \frac{1}{2} P_0\ cotg\ \alpha_1$$

ist.

Was nun die übrigen Gewichte anlangt, welche in den Ecken des Polygons Fig 5 aufgehangen sind, so mufs

P_1 von den Polygonseiten BA und BC,

P_2 „ „ „ CB „ CD,

P_3 von den Polygonseiten *DC* und *DF*

etc.

zunächst gestützt werden.

Wird P_1 durch die Vertikale *Pf* angegeben und über die Seiten *BA* und *BC* ein Parallelogramm beschrieben, dem *Bf* als Diagonale zugehört, dann wird der von $Bf = P_1$

gegen *BA* geübte Druck durch *Bd* und der

„ *BC* „ „ „ *Be*

dargestellt sein.

In ganz gleicher Weise entspringt aus dem Gewichte $P_2 = Cm$

ein Druck für *CB* gleich *Ck* und

„ „ „ *CD* „ *Cl*,

aus dem Gewichte $P_3 = Ds$

ein Druck für *DC* gleich *Dq* und

„ „ „ *DF* „ *Dr*

u. s. f.

Gemäfs der vorstehenden Betrachtungen erleidet die Polygonseite *AB*

einen Druck *Ab* von *A* nach *B* hin und

„ „ *Bd* „ *B* „ *A* „ ,

die Polygonseite *BC*

einen Druck *Be* von *B* nach *C* hin und

„ „ *Ck* „ *C* „ *B* „ ,

die Polygonseite *CD*

einen Druck *Cl* von *C* nach *D* hin nnd

„ „ *Dq* „ *D* „ *C* „

u. s. f.

Soll nun das Polygon Fig. 5 für die in seinen Ecken aufgehangenen Gewichte eine freie Stützlinie sein, dann müssen die auf je eine Polygonseite nach entgegengesetzter Richtung hin einwirkenden Drücke sich gegenseitig vollständig aufheben, also gleich grofs sein, mithin stattfinden:

$$(3)\begin{cases} Ab = Bd \\ Be = Ck \\ Cl = Dq \end{cases}$$

u. s. f.

Der Druck, den eine Seite einer freien Stützlinie erleidet, ist

der, welcher von einem Eckpuncte aus gegen den andern hin gerichtet ist. Somit wird

$$(4)\begin{cases}\text{Die Polygonseite } AB \text{ mit } Ab = Bd,\\ \text{,, \quad ,, \quad } BC \text{ ,, } Be = Ck,\\ \text{,, \quad ,, \quad } CD \text{ ,, } Cl = Dq\end{cases}$$

u. s. f.

zusammengedrückt.

Der Druck, den die letzte Seite ON der freien Stützlinie Fig. 5 in ihrer Richtung von O nach N hin empfängt, sei

$$D_n = NJ.$$

Wird von da aus ein Parallelogramm KG beschrieben, dessen Seiten horizontal und vertikal sind, und entspricht diesem NJ als Diagonale, dann ist der Druck D_n in N zu ersetzen

$$(5)\begin{cases}\text{durch den Horizontaldruck } NK = H \text{ und}\\ \text{,, \quad ,, Vertikaldruck } NG = V.\end{cases}$$

Aus einer Rechnung, welche auf die vorstehenden Betrachtungen und namentlich auf die Bedingungen unter (3), (4) und (5) basirt ist, erhalten wir scharfe und allgemein gültige Gesetze für die freie Stützlinie. Zu diesen Rechnungen verschreiten wir nun.

Mit Hülfe der ebenen Trigonometrie wird

$$(6)\begin{cases}Ab = \dfrac{\tfrac{1}{2} P_0}{sin\ \alpha_1},\\[2ex] Bd = \dfrac{P_1\ cos\ \alpha_2}{sin\,(\alpha_2 - \alpha_1)},\\[2ex] Be = \dfrac{P_1\ cos\ \alpha_1}{sin\,(\alpha_2 - \alpha_1)},\\[2ex] Ck = \dfrac{P_2\ cos\ \alpha_3}{(sin\,\alpha_3 - \alpha_2)},\\[2ex] Cl = \dfrac{P_2\ cos\ \alpha_2}{sin\,(\alpha_3 - \alpha_2)},\\[2ex] Dq = \dfrac{P_3\ cos\ \alpha_4}{(sin\,\alpha_4 - \alpha_3)}\end{cases}$$

u. s. f.

Die unter 3 aufgestellten Bedingungen geben

$$\frac{\frac{1}{2} P_0}{\sin \alpha_1} = \frac{P_1 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)},$$
$$\frac{P_1 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{P_2 \cos \alpha_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)},$$
$$\frac{P_2 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)} = \frac{P_3 \cos \alpha_4}{(\sin \alpha_4 - \alpha_3)} \text{ u. s. f.}$$

Durch blofse Reduction erhält man hieraus, unter Benutzung der Gleichung I. auf Seite 12,

$$C = \tfrac{1}{2} P_0 \, cotg\, \alpha_1,$$
$$P_1 = P_0 \, cotg\, \alpha_1 (tg\, \alpha_2 - tg\, \alpha_1) = (C\, tg\, \alpha_2 - tg\, \alpha_1),$$
$$P_2 = C (tg\, \alpha_3 - tg\, \alpha_2),$$
$$P_3 = C (tg\, \alpha_4 - tg\, \alpha_3)$$
$$\cdots\cdots$$
$$P_{n-1} = C (tg\, \alpha_n - tg\, \alpha_{n-1})$$

und ferner durch Addition

$$\text{II.} \quad \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_{n-1} = C\, tg\, \alpha_n.$$

Diese Gleichung stellt die Grundeigenschaft einer freien Stützlinie dar. In ihr bezeichnet der erste Theil die Summe aller Gewichte, welche die freie Stützlinie vom Scheitel bis zu ihrem Endpuncte zu stützen hat, C den Horizontaldruck im Scheitel und α_n den Richtungswinkel der letzten Polygonseite. Die Eigenschaft der freien Stützlinie, welche die Gleichung II. angiebt, ist wörtlich folgende:

Die Summe aller Gewichte, welche eine freie Stützlinie vom Scheitel bis zu ihrem Endpuncte hin zu stützen hat, ist gleich dem Horizontaldruck im Scheitel multiplicirt mit der Tangente des Richtungswinkels der letzten Seite.

Es kann jede Polygonseite vom Scheitel A aus Fig. 5 als die letzte nach und nach betrachtet werden; folglich ist mittels der Gleichung II. für gegebene Polygonseiten die Summe der Belastung, oder wenn die letztern gegeben sein sollten, die Richtung jeder Polygonseite zu bestimmen.

Die Gleichung II. giebt auch

$$tg\, \alpha_n = \frac{\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_{n-1}}{C}$$

für die Tangente des Richtungswinkels der letzten Polygonseite. Für $\alpha_n = 90^0$ wird $tg\ \alpha_n$ unendlich grofs. Diesen Werth nimmt der zweite Theil der vorstehenden Gleichung nur dann an, wenn der Zähler, d. i. die Summe aller zu stützenden Gewichte, unendlich grofs, oder wenn der Horizontaldruck C unendlich klein wird. Doch weder der eine noch der andere Werth liegt innerhalb der Grenze der Möglichkeit, und eben defshalb lehrt uns die letzte Gleichung:

Die endliche Richtung einer freien Stützlinie kann niemals vertikal werden.

Nach den Bedingungen unter (4) und mit Hinsicht auf die Gleichungen unter (6) ist der Druck, welchen, vom Scheitel abgezählt, erleidet

die erste Polygonseite gleich $\dfrac{\frac{1}{2} P_0}{sin\ \alpha_1} = D_1$,

„ zweite „ „ $\dfrac{P_1 \cos \alpha_1}{sin\ (\alpha_2 - \alpha_1)} = D_2$,

„ dritte „ „ $\dfrac{P_2 \cos \alpha_2}{sin\ (\alpha_3 - \alpha_2)} = D_3$

u. s. f.

„ nte „ „ $\dfrac{P_{n-1} \cos \alpha_{n-1}}{sin\ (\alpha_n - \alpha_{n-1})} = D_n$.

Vor Entwickelung der Gleichung I. fanden wir

$$P_{n-1} = C\,(tg\ \alpha_n - tg\ \alpha_{n-1}) = \frac{C \sin\ (\alpha_n - \alpha_{n-1})}{\cos \alpha_n \cos \alpha_{n-1}}.$$

Setzen wir diesen Werth für P_{n-1} in den Ausdruck für D_n, so wird

$$\text{III.}\quad D_n = \frac{C}{\cos \alpha_n}.$$

Diese Gleichung giebt uns ein viertes Gesetz für die freie Stützlinie an und es heifst:

Der Druck, unter welchem irgend sine Seite einer freien Stützlinie steht, ist gleich dem Horizontaldruck der letzteren im Scheitel dividirt durch den Cosinus des Richtungswinkels der Seite, für welche der Druck gefunden werden soll.

Mit Hinsicht auf (5) und auf die Figur 5. ist am Ende einer freien Stützlinie

der Horizontaldruck

$$\text{IV.}\quad H = D_n \cos \alpha_n = \frac{C \cos \alpha_n}{\cos \alpha_n} = C$$

und der Vertikaldruck

$$\text{V.}\quad V = D_n \sin \alpha_n = C \, tg \, \alpha_n = \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots + P_{n-1}.$$

Aus den eben gefundenen zwei Gleichungen erhalten wir ferner für eine freie Stützlinie:

Der Horizontaldruck am Endpuncte einer freien Stützlinie ist gleich dem Horizontaldruck im Scheitel und

der Vertikaldruck am Endpuncte einer freien Stützlinie ist dem Gewichte gleich, das zwischen dem Scheitel und dem Endpuncte von derselben gestützt wird.

Der lothrechte Abstand des Endpunctes N der freien Stützlinie Fig. 5 für die Gewichte $\tfrac{1}{2} P_0, P_1, P_2, P_3 \ldots P_{n-1}$ vom Scheitel A sei Z, ferner sei der horizontale Abstand

des Gewichtes P_1 von P_0 gleich b_1,
„ „ P_2 „ P_1 „ b_2,
„ „ P_3 „ P_2 „ b_3 u. s. f.,

und

„ Endpunctes N „ P_{n-1} „ b_n.

Aus dieser Annahme folgt

$$Z = b_1 \, tg \, \alpha_1 + b_2 \, tg \, \alpha_2 + b_3 \, tg \, \alpha_3 \ldots b_n \, tg \, \alpha_n,$$

oder, weil

$$tg \, \alpha_1 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0}{C},$$

$$tg \, \alpha_2 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0 + P_1}{C} \quad \text{u. s. f.,}$$

$$tg \, \alpha_n = \frac{\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots + P_{n-1}}{C}$$

ist,

$$Z = \frac{b_1 \tfrac{1}{2} P_0}{C} + \frac{b_2 (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1)}{C} + \frac{b_3 (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2)}{C} \ldots$$

$$+ \frac{b_n}{C} (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots + P_{n-1}).$$

Diese Gleichung stellt sich auch so dar:

$$\text{IV. } C.Z = \begin{cases} \tfrac{1}{2} P_0 \{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \ldots. + b_n\} \\ + \quad P_1 \{ \quad b_2 + b_3 + b_4 \ldots. + b_n\} \\ + \quad P_2 \{ \quad\quad b_3 + b_4 \ldots. + b_n\} \\ \quad\quad \text{u. s. f.} \\ + P_{n-1}\, b_n. \end{cases}$$

Nun ist

der Factor von $\frac{1}{2} P_0$ der horizontale Abstand des Gewichtes P_0 von N,

der Factor von P_1 der horizontale Abstand des P_1 von N u. s. f.,

sowie Z der vertikale Abstand des Horizontalschubs C im Scheitel A vom Endpuncte N.

Wenn die freie Stützlinie im Scheitel A endet, die Polygonseite AM also nicht vorhanden ist, dann erscheint $\frac{1}{2} P_0$ als Belastung der Seite AB in A und es mufs gegen den Punct A ein Horizontaldruck C von A nach Y hin wirkend angelegt werden, soll das Bestehen der freien Stützlinie gesichert sein.

In der Statik wird das Product aus einem Drucke und dem winkelrechten Abstande seiner Richtung von einem gewissen Puncte, das statische Moment dieses Druckes für diesen Punct genannt.

Mit Beachtung der letzten Bemerkung sagt uns die Gleichung VI:

Der lothrechte Abstand Z des Endpunctes N einer freien Stützlinie vom Scheitel A ist gleich der Summe der statischen Momente aller Gewichte zwischen dem Scheitel A und dem Endpuncte N, bezogen auf den letztern, dividirt durch den Horizontalschub im Scheitel.

Die Summe der statischen Momente der Gewichte $\frac{1}{2} P_0$, P_1, P_2, $P_3 \ldots. P_{n-1}$, bezogen auf die Vertikale durch den Endpunct N, können wir auch mit

$$\Sigma (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots. P_{n-1})$$

darstellen, wodurch die Gleichung VI. übergeht in

$$Z = \frac{\Sigma (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots. P_{n-1})}{C}.$$

Der lothrechte Abstand des Endpunctes N der freien Stützlinie von ihrem Scheitel ist auch mit Z_n zu bezeichnen, wodurch man erhält

$$\text{VII. } Z_n = \frac{\Sigma(\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_n \ldots P_{n-1})}{C}.$$

Diese Gleichung mufs, mit Hinsicht auf ihre Entstehung, für jede beliebige Anzahl von Gewichten gelten, also bestehen:

$$Z_1 = \frac{\Sigma(\tfrac{1}{2} P_0)}{C},$$

$$Z_2 = \frac{\Sigma(\tfrac{1}{2} P_0 + P_1)}{C},$$

$$Z_3 = \frac{\Sigma(\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2)}{C},$$

$$Z_4 = \frac{\Sigma(\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3)}{C}$$

u. s. f.,

oder es sind mittels der Gleichung VII. die lothrechten Abstände der aufeinanderfolgenden Eckpuncte einer polygonalen freien Stützlinie von ihrem Scheitel zu finden.

Je kürzer die Seiten einer Stützlinie werden, also auch je näher die zu stützenden Gewichte an einander hängen, um so mehr nähert sich die Stützlinie einer stetig gekrümmten, und für stetig oder ohne Zwischenraum an einander gereihte Massen mufs die freie Stützlinie in der That in eine stetig gekrümmte Linie übergehen. Also:

> Während für einzelne zu stützende Gewichte die freie Stützlinie ein Polygon ist, mufs die freie Stützlinie für ohne Unterbrechung an einander gereihte Massen oder Gewichte eine stetig gekrümmte Linie sein.

Für stetig gekrümmte freie Stützlinien müssen auch alle die Gesetze gelten, welche wir in diesem Abschnitte für eine freie polygonale Stützlinie fanden und welche die mit römischen Ziffern bezeichneten Gleichungen darstellen.

Die Statik fester Körper nennt alle jene krumme Linien, welchen die oben angeführten und mit römischen Zahlen bezeichneten Gleichungen zugehören, Kettenlinien, weil eine Kette deren Gestalt angiebt, wenn man sie in derselben Weise stetig belastet. Zur nähern Erklärung fügen wir noch Folgendes bei:

Gesetzt, es sei die stetig gekrümmte Linie *MAN* Fig. 7 die freie Stütz-

linie für jene stetig an einander gereihten Massen, welche sich zwischen ihr und der Horizontale *mn*, etwa als unmittelbar an einander gereihte Stäbe befinden. Hängt man nun zwischen zwei Puncten M_1 und N_1 Fig. 8, welche denselben horizontalen und vertikalen Abstand von einander haben, als die Puncte M und N in Fig. 7, einen Faden von der Länge *MAN* Fig. 7 auf und belastet ihn mit denselben Stäben und in derselben Anordnung als in Fig. 7, dann nimmt der Faden $M_1\ A_1\ N_1$ genau dieselbe Krümmung, nur in umgekehrter Lage, an, welche die Stützlinie *MAN* Fig. 7 haben mufs.

Gleiche Länge gewöhnlicher eiserner Gliederketten haben nahezu gleiches Gewicht. Die Linie nun, welche eine in zwei Puncten A und B Fig. 9 aufgehangene Kette, von der gleiche Längen gleiches Gewicht haben, bildet, pflegt man die gemeine Kettenlinie zu nennen und eben diese mufs die freie Stützlinie $A_1\ B_1$ Fig. 10 für einen Bogen sein, von welchem gleiche Längen gleiches Gewicht mit der Kette haben oder, die gemeine Kettenlinie giebt die mittlere Richtung an, nach der ein sich frei tragender Bogen gebaut werden mufs, der in gleichen Längen gleiches Gewicht hat.

Die eben gemachten Andeutungen über die mechanische Beschreibung oder Entstehung der freien Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen giebt uns eine ziemlich klare Einsicht in die sehr verschiedenen Formen, welche eine Kettenlinie, je nach ihrer Belastung, je nach ihrer Länge und je nach der Lage ihrer Endpuncte annehmen kann.

Viele Baumeister haben die Ansicht, eine gemeine Kettenlinie sei die mittlere Richtung, die ein Wölbbogen haben müsse, um sein eigenes Gewicht und das über ihm befindlicher Massen am zuverlässigsten stützen zu können. Diese Ansicht ist eine sehr irrige, wie wir später gründlich und verständlich darzuthun hoffen, aber doch häufig in der Praxis befolgt worden. Entsprechen in genannter Weise construirte und ausgeführte Wölbbögen ihrer Bestimmung, d. h. brechen sie nicht minder, so ist dieses Ergebnifs weit entfernt die Richtigkeit der oben erwähnten Ansicht über die Eigenschaften der gemeinen Kettenlinie als wahr zu bezeichnen, denn noch viele andere krumme Linien würden den nämlichen Erfolg gewährt haben.

An das Vorstehende reiht sich eine uns gewordene Mittheilung des Inhaltes an, dafs die mittlern Richtungen oder Krümmungen der

Brückenbögen für eine deutsche Eisenbahn ebenfalls auf mechanischem Wege construirt wurden, indem man einen Faden in zwei Puncten A und B Fig. 11 aufhing und denselben in gleichen horizontalen Abständen mit Prismen von gleichem Material und gleichen Querschnittsflächen belastete, und deren untere Begrenzung CD nach der Form der herzustellenden Brückenbahn, die für Eisenbahnen immer horizontal ist, regelte. Diese Constructionsmethode, mit gehöriger Sorgfalt durchgeführt, gewährt allerdings nahezu die krumme Linie eines Brückenbogens, die der Masse, welche derselbe zu stützen hat, als freie Stützlinie zugehört. Doch es giebt einen viel kürzern Weg, wie wir später zeigen werden, auf welchem das in vorbemerkter Weise annähernd bestimmte Resultat sich mit beliebiger Genauigkeit erreichen läfst.

Am Schlusse des gegenwärtigen Abschnittes wollen wir die Gesetze der freien Stützlinie zur Lösung zweier Aufgaben benutzen.

Erste Aufgabe. Für eine polygonale Stützlinie sei der Richtungswinkel jeder der zwei im Scheitel A zusammenlaufenden Polygonseiten Fig. 5 $\alpha_1 = 10^0$; ferner seien dis Richtungswinkel der Polygonseiten BC, CD, DF u. s. f. $\alpha_2 = 20^0$, $\alpha_3 = 30^0$, $\alpha_4 = 40^0 \ldots\ldots \alpha_n = \alpha_6 = 60^0$, und der Scheitel A endlich sei mit P_0 belastet. Bestimmt sollen werden: die Gewichte P_1, $P_2 \ldots\ldots$, der Horizontaldruck im Scheitel, der Druck, den jede Stützlinie nach ihrer Richtung erleidet, und endlich der Horizontal- und der Vertikaldruck, den das Ende N der Stützlinie gegen seine Unterlage äufsert.

Nach I. auf Seite 12 ist
der Horizontaldruck im Scheitel

$$C = \tfrac{1}{2} P_0 \, cotg \, 10^0 = 2{,}8356 \, P_0,$$

ferner nach II. auf Seite 15

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} P_0 &&= \tfrac{1}{2} P_0 &&= 0{,}5 \, P_0,\\
&\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 &&= 2{,}8356 \, P_0 \, tg \, 20^0 &&= 1{,}0320 \, P_0,\\
&\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 &&= 2{,}8356 \, P_0 \, tg \, 30^0 &&= 1{,}6371 \, P_0,\\
&\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 &&= 2{,}8356 \, P_0 \, tg \, 40^0 &&= 2{,}3793 \, P_0,\\
&\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 &&= 2{,}8356 \, P_0 \, tg \, 50^0 &&= 3{,}3793 \, P_0,\\
&\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 &&= 2{,}8356 \, P_0 \, tg \, 60^0 &&= 4{,}9114 \, P_0.
\end{aligned}$$

Durch Subtraction der auf einander folgenden Gleichungen wird

$$P_1 = 0{,}5320\,P_0,$$
$$P_2 = 0{,}6051\,P_0,$$
$$P_3 = 0{,}7422\,P_0,$$
$$P_4 = 1\,P_0,$$
$$P_5 = 1{,}5321\,P_0.$$

Der Horizontaldruck im Endpuncte N der Stützlinie ist

$$H = C = 2{,}8356\,P_0,$$

der Vertikaldruck eben daselbst

$$V = \tfrac{1}{2}P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 4{,}9114\,P_0.$$

Endlich mit Beziehung auf die Gleichung III. auf Seite 16, der Druck, den erleidet

die erste Polygonseite $D_1 = \frac{C}{\cos\alpha_1} = \frac{C}{\cos 10^0} = 2{,}8794\,P_0,$

„ zweite „ $D_2 = \frac{C}{\cos 20^0} = 3{,}0176\,P_0,$

„ dritte „ $D_3 = \frac{C}{\cos 30^0} = 3{,}2742\,P_0,$

„ vierte „ $D_4 = \frac{C}{\cos 40^0} = 3{,}7016\,P_0,$

„ fünfte „ $D_5 = \frac{C}{\cos 50^0} = 4{,}4114\,P_0,$

„ sechste „ $D_6 = \frac{C}{\cos 60^0} = 5{,}6712\,P_0.$

Zweite Aufgabe. Es sollen Balken von gleicher Länge und jeder vom Gewichte p dergestalt in Form eines Polygons $MABC \ldots N$ Fig. 5 an einander gestellt werden, dafs sie ihre Gewichte gegenseitig stützen und am Scheitel A einen Winkel $MAB = 120^0$ einschliefsen. Man wünscht zu wissen

1) welche Richtungswinkel α_2, α_3, $\alpha_4 \ldots$ den Balken zu geben sind?
2) wie grofs der Horizontaldruck im Scheitel A ist? und
3) welchen Druck die vom Scheitel aus niedergehenden Balken erleiden?

Hat ein Balken in gleichen Längen gleiches Gewicht, was in der vorstehenden Aufgabe vorausgesetzt ist, und man unterstützt

einen solchen nur in seinen Endpuncten, dann trägt jeder Stützpunct das halbe Gewicht des Balkens. Demnach ist die Belastung

im Scheitel gleich dem halben Gewicht des Balkens *AM*
und „ „ „ „ „ „ *AB*,
also $P_0 = \frac{1}{2} p + \frac{1}{2} p = p$,

die Belastung des Punctes *B* gleich
dem halben Gewichte des Balkens *BA* und
„ „ „ „ „ *BC*, also
$$P_1 = \frac{1}{2} p + \frac{1}{2} p = p.$$

Ebenso findet sich
$$P_2 = p,$$
$$P_3 = p \text{ u. s. f.}$$

Der Richtungswinkel α_1 eines der Balken, die sich im Scheitel vereinigen, ist
$$90 - \frac{120}{2} = 30^0 = \alpha_1 \text{ und}$$
der Horizontaldruck im Scheitel
$$C = \frac{1}{2} P_0 \, cotg\, \alpha_1 = \frac{1}{2} p \, cotg\, 30^0 = 0{,}8660\, p.$$

Ferner ist nach Formel II. Seite 15 allgemein
$$tg\, \alpha_n = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + \ldots P_{n-1}}{C} \text{ d. g.,}$$
$$tg\, \alpha_2 = \frac{1\frac{1}{2} p}{\frac{1}{2} p \; cotg\, 30^0} = 3\, tg\, 30^0 = 1{,}7321;$$
wozu gehört $\alpha_2 = 60^0$,
$$tg\, \alpha_3 = \frac{2{,}5\, p}{\frac{1}{2} p \; cotg\, 30^0} = 5\, tg\, 30^0 = 2{,}8867;$$
wozu gehört $\alpha_3 = 70^0\, 54'$,
$$tg\, \alpha_4 = \frac{3{,}5\, p}{\frac{1}{2} p \; cotg\, 30^0} = 7\, tg 30^0 = 4{,}0414;$$
wozu gehört $\alpha_4 = 76^0\, 6'$.

Endlich ist der Druck in der
$$\text{ersten Polygonseite } D_1 = \frac{C}{cos\, \alpha_1} = p,$$

der Druck in der

zweiten Polygonseite $D_2 = \frac{C}{\cos \alpha_2} = 1{,}7320\, p$,

dritten „ $D_3 = \frac{C}{\cos \alpha_3} = 2{,}6467\, p$,

vierten „ $D_4 = \frac{C}{\cos \alpha_4} = 3{,}6050\, p$.

Fünfter Abschnitt.

Gesetze der vorgeschriebenen Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung.

Die Bedingungen, unter welchen ein Polygon *MABCD* *N* Fig. 5 für in seinen Ecken aufgehangene Gewichte eine freie Stützlinie ist, haben wir im vorgehenden Abschnitte festgestellt. Sie bestehen in bestimmten Beziehungen zwischen den Gewichten und den Richtungswinkeln der Polygonseiten und entspringen daraus, dafs die von jedem Gewichte z. B. P_2 auf die stützenden Polygonseiten geübten Drucke *Ck* und *Cl* gleich grofse Gegendrücke *Be* und *Dq*, von den angrenzenden Gewichten hervorgebracht, finden müssen.

Das Polygon *MABCD* *N*, das für gewisse Gewichte P_0, P_1, P_2, ... P_{n-1} eine freie Stützlinie ist, hört auf eine solche zu sein, wenn eins der Gewichte, z. B. P_0, im Scheitel vergröfsert wird, denn es ist dann nicht mehr der Druck *Ab* von *A* nach *B* in der ersten Polygonseite gleich dem Drucke *Bd* von *B* nach *A* hin, sondern es wird ein Ueberdruck

$$Bi = Ab - Bd$$

in der Richtung von *A* nach *B* hin im Eckpuncte *B* entstehen.

Die Ebene hinter der Stützlinie können und wollen wir uns so denken, dafs sie einem Drucke, wie der eben angeführte Ueber-

druck Bi ist, in jeder Ecke die erforderliche Stützung gewährt oder, dafs die Ecke B des Polygons in der Richtung der niedersteigenden Seite AB, die Ecke C in der Richtung BC, die Ecke D in der Richtung CD u. s. f. hinterstützt werde.

Nächstdem und zwar zur Verallgemeinerung der Lösung vorliegender Aufgabe, wollen wir uns noch jeden Eckpunct des stützenden Polygons an die hinter demselben befindliche Ebene so angeheftet denken, dafs auch der auf einen solchen kommende Druck nach der Richtung der zugehörenden aufsteigenden Polygonseite von der Hinterstützungsebene gehalten werde. In Folge der zuletzt erwähnten Verbindung jeder Ecke des stützenden Polygons mit der Hinterstützungsebene, wird, wenn z. B. der von B nach A hin gerichtete Druck gröfser sein sollte als der von A nach B hin gehende, der entstehende Ueberdruck

$$Bd - Ab$$

schon in B von der hinter dem Polygon befindlichen Hinterstützungslinie aufgenommen, also dessen Fortpflanzung von B durch die Seite AB bis zu A hin verhindert.

Ein Ueberdruck, wie ein solcher für die Polygonseite AB Fig. 5 im Eckpuncte B von der Gröfse Bi in niedersteigender Richtung denkbar ist, kann in gleicher Weise auch in allen übrigen Eckpuncten der Stützlinie vorhanden sein. Dieser Ueberdruck sei

für die Seite BC in deren Richtung von B nach C hin

$$Cp = Be - Ck,$$

für die Seite CD in der Richtung von C nach D hin

$$Dv = Cl - Dq \text{ u. s. f.}$$

Das Bestehen einer vorgeschriebenen Stützlinie fordert durchaus nicht, dafs der Ueberdruck jeder Polygonseite nach der niedersteigenden Richtung derselben gehe. Indem wir diefs im Vorstehenden annahmen, dachten wir an die anzuschliefsende Rechnung. Für diese ist eine bestimmte Richtung des Ueberdruckes vorauszusetzen, ohne die entgegengesetzte auszuschliefsen. Wir bezeichnen die erste oder niedersteigende Richtung als die vorherrschende mit $+$, dagegen die aufwärts gerichtete des Ueberdruckes mit $-$.

Die so eben gemachte Bemerkung berechtigt uns

$$
(1)\begin{cases}
\text{den Ueberdruck in } B \text{ zu } Bi = Ab - Bd = t_1, \\
\quad\text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,}\ C \text{ ,, } Cp = Be - Ck = t_2, \\
\quad\text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,}\ D \text{ ,, } Dv = Cl - Dq = t_3 \text{ u. s. f.}
\end{cases}
$$

anzunehmen.

Die der polygonalen Stützlinie Fig. 5 zugehörende Hinterstützungsebene möge mit der Vertikale *NY* durch den Endpunct *N* jener enden. Dieses Ende trifft der Ueberdruck t_1 der Ecke *B* in B_2, der Ueberdruck t_2 der Ecke *C* in C_2 u. s. f. Die Aeufserung des Ueberdruckes t_1 in B_2 kann durch einen Horizontaldruck h_1 und durch einen Vertikaldruck v_1 eben daselbst ersetzt werden. Dasselbe gilt auch von dem Ueberdruck t_2 im Puncte C_2, er kann nämlich hier durch einen Horizontaldruck h_2 und durch einen Vertikaldruck v_2 vertreten werden u. s. f.

Die bereits oben festgestellte Verbindung jeder Ecke der Stützlinie mit der hinter der letztern gedachten Ebene bedingt, wie auch die beiden auf eine Seite z. B. *BC* fallenden Drücke *Be* und *Ck* beschaffen sein mögen, dafs eben diese Seite und ähnlich jede andere, nur mit *Be* oder mit dem niederwärts gerichteten Drucke der nämlichen Seite belastet auftritt. Offenbar ist diefs der Fall, wenn *Be* gröfser als *Ck* ist, denn es geht der Druck *Be* von *B* bis *C* nieder, wo ihm der geringere entgegentritt, der nichts als die Verminderung des Ueberdrucks bewirkt. Ist dagegen *Ck* gröfser als *Be*, dann wird sich ebenfalls nur *Be* von *B* nach *C* hin fortpflanzen, weil der von *C* nach *B* hin gerichtete Ueberdruck

$$Ck - Be$$

schon in *C* von der Hinterstützungsebene, gemäfs der Voraussetzung, aufgenommen wird. Somit ist der Druck, den nach ihrer Richtung hin erleidet

$$
(2)\begin{cases}
\text{die Stützlinie } AB \text{ gleich } Ab = D_1, \\
\quad\text{,,} \quad \text{,,} \quad BC \quad \text{,,} \quad Be = D_2, \\
\quad\text{,,} \quad \text{,,} \quad CD \quad \text{,,} \quad Cl = D_3, \\
\quad\text{,,} \quad \text{,,} \quad DF \quad \text{,,} \quad Dr = D_4
\end{cases}
$$

u. s. f.

Was wir über den Horizontaldruck im Scheitel *A* des Polygons Fig. 5, mit welchem sich die Polygonseiten daselbst gegen einander lehnen, bei Gelegenheit der Bestimmung der Gesetze einer freien Stützlinie auf Seite 12 erörterten, das gilt völlig ungeändert auch

für eine vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung, weil die beiden den Scheitel bildenden Polygonseiten auch jetzt, wie bei der freien Stützlinie, gleiche Richtung zu einer Vertikale haben sollen.

Ebenfalls wie bei der freien Stützlinie wird sich der Druck D_n, den die letzte Seite der vorgeschriebenen Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung gegen ihren Stützpunct N übt, ersetzen lassen.

$$(3)\begin{cases}\text{durch einen Horizontaldruck } NK = H \text{ und} \\ \text{,, \quad ,, \quad Vertikaldruck } NG = V.\end{cases}$$

Behufs der Verallgemeinerung der bisherigen Erörterungen über die vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung und behufs der scharfen Abgrenzung der aus denselben zu ziehenden Schlüsse, führen wir nun die nöthige Rechnung ein.

Zuerst ist, weil der Horizontaldruck im Scheitel der vorliegenden Stützlinie dem einer freien gleich ist, nach I. Seite 12, der Horizontaldruck im Scheitel A

$$\text{I.} \quad C = \tfrac{1}{2} P_0 \, cotg \, \alpha_1.$$

Die in (1) aufgeführten Ueberdrücke in den Eckpuncten B, C, D der vorgeschriebenen Stützlinie geben mit Einführung der trigonometrischen Werthe aus (6) Seite 14

$$t_1 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0}{sin \, \alpha_1} - \frac{P_1 \cos \alpha_2}{sin \, (\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$t_2 = \frac{P_1 \cos \alpha_1}{sin \, (\alpha_2 - \alpha_1)} - \frac{P_2 \cos \alpha_3}{sin \, (\alpha_3 - \alpha_2)},$$

$$t_3 = \frac{P_2 \cos \alpha_2}{sin \, (\alpha_3 - \alpha_2)} - \frac{P_3 \cos \alpha_4}{sin \, (\alpha_4 - \alpha_3)} \quad \text{u. s. f.}$$

Der in der letzten oder $(n-1)^{ten}$ Polygonecke stattfindende Ueberdruck ist hiernach

$$(4) \quad t_{n-1} = \frac{P_{n-2} \cos \alpha_{n-2}}{sin \, (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})} - \frac{P_{n-1} \cos \alpha_n}{sin (\alpha_n - \alpha_{n-1})}.$$

Die Ueberdrücke gehen in ihrer Richtung durch die Hinterstützungsebene bis zur vertikalen Begegnung NY der letztern fort. Hier aber kann jeder dieser Drücke, wie wir bereits oben gesehen haben, durch einen Vertikaldruck und durch einen Horizontaldruck ersetzt werden. Nun giebt

der Ueberdruck t_1 bei B_2

den Horizontaldruck

$$h_1 = t_1 \cos \alpha_1 = \tfrac{1}{2} P_0 \operatorname{cotg} \alpha_1 - \frac{P_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_2 - \alpha_1)} \text{ und}$$

den Vertikaldruck

$$v_1 = t_1 \sin \alpha_1 = \tfrac{1}{2} P_0 - \frac{P_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1}{\sin (\alpha_2 - \alpha_1)};$$

der Ueberdruck t_2 bei C_2

den Horizontaldruck

$$h_2 = t_2 \cos \alpha_2 = \frac{P_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{(\sin \alpha_2 - \alpha_1)} - \frac{P_2 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{\sin (\alpha_3 - \alpha_2)} \text{ und}$$

den Vertikaldruck

$$v_2 = t_2 \sin \alpha_2 = \frac{P_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin (\alpha_2 - \alpha_1)} - \frac{P_2 \cos \alpha_3 \sin \alpha_2}{\sin (\alpha_3 - \alpha_2)};$$

der Ueberdruck t_3 bei D_2

den Horizontaldruck

$$h_3 = t_3 \cos \alpha_3 = \frac{P_2 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3}{\sin (\alpha_3 - \alpha_2)} - \frac{P_3 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4}{\sin (\alpha_4 - \alpha_3)} \text{ und}$$

den Vertikaldruck

$$v_3 = t_3 \sin \alpha_3 = \frac{P_2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3}{\sin (\alpha_3 - \alpha_2)} - \frac{P_3 \sin \alpha_3 \cos \alpha_4}{\sin (\alpha_4 - \alpha_3)} \text{ u. s. f.}$$

Der Ueberdruck t_{n-1} in O giebt bei O_2

den Horizontaldruck

$$h_{n-1} = \frac{P_{n-2} \cos \alpha_{n-2} \cos \alpha_{n-1}}{\sin (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})} - \frac{P_{n-1} \cos \alpha_{n-1} \cos \alpha_n}{\sin (\alpha_n - \alpha_{n-1})} \text{ und}$$

den Vertikaldruck

$$v_{n-1} = \frac{P_{n-2} \cos \alpha_{n-2} \sin \alpha_{n-1}}{\sin (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2})} - \frac{P_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \cos \alpha_n}{\sin (\alpha_n - \alpha_{n-1})}.$$

Durch Summirung der vorstehenden Werthe wird, wenn wir die Summe aller aus den Ueberdrücken entstehenden Horizontaldrücke mit

$$(s. h_{n-1})$$

und die Summe aller aus den Ueberdrücken folgenden Vertikaldrücke mit

$$(s.\, v_{n-1})$$

bezeichnen,

$$\text{II.}\quad (s.\, h_{n-1}) = C - \frac{P_{n-1} \cos \alpha_{n-1} \cos \alpha_n}{\sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})} \quad \text{und}$$

$$\text{III.}\quad (s.\, v_{n-1}) = \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_{n-2} - \frac{P_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \cos \alpha_n}{\sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})}.$$

Die zuletzt bestimmten zwei Formeln lehren uns:

dafs die Summe der aus sämmtlichen Ueberdrücken entstehenden Horizontaldrücke kleiner als der Horizontaldruck im Scheitel und

dafs die Summe der aus sämmtlichen Ueberdrücken entstehenden Vertikaldrücke kleiner als die Summe der Gewichte ist, welche die Stützlinie zwischen dem Scheitel und dem Endpuncte trägt.

Unter (2) des gegenwärtigen Abschnittes sind die Drücke angegeben, welche die einzelnen Seiten einer vorgeschriebenen Stützlinie Fig. 5 bei tangentialer Hinterstützung durch sich hindurch leiten, oder mit welchem jede in ihrer Richtung belastet ist. Setzen wir die zugehörenden trigonometrischen Werthe für diese Drücke, wie sie auf Seite 14 bemerkt sind, so ergiebt sich

der Druck für die Seite *AB* zu

$$D_1 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0}{\sin \alpha_1},$$

der Druck für die Seite *BC* zu

$$D_2 = \frac{P_1 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

der Druck für die Seite *CD* zu

$$D_3 = \frac{P_2 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \quad \text{u. s. f.}$$

folglich der Druck, den die letzte oder n^{te} Seite *ON* der Stützlinie nach ihrer Richtung hin erleidet, zu

$$\text{IV.}\quad D_n = \frac{P_{n-1} \cos \alpha_{n-1}}{\sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})}.$$

Nach (3) dieses Abschnittes kann der zuletzt gefundene Druck am Endpuncte *N* der Stützlinie durch einen Horizontal- und durch

einen Vertikaldruck ersetzt werden. Der aus D_n entspringende Horizontaldruck aber ist

$$\text{V. } H = D_n \cos \alpha_n = \frac{P_{n-1} \cos \alpha_{n-1} \cos \alpha_n}{\sin (\alpha_n - \alpha_{n-1})},$$

und der ebenfalls aus D_n folgende Vertikaldruck

$$\text{VI. } V = D_n \sin \alpha_n = \frac{P_{n-1} \cos \alpha_{n-1} \sin \alpha_n}{\sin (\alpha_n - \alpha_{n-1})}.$$

Der gesammte Horizontaldruck, den eine vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung gegen eine hinter ihr liegende Vertikale übt, mufs der Summe der Horizontaldrücke aus II. und V. gleich sein. Diese Summe, die ähnlich der Bezeichnung in II., durch $(s.\ h_n)$ ausgedrückt, sein soll, ist

$$\text{VII. } s.\ h_n = C, \text{ d. h.:}$$

der gesammte Horizontaldruck, den eine vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung vom Scheitel bis mit zum Endpuncte gegen eine Vertikale äufsert, ist, wie bei der freien Stützlinie, dem Horizontaldruck im Scheitel gleich.

Der gesammte Vertikaldruck $(s.\ h_{n-1})$, der aus den Ueberdrücken entspringt, und der Vertikaldruck V, der aus dem Drucke D_n in der Richtung der letzten Stützseite folgt, müssen zusammen den Vertikaldruck geben, der überhaupt entsteht und in die Richtung einer Vertikale hinter dem, oder durch den Punct N fällt. Aehnlich der Darstellung in III. ist die Summe dieser Drücke, nämlich die der Gleichungen IV. und VI., durch $s.\ v_n$ zu bezeichnen und es wird

$$\text{VIII. } (s.\ v_n) = \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_{n-1} + P_n, \text{ d. h.}$$

Der gesammte Vertikaldruck, der von einer vorgeschriebenen Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung in der Richtung einer Vertikale durch den oder hinter dem Endpuncte N derselben gebildet wird, ist, wie bei der freien Stützlinie, der Summe aller Gewichte gleich, welche die vorgeschriebene Stützlinie zwischen dem Scheitel und dem Endpuncte trägt.

Es unterliegt keinem Zweifel, dafs alle Drücke, welche von einer gegebenen Stützlinie aus in die Hinterstützungsebene fallen, durch einen Druck gestützt oder durch einen Druck vertreten werden können. Für die vorgeschriebene Stützlinie Fig. 5 mit tan-

gentialer Hinterstützung sei T die Gröfse des Druckes, der alle in die Hinterstützungsebene übergehenden Drücke, als deren Gesammtwirkung, vertritt, ferner sein Richtungswinkel gleich β und X der Durchschnittspunct der Richtung eben dieses Druckes mit der Vertikale durch den Endpunct N der Stützlinie. Wenn aber T die Gesammtwirkung aller in die Vertikal-Linie NY übergehenden Drücke ersetzt, dann mufs der aus eben diesem Drucke

$$T = XR$$

entspringende Horizontaldruck XU der Summe aller Horizontaldrücke, nämlich

$$XU = (s.\, h_n),$$

und der aus eben diesem Drucke folgende Vertikaldruck der Summe sämmtlicher Vertikaldrücke, nämlich

$$XS = (s.\, v_n)$$

sein. Nun ist

$$XU = T \cos \beta;\ XS = T \sin \beta \text{ d. g.}$$

$$T \cos \beta = (s.\, h_n),$$

$$T \sin \beta = (s.\, v_n)$$

oder, wenn die obenstehenden Werthe eingesetzt werden,

$$\text{IX.} \begin{cases} T \cos \beta = C, \\ T \sin \beta = \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_n, \text{ also auch} \\ T = \dfrac{\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots + P_n}{\sin \beta}, \\ C \operatorname{tg} \beta = \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots + P_n \end{cases}$$

Mit Hinsicht auf Abschnitt 4 Seite 15 zeigen uns die vorstehenden Formeln,

dafs der Mitteldruck T für alle in die Hinterstützungsebene übergehenden Drücke dieselbe Richtung hat, welche der letzten Seite der den Drücken $\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_n$ zugehörenden freien Stützlinie entspricht, und dafs der Mitteldruck T jenem gleich ist, der in der Richtung der letzten Seite der den Gewichten

$$\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots + P_n$$

zugehörenden freien Stützlinie statthat.

Die vorstehenden Beziehungen deuten darauf hin, dafs X der Endpunct einer freien Stützlinie für die Gewichte

$$\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots . + P_n$$

ist, die mit der vorgeschriebenen im Scheitel zusammenfällt, also mit der letztern gleichen Horizontalschub hat. Und so ist es denn auch, wie wir gleich näher darthun wollen.

Wenn die Ueberdrücke t_1, t_2, t_3 durch die Hinterstützungsebene bis zur Vertikale durch N gegangen sind, so können sie daselbst und zwar in den Puncten B_2, C_2, D_2 O_2 durch die Vertikaldrücke v_1, v_2, v_3 v_{n-1}, und durch die Horizontaldrücke h_1, h_2, h_3 h_{n-1} ersetzt werden. Der in der Richtung der letzten Stützseite geübte Druck gegen die Vertikale durch N ist ebenfalls durch einen Horizontaldruck H und durch einen Vertikaldruck T V zu vertreten. Weil T der Mitteldruck für sämmtliche in die Hinterstützungsebene übergehenden Drücke sein soll, so mufs der Punct X, in welchem derselbe die Vertikale durch N schneidet, nach Gründen der Statik einen solchen Abstand XT von der Horizontale durch den Scheitel A haben, dafs das statische Moment des aus T folgenden Horizontaldruckes

$$T \cos \beta = C$$

bezogen auf Y, gleich der Summe der statischen Momente aller Horizontaldrücke ist, die sich aus den Drücken absetzen, welche durch NY hindurch gehen.

d. g.

$$(5)\quad C \times YX = h_1 \times YB_2 + h_2 \times YC_2 + h_3 \times YD_2 \ldots . + h_{n-1} \times YO_2 + D_n \cos \alpha_n \times YN.$$

Die Längen der Polygonseiten AB, BC, CD ON mögen aufeinanderfolgend sein

$$l_1, l_2, l_3, l_4 \ldots . l_n,$$

dann ist

der vertikale Abstand des Punctes B von A gleich

$$l_1 \sin \alpha_1,$$

der horizontale Abstand des Scheitels A vom Endpuncte N gleich

$$l_1 \cos_1 + l_2 \cos \alpha_2 \ldots . + l_n \cos \alpha_n,$$ folglich

der vertikale Abstand des Punctes B_2 vom Scheitel A

$$YB_2 = l_1 \sin \alpha_1 + (l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 \ldots . + l_n \cos \alpha_n) \, tg \, \alpha_1,$$

der vertikale Abstand des Punctes C_2 vom Scheitel A

$$YC_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + (l_3 \cos \alpha_3 + l_4 \cos \alpha_4 \ldots . + l_n \cos \alpha_n) \, tg \, \alpha_2,$$

der vertikale Abstand des Punctes D_2 vom Scheitel A

$$YD_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 + (l_4 \cos \alpha_4 + l_5 \cos \alpha_5 \ldots + l_n \cos \alpha_n) \, tg \, \alpha_3$$

u. s. f.,

also auch der vertikale Abstand des Punctes O^- vom Scheitel A

$$YO_2 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 \ldots + l_{n-1} \sin \alpha_{n-1} + l_n \cos \alpha_n \, tg \, \alpha_{n-1}$$

und der vertikale Abstand des Punctes N vom Scheitel

$$YN = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3 \ldots + l_{n-1} \sin \alpha_{n-1} + l_n \sin \alpha_n.$$

Setzt man nun die eben gefundenen Werthe, ferner die für h_1, h_2, $h_3 \ldots h_{n-1}$ und den Werth für D_n von Seite 29 in die obenstehende Gleichung (5) ein, führt die Multiplicationen aus und ordnet gehörig, so erhält man die Endgleichung

$$\text{X.} \quad C \times YX = \begin{cases} \frac{1}{2} P_0 \, \{ l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 \ldots + l_n \cos \alpha_n \} \\ + P_1 \, \{ \quad l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 \ldots + l_n \cos \alpha_n \} \\ + P_2 \, \{ \quad l_3 \cos \alpha_3 \ldots + l_n \cos \alpha_n \} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + P_{n-1} \, l_n \cos \alpha_n \end{cases}$$

In der vorstehenden Gleichung sind die Factoren von $\frac{1}{2} P_0$, P_1, P_2, $P_3 \ldots P_{n-1}$ die horizontalen Abstände dieser Gewichte vom Puncte X oder von der Vertikale durch N; demnach ist der zweite Theil dieser Gleichung mit demselben Theile der Gleichung IV. des Abschnittes 4 Seite 18 übereinstimmend, also, in Beziehung auf die oben genannte Gleichung,

$$C \times YX = C \times Z \text{ d. g.}$$

$$YX = Z, \text{ d. h.}$$

der Punct X in der Vertikale durch den Endpunct einer vorgeschriebenen Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung, in welchem der Mittelpunct für alle in die Hinterstützungsebene übergehenden Drücke die genannte Vertikale durchschneidet, ist **der Endpunct** der den Gewichten

$$\frac{1}{2} P_0 + P_1, + P_2 \ldots + P_{n-1}$$

zugehörenden freien Stützlinie, welche mit der vorgeschriebenen im Scheitel zusammenfällt, folglich auch mit dieser eben daselbst gleichen Horizontaldruck hat.

Fassen wir die vorstehenden auf den Mitteldruck T einer vorgeschriebenen Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung be-

züglichen Erörterungen zusammen, so erhalten wir als Gesammtresultat:

Sämmtliche Drücke, die von einer vorgeschriebenen Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung gegen die Hinstützungsebene zu Stande kommen, werden, der Gröfse und Lage nach, durch den Druck am Ende jener freien Stützlinie vertreten, welche den gestützten Gewichten zugehört, und welche mit der vorgeschriebenen Stützlinie im Scheitel zusammenfällt.

Bezeichnen wir auch hier, wie im 4ten Abschnitte Seite 18, die Summe der statischen Momente sämmtlicher Gewichte $\frac{1}{2} P_0$, P_1, P_2 P_{n-1}, bezogen auf die Vertikale durch N, mit

$$\Sigma (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots\ldots P_{n-1}),$$

den Horizontaldruck im Scheitel der vorgeschriebenen Stützlinie mit C und den lothrechten Abstand des Endpunctes X in der Vertikale durch N mit Z_n, so erhalten wir, wie auf Seite 18,

$$\text{XI.}\quad Z_n = \frac{\Sigma (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots\ldots P_{n-1})}{C}.$$

Mit dieser Gleichung wird aber nicht blofs der Punct X der freien Stützlinie über dem Endpuncte N der vorgeschriebenen, sondern auch jeder andere Punct derselben zu bestimmen sein; so erhält man für jenen Punct der freien Stützlinie, der in der Vertikale durch das Gewicht P_4 liegt,

$$Z_4 = \frac{\Sigma (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3)}{C}.$$

Die Tangente des Richtungswinkels β_n, welcher dem Puncte der freien Stützlinie in der Vertikale durch N zugehört, ist

$$\text{XII.}\quad tg\, \beta_n = \frac{\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots\ldots P_{n-1}}{C},$$

und eben so ist der Richtungswinkel der Seite, die in der lothrechten Ebene durch P_4 endet,

$$tg\, \beta_4 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3}{C}.$$

Für unendlich nahe, also für stetig an einander gereihte Massen mufs eine vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung in eine stetig gekrümmte Linie übergehen oder, ste-

tig an einander gereihten Massen kann nur eine stetig gekrümmte Linie als vorgeschriebene Stützlinie bei tangentialer Hinterstützung entsprechen. Alle Gesetze, welche wir für eine polygonale Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung fanden, müssen, ohne alle Aenderung, auch für stetig gekrümmte Stützlinien gelten.

Bei einer stetig gekrümmten Stützlinie hat der Ueberdruck eines jeden Punctes die Richtung der zugehörenden Tangente. In eben dieser Richtung soll die Hinterstützungsebene bei der im gegenwärtigen Abschnitte betrachteten Stützlinie den Ueberdruck aufnehmen, d. h. die stetig gekrümmte Stützlinie soll in jedem ihrer Puncte tangential hinterstützt sein. Die gewählte Benennung: vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstüzung, rechtfertigt sich somit für stetig gekrümmte Stützlinien, erscheint aber für polygonale unpassend. Wir behielten indefs die Benennung tangential auch für polygonale Stützlinien bei, weil wir die letztern hauptsächlich nur in der Absicht betrachteten, um die Gesetze der stetig gekrümmten Stützlinien mit tangentialer Hinterstützung bequem ableiten zu können.

Sechster Abschnitt.

Gesetze der vorgeschriebenen Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung.

Den Unterschied, den wir zwischen einer freien und einer vorgeschriebenen Stützlinie machen, haben wir bereits im vorgehenden Abschnitte angegeben: er besteht, um ihn noch einmal anzuführen, darin, dafs bei der freien polygonalen Stützlinie die auf je eine Stützecke nach entgegengesetzter Richtung hin einwirkenden Drücke gleich sind, was bei der vorgeschriebenen polygonalen Stützlinie entweder für keine Ecke, oder doch nicht für alle, stattfindet. Für jeden Eckpunct der letztern haben wir einen Ueberdruck vorausgesetzt und dessen Richtung im Allgemeinen nach der niederstei-

genden Richtung der Stützseite angenommen, welcher eben dieser Ueberdruck zugehört, ohne die entgegengesetzte Richtung auszuschliefsen; denn in der Rechnung wird der Druck in niedersteigender Richtung mit +, der in aufsteigender aber mit — bezeichnet.

Bei der vorgeschriebenen Stützlinie mufs der in jeder Ecke entstehende Ueberdruck von einer Hinterstützungsebene allein, oder doch mit gestützt werden. Im vorgehenden Abschnitte oder, für die vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung, nahmen wir die Hinterstützung in der Richtung des Ueberdruckes, also eine vollständige Aufnahme des letztern durch die Hinterstützungsebene an, jetzt aber wollen wir voraussetzen,

der in jeder Ecke der polygonalen Stützlinie Fig. 5 entstehende Ueberdruck könne von der Hinterstützungsebene nicht direct, sondern nur in h o r i z o n t a l e r R i c h t u n g mit gestützt werden oder, jeder Eckpunct, z. B. *B*, stehe mit der Hinterstützungsebene in einer Verbindung, welche einen Horizontaldruck oder Zug dieses Punctes, und ebenso den jeder andern Ecke, gegen die Vertikale durch *N* hin, jedoch weder einen Druck noch einen Zug nach einer andern Richtung hin, in sich aufnimmt. Und eine Stützlinie, deren Eckpuncte in der eben bezeichneten Weise durch die Hinterstützungsebene gestützt werden, heifse eine vorgeschriebene Stützlinie mit h o r i z o n t a l e r H i n t e r s t ü t z u n g.

Der Ueberdruck, z. B. *Bi* der Seite *AB* Fig. 5, nach der niedersteigenden Richtung eben dieser Seite kann durch zwei Seitendrücke *Bg* und *Bh* ersetzt werden, von welchen der erste in die Richtung der an *AB* sich anlehnenden Stützseite, der andere aber in die Richtung der Horizontale durch *B* fällt. Die Gröfse dieser Seitendrücke selbst wird für *Bi* erhalten, wenn man aus *B* ein Parallelogramm beschreibt, dem *Bi* als Diagonale zugehört und von welchem zwei Seiten, wie *Bh* und *ig*, horizontal, die zwei andern aber, nämlich *Bg* und *hi*, parallel mit *BC* sind. Dieselbe Zerlegung ist auch dann noch möglich, wenn der Ueberdruck einer Seite nicht nach der niedersteigenden, sondern nach der aufsteigenden Richtung der letztern geht. Hierbei ändert sich nur die Richtung der Seitendrücke oder, statt des Druckes *Bg*, wenn z. B. der Ueberdruck der Seite *AB* von *B* nach *A* hin gerichtet ist, entsteht ein solcher, der von *B* und in der Richtung von *C* nach *B* hin wirkt, und statt des von *B* nach *h*

hin gehenden Druckes kommt ein solcher durch B von h gegen B hin zu Stande.

Nach der oben gemachten Voraussetzung soll jede Ecke der vorgeschriebenen polygonalen Stützlinie nur in horizontaler Richtung von der Hinterstützungsebene gegen Druck und Zug gestützt und gehalten werden. Der Ueberdruck Bi der Ecke B wird ferner, wie wir eben sahen, durch den horizontal gerichteten Druck Bh und durch den Druck Bg vertreten, dessen Richtung die an B sich anlehnende Stützseite BC bestimmt. Deshalb nun und wegen der vorausgesetzten Stützungsfähigkeit der Hinterstützungsebene wird der Ueberdruck Bi der Ecke B nothwendig

einen Horizontaldruck Bh gegen die Hinterstützungsebene und einen Druck Bg in die an B sich anschliefsende untere Stützseite abgeben müssen, wodurch der bereits in der Richtung der letztern vorhandene Druck Be um Bg vermehrt wird.

Was wir soeben für die Ecke B nachwiesen, mufs in gleicher Weise auch für jede andere Geltung haben.

Insofern wir die frühere Anordnung der Stützlinie Fig. 5 in Beziehung auf die zu stützenden Gewichte, in Beziehung auf die Richtungswinkel und in Beziehung auf die gleiche Richtung der zwei den Scheitel bildenden Polygonseiten AM und AB gegen eine Vertikale unverändert beibehalten und einzig nur die Befähigung der Hinterstützungsebene abgeändert haben, müssen auch alle hiervon nicht abhängigen Bestimmungen die frühern Werthe behalten; es mufs also, wie früher, der Horizontaldruck im Scheitel

$$C = \tfrac{1}{2} P_0 \, cotg \, \alpha_1$$

sein, und ebenso müssen die früher auf Seite 14 bestimmten Drücke Ab, Bd, Be, Ck u. s. f. ungeändert bleiben.

Mit Hinsicht auf die eben gemachten Erörterungen ist:

(1) der Druck in der Seite AB

$$D_1 = Ab,$$

der Druck in der Seite BC

$$D_2 = Be + Bg,$$

der Druck in der Seite CD

$$D_3 = Cl + Cn$$

u. s. f.

(2) der Ueberdruck Bi in B

$$Ab - Bd = t_1,$$

der Ueberdruck Cp in C

$$Be + Bg - Ck = t_2,$$

der Ueberdruck Dv in D

$$Cl + Cn - Dq = t_3.$$

u. s. f.

und

(3) der Horizontaldruck in B

$$h_1 = Bh,$$

der Horizontaldruck in C

$$h_2 = Co,$$

der Horizontaldruck in D

$$h_3 = Du$$

u. s. f.

Die letzte Polygonseite ON mufs nach ihrer Richtung hin ebenfalls einen Druck erleiden, der gemäfs der gewählten Bezeichnung durch

$$D_n$$

ausgedrückt ist. Im Endpuncte N der Stützlinie kann eben dieser Druck durch einen Horizontaldruck

$$H = NK,$$

sowie durch einen Vertikaldruck

$$V = NG$$

ersetzt werden, und eben diese Drücke ergeben sich aus

$$D_n.$$

Was wir bisher über die Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung aufstellten, fafst alles in sich, was sich im Allgemeinen über eine solche sagen läfst. Zur scharfen Bezeichnung des Entwickelten und überdiefs, um daraus gewisse Schlüsse ziehen zu können, wollen wir nun die trigonometrischen Werthe für die allgemeine Bezeichnung einsetzen.

Bereits früher fanden wir den Horizontaldruck im Scheitel zu

$$\text{I. } C = \tfrac{1}{2} P_0 \, cotg \, \alpha_1,$$

sowie ferner die Werthe für die Drücke

$$Ab, Bd, Be, Ck \text{ u. s. f.}$$

auf Seite 14.

Nach (1), (2) und (3) ist

der Druck in der ersten Polygonseite

$$D_1 = Ab = \frac{\frac{1}{2} P_0}{\sin \alpha_1},$$

der Ueberdruck in B

$$t_1 = Ab - Bd = \frac{\frac{1}{2} P_0}{\sin \alpha_1} - \frac{P_1 \cos \alpha_2}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

der in B aus Bi entspringende Horizontaldruck

$$h_1 = Bh = \frac{t_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin \alpha_2} = C - (\tfrac{1}{2} P_0 + P) \operatorname{cotg} \alpha_2,$$

der in B aus Bi entspringende Druck nach der Richtung der zweiten Stützlinie BC

$$Bg = \frac{t_1 \sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}.$$

Hieraus ergiebt sich:

der Druck in der Richtung der zweiten Stützseite zu

$$D_2 = Be + Bg = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1}{\sin \alpha_2},$$

der Ueberdruck im zweiten Eckpuncte C zu

$$t_2 = Cp = Be + Bg - Ck = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1}{\sin \alpha_2} - \frac{P_2 \cos \alpha_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_2)},$$

der Horizontaldruck in C zu

$$h_2 = Co = \frac{t_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{\sin \alpha_3} = (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1) \operatorname{cotg} \alpha_1 - (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2) \operatorname{cotg} \alpha_3$$

und der Druck Cn nach der Richtung der dritten Stützlinie zu

$$Cn = \frac{t_2 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1}{\sin \alpha_3} - \frac{P_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2)}.$$

Der gesammte Druck, den die dritte Stützseite nach ihrer Richtung hin empfängt, ist, zufolge der letzten Bestimmung,

$$D_3 = Cl + Cn = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2}{\sin \alpha_3}.$$

In vorstehender Weise die Rechnung fortgesetzt, giebt

$$D_1 = \frac{\frac{1}{2} P_0}{\sin \alpha_1},$$

$$D_2 = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1}{\sin \alpha_2},$$

$$D_3 = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2}{\sin \alpha_3},$$

$$D_4 = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3}{\sin \alpha_4} \text{ u. s. f.}$$

folglich auch den Druck in der Richtung der nten Stützseite zu

$$\text{II. } D_n = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots + P_{n-1}}{\sin \alpha_n};$$

ferner

$$h_0 = C - (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1) \operatorname{cotg} \alpha_2,$$

$$h_1 + h_2 = C - (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2) \operatorname{cotg} \alpha_3,$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = C - (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3) \operatorname{cotg} \alpha_3$$

u. s. f.

also auch, wenn wir die Summe aller Horizontaldrücke einschliefslich des durch den Punct O gehenden mit

$$(s.\, h_{n-1})$$

bezeichnen,

$$\text{III. } (s.\, h_{n-1}) = C - (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots + P_{n-1}) \operatorname{cotg} \alpha_n.$$

Der Druck D_n, der in die Richtung der letzten Stützseite fällt, wird im Endpuncte N durch einen Horizontaldruck H und durch einen Vertikaldruck V ersetzt, oder kann durch eben solche gestützt werden. Nun ist

$$\text{IV. } H = D_n \cos \alpha_n = (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_{n-1}) \operatorname{cotg} \alpha_n$$

und

$$\text{V. } V = D_n \sin \alpha_n = (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots + P_{n-1}).$$

Wird H zu $(s.\, h_{n-1})$ in III. addirt, so erhält man die Summe sämmtlicher Horizontaldrücke, welche die vorgeschriebene Stützlinie vom Scheitel aus bis zu ihrem Endpuncte hin gegen eine Vertikale durch N, oder gegen eine dahinter gelegene Vertikale äufsert, zu

$$\text{VI. } (s.\, h_n) = C.$$

Die vorstehenden Gleichungen lehren uns für eine vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung:

dafs der Druck D_n in der Richtung der nten Stützseite gleich ist der Summe aller Gewichte, die sich zwischen dieser und dem Scheitel befinden, dividirt durch den Sinus ihres Stellungswinkels,

dafs die Summe ($s.\ h_{n-1}$) aller bis zur nten Seite hin abgesetzten Horizontaldrücke gleich ist dem Horizantaldrucke C im Scheitel weniger dem Producte aus der Cotangente der Richtung der letzten Seite und der Summe aller Gewichte zwischen eben dieser Seite und dem Scheitel,

dafs der gesammte Vertikaldruck in der Hinterstützungsebene hinter oder durch N der Summe aller Gewichte gleich ist, welche die Stützlinie zwischen ihrem Scheitel und ihrem Endpuncte stützt, und

dafs der gesammte Horizontaldruck, der in die Hinterstützungsebene übergeht, gleich ist dem Horizontaldrucke im Scheitel.

Auch bei der eben betrachteten polygonalen Stützlinie Fig. 5 mit horizontaler Hinterstützung mufs allen den Drücken, die in die Hinterstützungsebene übergehen, ein Druck T als Mitteldruck entsprechen, welcher die Vertikale durch den Endpunct N unter einem Richtungswinkel β durchschneidet; es mufs ferner der aus T folgende Horizontaldruck

$$T \cos \beta = C$$

sowie der aus T entspringende Vertikaldruck

$$T \sin \beta = \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \ldots . + P_{n-1}$$

sein, wie wir bereits auf Seite 33 für die vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung dargethan haben.

Ist X der Punct in der Vertikale aus N, in welchem der Mitteldruck für alle in die Hinterstützungsebene fallenden Drücke jene durchschneidet, dann mufs auch das statische Moment des aus T entspringenden Horizontaldruckes

$$T \cos \beta = C,$$

bezogen auf den Durchschnittspunct Y der Vertikale durch N mit der Horizontale durch den Scheitel A, gleich sein der Summe der statischen Momente aller Horizontaldrücke, ebenfalls bezogen auf Y, welche gegen NY geäufsert werden, d. g.

$$(4)\quad C \times YX = h_1 \times YB_1 + h_2 \times YC_1 + h_3 \times YD_1 \ldots . + h_{n-1}\, YO_1 + YN \times D_n \cos \alpha_n.$$

Die Polygonseiten AB, BC, CD ON aufeinanderfolgend mit

$$l_1, l_2, l_3 \dots l_n$$

bezeichnet, giebt

$YB_1 = l_1 \sin \alpha_1$; $YC_1 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2$; $YD_1 = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 + l_3 \sin \alpha_3$; u. s. f. $YN = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2 \dots + l_n \cos \alpha_n$.

Diese Werthe sowie die für $h_1, h_2, h_3 \dots h_{n-1}$, $D_n \cos \alpha_n$ von Seite 39, 40 in die Gleichung (4) gesetzt, so erhält man nach gehöriger Reduction

$$\text{VII. } C \times YX = \begin{cases} \tfrac{1}{2} P_0 \{ l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 \dots + l_n \cos \alpha_n \} \\ + P_1 \{ l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 \dots + l_n \cos \alpha_n \} \\ + P_2 \{ l_3 \cos \alpha_3 \dots + l_n \cos \alpha_n \} \\ \dots\dots\dots \\ + P_{n-1} \{ l_n \cos \alpha_n \} \end{cases}$$

Eine Vergleichung der eben gefundenen Gleichung mit der unter IV., Abschnitt vier, Seite 18, lehrt uns, dafs auch für eine vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung

der allen in die Hinterstützungsebene übergehenden Drücken zugehörende Mitteldruck seiner Gröfse und Lage nach durch den Endpunct der freien Stützlinie gegeben wird, welche den zu stützenden Gewichten entspricht und im Scheitel mit der vorgeschriebenen gleiche Richtung, also auch denselben Horizontaldruck hat.

Wie im vierten Abschnitte Seite 18, und wie im fünften Abschnitte Seite 34 die Summe der statischen Momente sämmtlicher Gewichte, bezogen auf die Vertikale durch N, mit

$$\Sigma (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \dots P_{n-1}),$$

den lothrechten Abstand des Endpunctes X der freien Stützlinie von ihrem Scheitel, der mit der vorgeschriebenen zusammenfällt, mit Z_n und den Richtungswinkel der freien Stützlinie im Puncte X mit β_n bezeichnet, giebt

$$\text{IIX. } Z_n = \frac{\Sigma (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \dots P_{n-1})}{C} \quad \text{und}$$

$$\text{IX. } tg\, \beta_n = \frac{\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 \dots P_{n-1}}{C}.$$

Offenbar gelten diese Gleichungen nicht blofs für den Endpunct der freien Stützlinie, sondern auch für jeden andern Punct derselben, oder es mufs sein

$$Z_1 = \frac{\Sigma\,(\tfrac{1}{2} P_0)}{C},$$

$$tg\,\beta_1 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0}{C},$$

$$Z_2 = \frac{\Sigma\,(\tfrac{1}{2} P_0 + P_1)}{C},$$

$$tg\,\beta_3 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0 + P_1}{C},$$

$$Z_3 = \frac{\Sigma\,(\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2)}{C},$$

$$tg\,\beta_3 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2}{C} \quad \text{u. s. f.}$$

Die Gleichungen IIX. und IX. dienen also zur Bestimmung der einzelnen Puncte und der Richtung der bis dahin laufenden entsprechenden Seite der freien Stützlinie, welche die Richtung und die Gröfse des Druckes angiebt, der überhaupt bei einer vorgeschriebenen Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung besteht.

Die polygonale Stützlinie Fig. 5 mit horizontaler Hinterstützung geht in eine stetig gekrümmte über, wenn die Gewichte P_0, P_1, P_2.... unendlich nahe an einander hängen, oder durch stetig an einander gereihte Massen vertreten werden d. g.

Auch die Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung mufs für stetig an einander gereihte Massen eine stetig gekrümmte Linie sein.

Dafs die für eine polygonale Stützlinie zunächst entwickelten Gesetze und Formeln ebenfalls für eine stetig gekrümmte ohne alle Abänderung gelten müssen, dürfte zur Genüge aus der Andeutung über die Entstehung der stetig gekrümmten Stützlinie aus der polygonalen folgen.

Siebenter Abschnitt.

Von der Beschaffenheit einer Stützlinie im Scheitel.

Das Gewicht P_0, das im Scheitel einer Stützlinie Fig. 5 aufgehangen sein soll, wird von den in A zusammenstofsenden Polygonseiten gemeinschaftlich getragen, und es stützt jede derselben die Hälfte von P_0, wenn sie gleiche Richtung zu einer Vertikale haben. Bei ebenfalls dieser Lage lehnen sich die im Scheitel zusammenlaufenden Polygonseiten daselbst mit dem Horizontaldruck

$$C = \tfrac{1}{2} P_0 \, cotg \, \alpha_1 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0}{tg \, \alpha_1}$$

gegen einander.

Hat eine Stützlinie stetig an einander gereihte Massen allein oder mit zu stützen, je nachdem sie eine freie oder eine vorgeschriebene ist, dann werden die in der nächsten Nähe des Scheitels, und zwar in einer unendlich geringen Entfernung zu beiden Seiten desselben, befindlichen Massengewichte immer als gleich grofs auftreten, folglich werden auch die beiden im Scheitel zusammenstofsenden Polygonseiten gleich viel Last tragen und, weil sie sich nur bei gleich grofsem Horizontalschub im Scheitel gegenseitig stützen können, werden eben diese Polygonseiten im Scheitel gleiche Richtung zu einer Vertikale haben müssen. Diefs nun führt uns zu dem Satze:

Die zwei Theile oder Aeste einer Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen steigen vom Scheitel aus unter gleicher Richtung nieder, ja die zu beiden Seiten des Scheitels liegenden Theile einer solchen werden durchaus symmetrisch sein müssen, wenn die Massenanordnung zu beiden Seiten des Scheitels und die Stützung die nämliche ist.

Der schon früher gefundene und oben wieder angeführte Ausdruck für den Horizontaldruck einer Stützlinie im Scheitel

$$C = \frac{\tfrac{1}{2} P_0}{tg \, \alpha_1} \quad \text{oder} \quad tg \, \alpha_1 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0}{C}$$

belehrt uns über die Scheitelrichtung einer solchen. Bereits in dem

Abschnitte über die freie Stützlinie Seite 11 haben wir gesehen, dafs eine polygonale Stützlinie in ihrem Scheitel eine horizontale Richtung annehmen kann, oder, dafs zwischen die zwei Polygonseiten *AM* und *AB* der Stützlinie Fig. 5 in der Ebene des Scheitels eine gerade Linie eingeschaltet werden kann, wie diefs in Fig. 6 angedeutet ist, ohne den vorher bestandenen Horizontalschub zu ändern. Somit nimmt eine Stützlinie im Scheitel eine horizontale Richtung nur dann an, wenn sie eben daselbst mit o belastet ist. Ebenfalls zu diesem Schlusse führt uns die obenstehende Gleichung; denn für $\frac{1}{2} P_0 = o$ wird

$$tg\, \alpha_1 = \frac{o}{C} = o.$$

Die Tangente des Richtungswinkels einer Stützseite ist aber nur dann o, wenn $\alpha_1 = o$, also, wenn die zugehörende Stützlinie eine horizontale Richtung hat.

Für stetig an einander gereihte Massen steigt, wie wir fanden, die zugehörende Stützlinie bis zum Scheitel hin stetig gekrümmt empor. Die in der nächsten Nähe zu beiden Seiten des Scheitels gelegenen Theile derselben sind symmetrisch, ja die Stützlinie ist zu beiden Seiten des Scheitels durchaus symmetrisch gestaltet, wenn die Massenanordnung zu beiden Theilen des letztern gleichmäfsig vertheilt und gleich gestützt ist. Doch, welche Richtung hat die Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen im Scheitel selbst? Zwei stetig gekrümmte Linien können nur in einem Puncte zusammenfallen oder, nur einen Punct gemein haben. Dieser gemeinsame Punct für die oben angeführten Aeste einer Stützlinie ist der Scheitel selbst. Von den stetig an einander gereihten Massen wird eben dieser Scheitel, weil er aus einem Puncte besteht, nur einen unendlich kleinen Theil, streng genommen nichts oder o, zu stützen haben. Ist dem aber so, wie nicht mehr zweifelhaft sein kann, dann mufs, mit Hinsicht auf die obigen Erörterungen, die Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen im Scheitel eine h o r i z o n t a l e R i c h t u n g annehmen.

Weil ferner die Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen in der nächsten Nähe des Scheitels zu beiden Seiten desselben von gleicher Richtung ist, wie oben erörtert wurde, so wird auch

die Krümmung einer Stützlinie im Scheitel für stetig an einander gereihte Massen mit einem Kreisbogen vom Radius ϱ zusammenfallen, dessen Mittelpunct vertikal unter dem Scheitel liegt. Den Radius ϱ des eben erwähnten Kreisbogens wollen wir den Krümmungshalbmesser der Stützlinie im Scheitel nennen.

Achter Abschnitt.

Bestimmung des Horizontaldruckes im Scheitel einer Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen.

Für irgend wie stetig an einander gereihte Massen sei *MAN* Fig. 12 die zugehörende Stützlinie, *A* deren Scheitel und *C* der Mittelpunct des Kreisbogens, welcher mit der Krümmung der Stützlinie im Scheitel *A* zusammenfällt, mithin $AC = \varrho$ der Krümmungshalbmesser für den Scheitel der Stützlinie.

Die Masse, für welche wir soeben die Stützlinie angenommen haben, werde in der Nähe des Scheitels *A* auf der Unterseite durch *JDH*, auf der Oberseite durch *LEK* und ferner durch zwei vertikale Ebenen begrenzt. Der horizontale Abstand der letztern von einander sei *b*, die lothrechte Höhe der Masse im Scheitel

$$DE = h$$

und das Eigengewicht der kubischen Einheit des zu stützenden Materials gleich *w*.

Liegt die Vertikale *FG* der Vertikalen durch den Scheitel *A* beliebig, oder unendlich nahe, dann ist

$$FG = DE$$

und die Fläche

$$DF = DE \times AB.$$

Das Gewicht der durch die Vertikalflächen *DE* und *GF* abgeschnittenen Masse ergiebt sich zu

$$DE \times AB \times b \times w = h \times AB \times b \times w.$$

Der Richtungswinkel der Stützlinie *AB* sei α_1. Das Gradmafs

dieses Winkels wird um so näher an o grenzen, je näher der Punct B dem Scheitel A steht. Der horizontale Abstand des Punctes B von A ist, insofern $AC = \varrho$ den Krümmungshalbmesser der Stützlinie im Scheitel darstellt,

$$\varrho \sin \alpha_1 = AB$$

oder, weil α_1 von o um unendlich wenig verschieden gedacht werden mufs, auch

$$AB = \varrho \times \text{Bogen des Winkels } \alpha_1.$$

Das Gewicht, welches der vom Scheitel A nach N hin liegende Theil der Stützlinie im Scheitel stützt, ist somit

$$\tfrac{1}{2} P_0 = h\, b\, w\, \varrho \times \text{Bogen des Winkels } \alpha_1.$$

Setzen wir diesen Werth in den bekannten Ausdruck für den Horizontaldruck

$$C = \frac{\tfrac{1}{2} P_0}{tg\, \alpha_1},$$

und beachten, dafs die Tangente eines unendlich kleinen Winkels dem zugehörenden Bogen für den Radius 1 gleich ist, so wird

$$C = \frac{h\, b\, w\, \varrho \times \text{Bogen des Winkels } \alpha_1}{\text{Bogen des Winkels } \alpha_1}, \text{ d. g.}$$

$$\text{I. } C = h\, b\, w\, \varrho \text{ oder,}$$

wenn die Masse nur die Tiefe $b = 1$ hat,

$$\text{II. } C = h\, \varrho\, w.$$

Die Gleichungen I. und II. stellen das Gewicht eines Prisma von der zu stützenden Masse dar, das den Querschnitt der Masse im Scheitel zum Querschnitt und den Krümmungshalbmesser der Stützlinie ebendaselbst zur Länge oder Höhe hat. Somit können wir denn sagen:

Der Horizontaldruck oder Schub einer stetig gekrümmten Stützlinie im Scheitel ist dem Gewichte eines Prisma von der zu stützenden Masse gleich, welches den Querschnitt der Masse im Scheitel zum Querschnitt und den Krümmungshalbmesser der Stützlinie eben daselbst zur Höhe oder Länge hat.

Die vorstehende Bestimmung des Horizontaldruckes im Scheitel einer stetig gekrümmten Stützlinie läfst sich auf vielfache Weise abändern; man kann eine freie Stützlinie, eine vorgeschriebene mit tangentialer, oder auch eine solche mit horizontaler Hinterstützung

zum Grunde legen, doch immer wird und mufs man zu dem unter I. aufgeführten Werth gelangen, weil der Horizontalschub im Scheitel einer Stützlinie von ihrer Beschaffenheit in entferntern Puncten nämlich, ob sie eine freie oder eine vorgeschriebene, völlig unabhängig ist.

Neunter Abschnitt.

Ueber die gemeinsamen und eigenthümlichen Eigenschaften der betrachteten Stützlinien.

Die bemerkenswerthesten der Eigenschaften, welche die betrachteten Stützlinien mit einander gemein haben, sind folgende;

1) Für stetig an einander gereihte Massen ist die zugehörende freie oder vorgeschriebene Stützlinie eine stetig gekrümmte Linie.

2) Die Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen nimmt im Scheitel eine horizontale Richtung an.

3) Der Horizontalschub im Scheitel einer Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen ist immer dem Gewichte eines Prisma von der zu stützenden Masse gleich, das die Querschnittsfläche der Masse im Scheitel zur Querschnittsfläche und den Krümmungshalbmesser der Stützlinie im Scheitel zur Länge hat.

4) Der gesammte Horizontalschub, den eine Stützlinie vom Scheitel aus in jeder Hälfte absetzt, ist dem Horizontalschub im Scheitel gleich.

5) Der gesammte Vertikaldruck, den eine Stützlinie auf eine Vertikale durch einen ihrer Endpuncte abgiebt, ist dem Gewichte gleich, das zwischen dem Scheitel und dem Endpuncte derselben, durch den die Vertikale geht, gestützt wird.

6) Der gesammte Druck, den eine Stützlinie vom Scheitel bis zum Endpuncte gegen eine Hinterstützungsebene abgiebt, ist, seiner Gröfse und Lage nach, dem Drucke gleich, der im Endpuncte einer freien Stützlinie vorhanden ist, welche den zu stützen-

den Gewichten zugehört und die mit der vorhandenen Stützlinie im Scheitel zusammenfällt.

Von den eigenthümlichen Eigenschaften der betrachteten Stützlinien sind folgende bemerkenswerth:

7) Die freie Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen stützt die letztern nur in ihrer Richtung, setzt also auch Vertikal- und Horizontaldruck nur in ihren Endpuncten ab. Ihrer Form nach ist die freie Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen eine durch die Anordnung der letztern bedingte Kettenlinie, die unter Umständen in einen Kreisbogen, in einen Ellipsenbogen, in einen Parabelbogen u. s. f. übergehen kann.

8) Eine vorgeschriebene Stützlinie stützt die zugehörenden Massen nicht allein, sondern thut diefs unter Mitwirkung einer Hinterstützungsebene. Zu einer solchen ist jede stetig gekrümmte Linie zu verwenden.

9) Eine vorgeschriebene Stützlinie für stetig an einander gereihte Massen trägt zwischen ihrem Scheitel und jedem ihrer Endpuncte Horizontaldruck oder Horizontalschub auf die Hinterstützungsebene über.

Zehnter Abschnitt.

Ueber die Stützlinien der Wölbbögen.

Bei Brücken betrachten wir den gewölbten Theil eines Bogens mit als das Wesentlichste, das auf deren Halt einwirkt. Derselbe vertritt die Stelle einer Stützlinie, besser die einer Stützfläche, für sein eigenes Gewicht und für die Masse, die auf ihm liegt.

Eine Stützlinie kann und soll allein nach ihrer Richtung hin stützen. Mehr können wir auch nicht von einem Wölbbogen beanspruchen, wenn wir von der Adhärirung des verwendeten Mörtels absehen, und insofern ist ein solcher als eine materielle Stützfläche zu betrachten.

Wir haben gesehen, dafs der Horizontaldruck im Scheitel einer Stützlinie, aufser von der Höhe der Massen daselbst und ihrem Eigengewichte, hauptsächlich vom Krümmungshalbmesser abhängt; denn der Ausdruck für den Horizontaldruck im Scheitel ist

$$C = \varrho\, b\, h\, w.$$

Die Kenntnifs des Werthes C für einen Wölbbogen oder Brückenbogen ist von gröfster Wichtigkeit, weil eben dieser als Horizontalschub auf die Pfeiler oder Widerlager übergehen mufs. Beziehen wir die obenstehende Formel auf Fig. 13 und bezeichnen für den Scheitel den Krümmungshalbmesser der innern durch B gehenden Wölblinie daselbst mit r, den äufsern durch E gehenden mit R und den mittlern durch H gehenden mit ϱ, dann ist,

wenn man die Stützlinie mit der äufsern Wölblinie zusammenfallend annimmt, der zugehörende Horizontaldruck im Scheitel

(1) $R \times BK \times w$, und

wenn man die Stützlinie mit der innern Wölblinie zusammenfallend annimmt, der zugehörende Horizontaldruck im Scheitel

(2) $r \times BK \times w$.

Doch weder der für die äufsere, noch jener für die innere Wölblinie bestimmte Horizontaldruck kann sich in der Wirklichkeit herausstellen, weil die Stützung von der innern Wölblinie im Scheitel bis zur äufsern daselbst reicht. Für den wahrhaft bestehenden Horizontaldruck können die eben bestimmten Werthe nur Grenzen sein oder, derselbe wird kleiner sein als der in (1), und gröfser als der in (2) gefundene.

Der Druck, den ein gewölbter Bogen in seinem Scheitel erleidet, mufs horizontal gerichtet und, bei guter Beschaffenheit desselben, über die ganze Fläche der Scheitelfuge gleichmäfsig verbreitet sein. Eben defshalb nun kann die Stützung dieses Druckes durch eine lineare Stützlinie nur dann aufgehoben oder vertreten werden, wenn diese durch die halbe Höhe des Bogens im Scheitel hindurchgeht. Welchen Krümmungshalbmesser aber die Stützlinie hier hat, ist im Allgemeinen nicht zu bestimmen, bei normaler Stützung liegt derselbe zwischen R und r. Setzen wir ihn gleich dem Halbmesser der mittlern Krümmung des Bogens im Scheitel, dann wird

$C = \varrho \times BK \times w$ oder,

$$\text{weil } \varrho = \frac{r + R}{2},$$

$$C = \frac{r \times BK \times w + R \times BK \times w}{2}, \text{ d. h.}$$

der Horizontaldruck im Scheitel eines Bogens hängt, aufser von der Höhe der Masse daselbst und ihrem Eigengewichte, vom Krümmungshalbmesser der mittlern Wölblinie eben daselbst ab, wenn der Bogen im Scheitel nur nach seiner Richtung hin stützt.

Zu eben diesem Resultate und noch einen Schritt weiter gelangt man durch eine andere Auffassung des vorliegenden Gegenstandes. Wie eine lineare Stützlinie, so soll, ja kann auch ein gewölbter Bogen in seiner Richtung stützen. Die Fähigkeit hierzu erhält ein solcher, unter übrigens geeigneten Umständen, durch die rückwirkende Festigkeit seines Materials. Die rückwirkende Festigkeit eines Körpers kann man sich aber in jener mit der Druckrichtung zusammenfallenden Linie vereinigt denken, welche durch die Mitte der winkelrechten Querschnittsfläche zur eben genannten Richtung hindurchgeht. Diese Linie nun kann bei einem gewölbten Bogen keine andere als dessen mittlere Wölblinie sein. Demnach ist:

die mittlere Wölblinie eines gewölbten Bogens jene, welche dessen Stützlinie vertritt,

und eben defshalb mufs

der Krümmungshalbmesser für die Stützlinie eines Wölbbogens im Scheitel der Krümmungshalbmesser der mittlern Wölblinie daselbst sein,

wenn der Wölbbogen im Scheitel nur nach seiner Richtung hin stützt.

Nichts hindert uns die mittlere Wölblinie *GHJ* eines Wölbbogens *FABCDE* Fig. 13 als freie Stützlinie der Masse des Wölbbogens an sich, sammt jener zu betrachten, die durch die Linie *LKM* begrenzt und vom Bogen getragen wird. Die Masse, welche die mittlere Wölblinie als freie Stützlinie vom Scheitel aus, z. B. auf der linken Seite, zu stützen hat, reicht vom letztern bis zur vertikalen Ebene *AL* durch den Endpunct *A* der innern Wölblinien, so dafs der Endpunct *G* der Stützlinie sich ebenfalls in der vertikalen Ebene durch *A* befinden mufs.

Ein Wölbbogen, dessen mittlere Wölblinie eine freie Stützlinie für die zu stützenden Massen ist, wird die Eigenthümlichkeit besitzen, keinen Druck oder Schub auf seine Hintermauerung *NEF* zu äufsern, sondern allein bei *G* und *J*, vertikal über den Endpuncten *A* und *C*, Druck in der Richtung der Stützlinie daselbst gegen die Pfeiler oder Widerlager üben, gegen welche sich die Bogenhälften stützen. In eben diesen Richtungen darf folglich nur eine Gegenstützung, gleich dem Drucke in den Bogenanfängen, vorhanden sein, um das Bestehen des ganzen gewölbten Bogens zu sichern.

Ein noch anderer Umstand als der eben angeführte, der für die Praxis wichtig wird, wenn die mittlere Wölblinie eines Bogens eine freie Stützlinie für sämmtliche Massen ist, ist der, dafs die Masse, die oberhalb des Bogens liegt, also in dem Raume *LKEF*, für die eine Bogenfläche und ebenso für die andere, keinerlei innern Zusammenhang zu haben braucht, weil durch eben diese Masse keinerlei Bogenschub hindurchgeht. Der Raum über dem Bogen ist also mit Kiefs, Boden, Bauschutt u. dgl. zu erfüllen, er kann aber auch mit Bruchsteinen ausgemauert werden.

Mit einer gegebenen Massenanordnung ist die Form der zugehörenden freien Stützlinie bedingt. Bei Brückenbögen wird die Massenanordnung, weil ihre Oberfläche eben wird, schon durch die lichte Spannweite und durch die lichte oder Stich-Höhe als vorgeschrieben erscheinen. Nimmt man aber eine Linie als freie Stützlinie an, dann wird die Massenanordnung hiermit vorgeschrieben sein.

Diese Bemerkung führt uns zu dem Schlufs, dafs jede krumme Linie, wie ein Kreis-, Ellipsen-, Parabelbogen etc., als eine freie Stützlinie gewählt werden kann, wenn man in der Massenanordnung nicht behindert ist.

Die mittlere Wölblinie *GHJ* des gewölbten Bogens Fig. 13 wollen wir uns jetzt als eine vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung denken. Damit der Wölbbogen als solcher, wie wir ihn soeben angenommen haben, zu bestehen vermag, mufs der zwischen der Aufsenseite oder der obern Wölbfläche desselben und der horizontalen Ebene *NEO* durch den äufsern Scheitel *E* befindliche Raum mit einem Materiale erfüllt sein, das Horizontalschub in sich aufzunehmen vermag. Eben dieser Raum darf

also nicht, wenigstens nicht durchgängig, mit Bauschutt, mit Kiefs oder losem Steinwerk ausgefüllt, sondern er wird theilweise durch eine Mauerung zu bilden sein, die dicht an den Bogen anstöfst, ohne mit ihm innig oder unverschiebbar verbunden zu sein. Der Raum zwischen den horizontalen Ebenen *NEO* und *LKM* hat ähnlichen Anforderungen nicht zu genügen und kann defshalb mit losem Steinwerk, mit Boden, Kiefs etc. ausgeschüttet werden.

Bei der vorausgesetzten Beschaffenheit der mittlern Wölblinie des gewölbten Bogens Fig. 13, nämlich eine Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung zu sein, üben ebenfalls die Bogenanfänge *G* und *J* Druck in ihrer Richtung gegen die zugehörenden Pfeiler oder Widerlager, aber aufserdem empfangen die Pfeiler noch Horizontalschub innerhalb der Höhe, die zwischen dem Endpuncte der mittlern Wölblinie und ihrem Scheitel liegt.

Der Punct *X* in der Vertikale durch *J*, in welchem der gesammte von einer Bogenhälfte auf den hinterliegenden Pfeiler übergehende Druck angenommen oder hinterstützt werden kann, ist der Endpunct der freien Stützlinie für die Massenanordnung zwischen den Vertikalen durch den Scheitel *H* und den Endpunct *J*, welche im Scheitel mit der mittlern Wölblinie gleiche Krümmung hat, (Seite 42).

Endlich wollen wir die mittlere Wölblinie des Bogens Fig. 13 als vorgeschriebene Stützlinie für die zu stützenden Massen mit tangentialer Hinterstützung annehmen. Um dem Wölbbogen Fig. 13, oder seiner mittlern Wölblinie, in der That tangentiale Hinterstützung zu gewähren, mufs die Hintermauerung *FEN* für jede Bogenhälfte in einer Weise mit dem Bogen verbunden sein, die den tangentialen Druck zuverlässig auf diese zu übertragen vermag. Es mufs also hier der Raum zwischen der Ebene der Wölbfläche und der Ebene *NEO* durch den Scheitel nicht blofs dicht ausgemauert, sondern auch in angemessener Weise mit dem Bogen unverschiebbar verbunden sein. Ist diesen Anforderungen genügt, also gleichsam der Bogen mit der Hintermauerung ein Ganzes, dann erst wird die vorausgesetzte Hinterstützung vorhanden sein, aber auch nur erst dann wird der Druck, aufser in der Richtung der mittlern Wölblinie, tangential von der letztern auf die Hintermauerung übergehen, und der Bogen theils in diesen Richtungen, theils nach den Richtungen

der Endpuncte der mittlern Wölblinie Druck gegen die zugehörenden Pfeiler üben, zwischen welchen sich der Bogen befindet.

Der Raum zwischen der Horizontale *NEO* durch den Scheitel *E* und der eigentlichen Brückenbahn *LKM* kann auch bei tangentialer Hinterstützung mit einem beliebigen Materiale, mit Boden, mit Kiefs oder mit Steinwerk erfüllt werden. Der Punct *X*, in welchem der gesammte Druck des Bogens Fig. 13 von zuletzt angenommener Beschaffenheit vom Pfeiler aus zu hinterstützen ist, wird auch hier, seiner Gröfse und Lage nach, durch den Endpunct der freien Stützlinie bedingt, welche der Massenanordnung zugehört und welche mit der mittlern Wölblinie im Scheitel gleiche Krümmung hat, (Seite 34).

Die bisherigen Betrachtungen im gegenwärtigen Abschnitte gelten für die Annahme: der Wölbbogen stütze im Scheitel allein und nur nach seiner Richtung hin. Für eben diese Annahme mufs, bei durchaus gleichmäfsiger Belastung des Wölbmaterials im Scheitel, die mittlere Wölblinie des Bogens daselbst die Stützlinie geben, wie wir bereits gesehen haben, und es wird der Horizontaldruck im Scheitel

$$C = \varrho h w$$

keine Aenderung erleiden, die mittlere Wölblinie mag hinter demselben als freie, oder als vorgeschriebene wirken. Wir wissen aber auch aus den Eigenschaften der Stützlinie (Seite 34, 42), dafs wenn eine solche für eine gegebene Massenanordnung vorgeschrieben ist, der gesammte Schub, den sie absetzt oder übt, seiner gesammten Gröfse und seiner mittlern Lage nach durch die freie Stützlinie dargestellt wird, die der Massenanordnung entspricht und welche überdiefs im Scheitel mit der vorgeschriebenen Stützlinie zusammenfällt. Die Stützung folglich, die ein Bogen von dem Widerlager oder Pfeiler fordert, gegen das oder gegen den er sich anlehnt, mufs ihrer Gröfse und Lage nach durch die Massenanordnung, sowie durch die Krümmung der Stützlinie im Scheitel bedingt sein.

Es ist durchaus nicht nothwendig, dafs die der Massenanordnung eines Bogens entsprechende freie Stützlinie in ihrem Scheitel mit der mittlern Wölblinie daselbst gleiche Krümmung habe; sie kann zwar nur selten eine gröfsere, aber fast immer eine viel flächere Krümmung annehmen, als die mittlere Wölblinie daselbst hat.

Denken wir uns den Krümmungshalbmesser der freien Stützlinie der Masse eines Gewölbes im Scheitel gröfser, als den der mittlern Wölblinie daselbst, dann mufs auch der Horizontaldruck gröfser werden und der Endpunct X der freien Stützlinie höher emporrücken als er liegt, wenn die letztere mit der mittlern Wölblinie im Scheitel gleiche Krümmung besitzt. Denn es ist nach Abschnitt 4, Seite 19, wenn wir die Summe der statischen Momente sämmtlicher Gewichte zwischen der Vertikale BK durch den Scheitel und der Vertikale durch den Endpunct C der innern Wölblinie, bezogen auf die Vertikale CO, mit

$$\Sigma(W),$$

den vertikalen Abstand des vertikal über C liegenden Endpunctes X der freien Stützlinie vom Scheitel H derselben mit Z und den Horizontaldruck im Scheitel mit C bezeichnen,

$$CZ = \Sigma(W); \text{ I. } C = \frac{\Sigma(W)}{Z}.$$

Ist das Wölbmaterial, nämlich das des gewölbten Bogens, im Scheitel in seiner ganzen Höhe gleichmäfsig durch den Druck C belastet, dann wird immer, wie auch der Endpunct X der freien Stützlinie liegen möge, der Scheitel der letztern in der Mitte der Bogenhöhe liegen.

Ferner ist nach dem vorgehenden Abschnitte ganz allgemein:

$$C = \varrho h w \text{ d. g.}$$

bezogen auf I.,

$$\varrho h w = \frac{\Sigma(W)}{Z}, \text{ also}$$

$$\text{II. } \varrho = \frac{\Sigma(W)}{h w Z}.$$

Hiernach wird für eine vorgeschriebene Massenanordnung, also auch für einen vorgeschriebenen Werth von $\Sigma(W)$, für eine bestimmte Höhe h der Masse im Scheitel und für einen vorgeschriebebenen Abstand Z des Endpuctes X der zugehörenden freien Stützlinie von ihrem Scheitel, der Krümmungshalbmesser der freien Stützlinie im Scheitel bedingt. Je kleiner Z ist, um so gröfser wird ϱ, um so gröfser wird aber auch C. Je kleiner C geschaffen werden kann, desto weniger bekommt das Wölbmaterial zu stützen

und desto weniger schiebt der Bogen gegen seine Widerlager. Für eine gegebene Massenanordnung, also wenn $\Sigma(W)$ und h vorgeschrieben sind, kann nur der gröfste Werth des Z den kleinsten für ϱ und C hervorbringen. Der gröfste Werth nun, den Z annehmen kann, ist der lothrechte Abstand des Scheitels H der mittlern Wölblinie vom Endpuncte J der letztern.

Die eben gemachten Betrachtungen führen uns zu der Schlufsbemerkung: dafs eine Bauform eines Brückenbogens um so ungünstiger auf dessen Stand, und um so mehr auf das Zerdrücken der Steine einwirkt, je geringer der lothrechte Abstand des Endpunctes X der freien Stützlinie vom Scheitel der mittlern Wölblinie ist, dafs dagegen eine Bauform um so besser sein mufs, je näher die der Massenanordnung zugehörende freie Stützlinie der innern oder mittlern Wölblinie liegt.

Elfter Abschnitt.

Vom Verhalten gewölbter Bögen gegen die zugehörenden Pfeiler.

Von der Beschaffenheit der Stützlinie eines gewölbten Bogens hängt die Richtung ab, in welcher dessen Gewicht vom zugehörenden Pfeiler zu stützen ist. Zunächst wollen wir die mittlere Wölblinie des Bogens Fig. 13 als freie Stützlinie der vertikal über und unter ihr befindlichen Massen annehmen. Nach dem, was wir über die freie Stützlinie wissen, pflanzt sie nur Druck in ihrer Richtung fort, so dafs auch der Pfeiler OM allein einen Druck D_n vom Endpuncte J der freien Stützlinie in ihrer Richtung JS daselbst empfängt.

Das nächste Bestreben dieses Druckes gegen den Pfeiler besteht darin, die horizontale Lagerfläche des Kämpfers über ab wegzuschieben. Erfolgt hier keine Verschiebung, dann geht dasselbe

Bestreben auf die unter *ab* liegenden Mauerschichten über, wird aber in seiner Wirkungsfähigkeit immer geringer.

Die Ursache, welche das Bestreben des Bogenschubs, den obern Theil des Pfeilers *MO* über *ab*, *cd* u. s. f. wegzuschieben, verhindert, ist entweder die Richtung oder die Bindefähigkeit des Mörtels, wenn solcher bei der Vermauerung der Steine angewendet worden ist.

Um die Bedingungen feststellen zu können, unter welchen die Reibung das aus dem Bogenschub entspringende Bestreben zur Verschiebung verhindert, müssen wir auf die bekannten Gesetze der Reibung etwas näher eingehen. Um den Pfeilertheil *a M* horizontal über *ab* wegschieben zu können, ist ein gewisser Druck in der Richtung *ab* anzulegen, der vom Gewichte, das gegen die Verschiebungsfläche drückt, sowie von der Rauheit der über einander wegzuschiebenden Flächen abhängig ist. Bei gleicher Beschaffenheit der sich berührenden Flächen erscheint der Druck p, welcher die Verschiebung einer Fläche über eine andere hinweg bewirkt, als ein bestimmter Theil der Last Q, mit welcher jene gegen einander gepreſst werden, so daſs Q mit einem bestimmten, nur mit der Rauhheit sich ändernden Coëfficienten φ multiplicirt, p giebt, nämlich

$$(1)\ p = \varphi\, Q.$$

Der Zahlenwerth des φ heiſst der Reibungscoëfficient. Sein Werth ist gewöhnlich kleiner als 1 und wird für dasselbe Material um so kleiner, je ebener die sich berührenden Flächen sind. Für auf einander geschliffene Ziegelsteine ist der Reibungscoëfficient $\varphi = 0{,}65$, für auf einander geschliffene Sandsteine $\varphi = 0{,}7$. Für die in der Praxis vorkommenden Lagerflächen der Steine ist der Reibungscoëfficient nicht kleiner, sondern gröſser, als die eben angegebenen Werthe sind.

Setzen wir das Gewicht des über der Fläche *ab* stehenden Pfeilers $a\,M = P$, dann gehört zu dessen Verschiebung auf *ab* nach eben dieser Richtung hin der Druck

$$p = \varphi\, P.$$

Das Bestreben zur Verschiebung des Pfeilers wird durch den Bogenschub D_n vom Puncte J nach der Richtung JS hin gegeben. Aus eben diesem Schub D_n entspringt ein Vertikaldruck (Seite 17) gegen *ab* von

$V = W$ gleich dem Gewichte des zwischen der Vertikale durch

den Scheitel und der Vertikale durch J befindlichen Masse, sowie ferner ein Horizontalschub, also nach der Richtung ab, von

$H = C$ gleich dem Horizontalschub im Scheitel.

Somit ist das Gewicht, das überhaupt auf ab lastet,

$$W + P$$

und der Druck, der dessen Verschiebung zu bewirken strebt, C. Soll die Verschiebung nicht erfolgen, dann mufs

C kleiner als $\varphi\ (W + P)$ sein, was wir durch

$$\text{(I)} \quad C < \varphi\,(W + P)$$

andeuten.

Der Fall, dafs C gröfer als die aus dem Gewichte $(W + P)$ entspringende Reibung ist, tritt nicht selten bei Brückenbögen ein, und zeigt sich dann an den Widerlagern.

Liegen die Steine in den horizontalen Fugenflächen ab, cd etc. Fig 13 nicht trocken auf einander, sondern sind sie mit Mörtel verbunden, dann wird der die Verschiebung in diesen Fugen bewirkende Druck von der Bindefähigkeit des Mörtels abhängen, und den Flächen der Mörtelfugen selbst proportional sein müssen. Ist ein Druck α in der Richtung einer Fuge anzulegen, um die Bindung des Mörtels für die Einheit der Fläche aufzuheben, dann ist aL der Druck, welcher den Mörtelverband in der Fugenlänge ab, cd etc. überwindet, dafern die Längen dieser Fugen L, die zugehörenden Breiten aber 1 sind. Der Druck nun, dem der Mörtelverband widerstehen mufs, wenn der Bogenschub durch die Reibung nicht gehalten werden kann, ist C, und um diefs zu können, mufs

$$\text{(II.)} \quad C < aL$$

sein.

Bei den Widerlagern für Wölbbögen ist häufig der Horizontalschub durch die blofse Reibung nicht, sondern nur durch die Bindefähigkeit des Mörtels aufzuheben, also in diesem Falle die Länge l des Widerlagers nach der vorstehenden Gleichung zu bestimmen, d. h.

$$L < \frac{C}{a}$$

zu machen.

Ein zweites Bestreben des Bogenschubs D_{n} in der Richtung JS

gegen den Pfeiler OM ist, denselben um die Kante durch R zu drehen oder zu kanten, deren Richtung in der Regel normal zur Stirnfläche des Bogens steht.

Angenommen, das Gewicht des ganzen Pfeilers bis zur horizontalen Ebene durch R sei Q, das Perpendikel durch seinen Schwerpunct habe von der Drehkante durch R den Abstand

$$RU = s,$$

und ferner sei der winkelrechte Abstand der Kantungslinie durch R von der Richtung JS des Druckes D_n, nämlich RT, gleich t. Bei der Kantung erscheint R als Drehpunct oder Drehachse eines Winkelhebels, an dessen einem Ende U das Gewicht Q und von dessen zweiten Ende T der Druck D_n winkelrecht wirkt. Demzufolge bleibt der Pfeiler ruhig stehen oder, es tritt eine Kantung nicht ein, wenn $UR \times Q$ gröfser ist als $RT \times D_n$, was wir, mit Bezugnahme auf die obige Gleichung, ausdrücken durch

$$s \cdot Q > t \cdot D_n.$$

Bezeichnen wir den lothrechten Abstand der Drehkante durch R vom Endpuncte J der mittlern Wölblinie, nämlich JO mit f, und den horizontalen Abstand eben dieser Drehachse durch R von J, nämlich RO, mit l, dann wird

$$RT = t = f \cos \alpha_n - l \sin \alpha_n$$

gefunden, wodurch die oben bestimmte Gleichung übergeht in

$$s \cdot Q > D_n (f \cdot \cos \alpha_n - l \cdot \sin \alpha_n).$$

Mit Hinsicht auf Seite 16 ist

$D_n \cos \alpha_n = C =$ dem Horizontaldrucke der Stützlinie im Scheitel und $D_n \sin \alpha_n = W =$ dem Gewichte, das die Stützlinie vom Scheitel bis zum Endpuncte zu stützen hat, und demgemäfs geht die vorstehende Gleichung über in

$$\text{(III.)} \quad C \cdot f < s \cdot Q + l \cdot W.$$

Für einen Hebel wird das Product aus einem einwirkenden Drucke und dem winkelrechten Abstande seiner Richtung vom Drehpuncte das statische Moment desselben genannt. In dieser Bedeutung genommen ist in III.

$f \cdot H$ das statische Moment des Horizontaldruckes oder Bogenschubs bezogen auf die Kantungslinie, $s \cdot Q$ das statische Moment des Pfeilergewichtes bezogen auf die Kantungslinie und

$l \,.\, W$ das statische Moment des im Endpuncte der freien Stützlinie wirkenden Bogengewichtes bezogen auf die Drehkante.

Somit sagt uns denn die Gleichung III.:

Der Pfeiler *OM* Fig. 13 wird vom Bogenschub nicht um die Kante durch *R* gedreht oder umgeworfen, wenn das statische Moment des horizontal gerichteten Bogenschubs für die Kantungslinie kleiner ist, als das statische Moment des Pfeilergewichtes und das statische Moment des im Endpuncte der freien Stützlinie wirkenden Bogengewichtes zusammengenommen und gleichfalls auf die Kantungslinie durch *R* bezogen.

Einen Pfeiler oder Schaft wollen wir stabil, standfähig für einen sich anlehnenden Bogen nennen, wenn der Schub des letztern jenen nicht umzuwerfen vermag. Die Bedingung der Stabilität eines Pfeilers für einen Wölbbogen, dessen mittlere Wölblinie eine freie Stützlinie ist, drückt somit die Gleichung III. aus. Bei ihrer Bestimmung haben wir nicht auf die Adhärirung der Steine an einander Rücksicht genommen, die durch das bei ihrer Vermauerung angewendete Bindematerial bedingt wird. Gesetzt, es sei ein Druck q erforderlich, um die Mörtelbindung für die Fläche 1 winkelrecht zu ihrer Richtung aufzuheben. Eben dieser Druck mufs bei gleichem Mörtel der Fläche proportional wachsen. Die Länge $OR = B$ des Pfeilers, bei dessen Tiefe oder Breite 1, giebt somit, weil die adhärirende Fläche

$$1 \times B$$

ist, die Gröfse der Adhärirung zu

$$Bq.$$

Die gesammte Adhärirung kann man sich in der Mitte von *OR*, nämlich in *H*, als in einem Puncte befindlich denken. Zur Aufhebung dieser Adhärirung mufs mithin am Hebelarme *RT* ein Druck angelegt werden, der das statische Moment

$$Bq \times \tfrac{1}{2} B = \tfrac{1}{2} B^2 q$$

bedingt.

Unter Berücksichtigung der Adhärirung durch den Mörtel geht die Gleichung III. über in

$$\text{(IV.)} \quad f \,.\, C < s \,.\, Q + l \,.\, W + \tfrac{1}{2} B^2 q.$$

Unsere bisherigen Betrachtungen über die Bestrebungen des Bogenschubs gelten zunächst nur für einen Wölbbogen, dessen mitt-

lere Wölblinie als freie Stützlinie wirkt. Es fragt sich jetzt: Erleiden diese Bestrebungen eine Aenderung, wenn die mittlere Wölblinie eines gewölbten Bogens als vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer oder mit horizontaler Hinterstützung auftritt? Wir können die gestellte Frage nur mit Nein beantworten. Die bereits geführten Untersuchungen über die freie und vorgeschriebene Stützlinie an sich, so wie in ihrer Beziehung auf Wölbbögen haben uns gelehrt, dafs der Gesammtdruck, den ein Bogen vom Scheitel ab auf den zugehörenden Pfeiler überträgt, seiner Gröfse und Lage nach, durch die der Massenanordnung zugehörende freie Stützlinie gegeben wird, die bald mit der mittlern Wölblinie des Bogens im Scheitel gleiche, oft aber auch eine gröfsere Krümmung hat. Die Gesammtwirkung, welche der Schub irgend eines Bogens gegen den zugehörenden Pfeiler übt, kann nur vom Gesammtdrucke desselben, seiner Gröfse und Lage nach, abhängig sein; und somit müssen die Bestimmungen über das Bestreben des Bogenschubs gegen einen Pfeiler für jeden Wölbbogen gelten, seine mittlere Wölblinie mag als freie, als vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer, oder als vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung wirken, nur mufs bei der Anwendung der im Vorstehenden gefundenen Formeln, statt der mittlern Wölblinie des Bogens, immer die zugehörende freie Stützlinie desselben zum Grunde gelegt werden.

Die mittlere Wölblinie des Wölbbogens Fig. 13 sei nun im Allgemeinen eine vorgeschriebene Stützlinie, und die der Massenanordnung zwischen den Vertikalen durch den Scheitel H und durch den Endpunct J der mittlern Wölblinie zugehörende freie Stützlinie sei HX. Sie durchschneide die Vertikale durch J im Puncte X und habe in eben diesem ihren Endpuncte den Richtungswinkel β, schliefse also mit einer Horizontale daselbst den Winkel β ein. Für das gesammte Gewicht zwischen H und X gleich W und für den Horizontalschub im Scheitel H der mittlern Wölblinie gleich C ist nun, mit Hinsicht auf die Entwickelungen Seite 15,

für den Richtungswinkel β vom Endpuncte X der freien Stützlinie

$$(1)\quad tg\,\beta = \frac{W}{C},$$

der Druck T nach der Richtung der freien Stützlinie an ihrem Endpuncte X

$$(2)\ T = \frac{W}{\sin\beta} = \frac{C}{\cos\beta},$$

und endlich der lothrechte Abstand Z des Endpunctes X der freien Stützlinie vom Scheitel H der mittlern Wölblinie, nach Seite 18, gleich der Summe der statischen Momente aller Gewichte zwischen den Vertikalen durch H und J, bezogen auf X oder auf die Vertikale durch den Endpunct J der mittlern Wölblinie (welche Summe wir mit $\Sigma\, W$ darstellen wollen), dividirt durch den Horizontaldruck C im Scheitel, nämlich

$$\text{I. } Z = \frac{\Sigma\, W}{C}.$$

Bezeichnen wir ferner, wie bereits oben geschehen ist, den Reibungscoëficienten in den Fugen ab, cd etc. des Pfeilers mit φ, die Mörtelbindung nach der Längerichtung der Fugen für die Flächeneinheit mit a, die Mörtelbindung für die Flächeneinheit winkelrecht gegen dieselbe mit q, den lothrechten Abstand des Endpunctes X der freien Stützlinie von der Kantungslinie durch R mit f, den horizontalen Abstand bei dem Puncte mit l, die Länge RO des Pfeilers durch R mit B, das Gewicht des Pfeilers bis zur Fuge durch R mit Q und den horizontalen Abstand des Pfeilerschwerpunctes von R mit s, dann wird

der Bogenschub in der Nähe des Kämpfers durch die Reibung erhalten, wenn

$$\text{II. } D < \varphi\,(W + P)$$

ist, in welchem Ausdrucke P das über der Verschiebungsfuge stehende Gewicht des Pfeilers darstellt;

ferner wird

der Bogenschub durch die Bindung des Mörtels in der Nähe des Kämpfers erhalten, wenn

$$\text{III. } C < a\,L$$

ist, sofern L die Länge der Mörtelfuge bezeichnet;

endlich bringt der Bogenschub keine Kantung um eine durch R gehende Linie, die winkelrecht auf der Stirnfläche des Bogens steht, zu Stande, wenn

IV. $Cf < s\,.\,Q + l\,.\,W + \frac{1}{2}\,B^2\,q$

ist. Will man die Stabilität des Pfeilers von der Bindung des Mörtels unabhängig machen, dann ist in der letzten Formel nur $q = o$ zu setzen.

Nicht gar selten kommt bei ausgeführten Bögen durch den Schub an den Enden derselben eine Verschiebung des Mauerwerks in der Nähe jedes Bogenendes vor; doch noch häufiger tritt, durch eben diesen Bogenschub, ein Kanten der Pfeiler um eine Linie durch einen Punct *R* ein, die winkelrecht zur Stirnfläche geht.

Vom Bogenschub bewirkt der horizontal gerichtete Seitendruck desselben, nämlich der Horizontaldruck *C*, sowohl die Horizontalverschiebung in der Nähe der Bogenenden, als auch die Kantung der Pfeiler. Es wächst dieser Horizontalschub mit der lichten Spannweite *AC* und wächst ferner mit der Verminderung der Stichhöhe *PB* Fig. 13.

Mit einer Horizontalverschiebung eines Pfeilers in der Nähe des Bogenendes, aber auch mit der Kantung eines solchen, mufs eine Entfernung des obern Pfeilerendes vom Scheitel des Wölbbogens eintreten. Wird diese Bewegung unmöglich gemacht, dann kann nicht leicht eine Verschiebung in der Nähe des Bogenendes, eine Kantung des Pfeilers aber gar nicht erfolgen. Das wirksamste Mittel, das eine Bewegung eines obern Pfeilerendes, bei vorgeschriebener Höhe und Länge, zu verhindern vermag, besteht in einer Verbindung desselben mit dem gegenüberliegenden Pfeilerende, also in einer Aneinanderschliefsung der Pfeilerenden eines dazwischen gelegenen Bogens. Dieses Mittel, die obern Pfeilerenden mit einander zu verbinden, kann in einer über dem Pfeiler liegenden Mauer, deren Mörtelverband die Längenverschiebung zu verhindern vermag, oder in eisernen Stäben, Anker genannt, bestehen.

Der beiderseitige Schub eines Bogens wird die etwa in der Höhe *NEO* liegende Verbindung seiner Pfeiler allenthalben unter gleicher Spannung zu zerreifsen streben. Besteht die Verbindung der Pfeiler eines Bogens in einer Mauer, dann ist deren Querschnitt in der Nähe des Scheitels am kleinsten, also auch unter übrigens gleichen Umständen hier deren Fähigkeit, dem Zerreifsen zu widerstreben, am geringsten. Diese Bemerkung zeigt uns, dafs die Uebermauerung eines Bogens, wenn sie auf Verminderung des Schubs

wirken soll, ganz besonders in der Nähe des Scheitels mit einem um so besser bindenden Materiale gemauert werden mufs, je geringer deren Querschnittsfläche ist.

Eiserne Anker sind vortreffliche Mittel, den Bogenschub aufzuheben. Um sie hierfür immer gleich wirksam zu erhalten, sind sie gegen Oxydation zu schützen, was für ewige Zeiten Schwierigkeiten bietet. Ungeachtet dieses Umstandes sind eiserne Anker immer zu empfehlen; sie werden sich ganz besonders dann eignen, wenn zu Vermauerung der Steine ein Bindematerial, wie es der gewöhnliche Kalkmörtel liefert, angewendet wird, das im Durchschnitte erst nach ¼ Jahrhundert vollständig bindet und erhärtet. Die eisernen Anker brauchen nicht die beiderseitigen Pfeiler eines Bogens unmittelbar zu verbinden, sondern es genügt, wenn sie in einiger Entfernung vom Scheitel in der Hintermauerung des Bogens, gehörig befestigt, endigen.

Bei Brückenbögen kann durch Trottoirplatten, durch Simsplatten, durch steinerne Balustraden, durch eiserne Geländer etc., in Verbindung mit den beiderseitigen Stirnmauern, sehr wesentlich auf Verminderung des Bogenschubs eingewirkt, ja derselbe vollständig aufgehoben werden.

Nun fragt es sich: Welche Cohäsion c mufs der Anker, oder die Mauer, oder überhaupt das Mittel haben, das zur Verbindung zweier Pfeilerenden, oberhalb des dazwischen befindlichen Bogens, angewendet wird, um den Schub des letztern aufheben zu können? Und was entsteht hieraus für die untern Pfeilerenden? Die Beantwortung beider Fragen kann man sich schwer, aber auch leicht machen. Wir wollen das Letztere wählen.

Auf Seite 60 fanden wir, wenn der Pfeiler nicht um R kanten soll, die Bedingungsgleichung

$$Cf < sQ + lW + \tfrac{1}{2} B^2 q.$$

Die Kantung um R, also der Bruch des Bogens, beginnt noch nicht, wenn

$$Cf = sQ + lW + \tfrac{1}{2} B^2 q$$

wird, aber der Bruch leitet sich unfehlbar ein, wenn

$$Cf > sQ + lW + \tfrac{1}{2} B^2 q$$

ist. In dem oben gedachten Falle kann der Bogenbruch durch einen Zusammenhang der Pfeiler durch oder über den Scheitel des Bogens

weg verhindert werden. Dieser Zusammenhang möge in der Linie ON in einem lothrechten Abstande $OX = f'$ vom Endpuncte X der dem Bogen zugehörenden freien Stützlinie stattfinden und einem Drucke c widerstehen. Soll dieser Zusammenhang das in der letzten Gleichung nicht mehr bestehende Gleichgewicht wieder herstellen, dann mufs

$$Cf = sQ + lW + \tfrac{1}{2} B^2 q + (f + f') c$$

sein, d. g.

$$(3) \quad c = \frac{Cf - sQ - lW - \tfrac{1}{2} B^2 p}{f + f'}.$$

Um das Bestehen des Bogens sicher zu stellen, mufs stattfinden

$$\text{V.} \quad c > \frac{Cf - sQ - lW - \tfrac{1}{2} B^2 q}{f + f'}.$$

Wie grofs auch c sei, ein gröfserer Werth desselben, als ihn die Gleichung (3) angiebt, wird im unbelasteten Zustande des Bogens nicht beansprucht.

Bei einer sich ergebenden Bewegung des Pfeilers erscheint die Kante durch R als Drehachse eines einarmigen Hebels. Die an demselbenden wirkenden und horizontal gerichteten Drücke sind C und c. Nach den Gesetzen des einarmigen Hebels ist defshalb der Horizontalschub, den die Achse oder Kante durch R, also die Pfeilerbasis durch R erleidet, mit welchem folglich auch die beiden einem Bogen zugehörenden Pfeilerfüfse von einander gedrängt werden,

$$d = C - c = C - \frac{Cf - sQ - lW - \tfrac{1}{2} B^2 q}{f + f'}, \text{ d. g.}$$

$$\text{VI.} \quad d = \frac{Cf' + sQ + lW + \tfrac{1}{2} B^2 q}{f + f'}.$$

Dieser Schub kann die Pfeilerbasis verrücken, woraus, im Falle diefs geschieht, der Bogenbruch mittelbar erfolgt. Soll kein Gleiten eines Pfeilers an seiner Basis eintreten, also hierdurch kein mittelbarer Bogenbruch bedingt werden, dann mufs das Hindernifs der Pfeilerverschiebung mindestens so grofs als d, für einen sichern Stand aber gröfser als d sein.

Der ungünstigste Fall für den sichern Pfeilerstand in Beziehung auf die Basis tritt ein, wenn sich die letztere durch die Reibung zu

erhalten hat. Den hier bestehenden Reibungscoëfficienten wollen wir mit φ' bezeichnen. Die Last, welche die Pfeilerbasis trägt, ist, zufolge der Bezeichnung auf Seite 61 und 62,

$$W + Q.$$

Die Reibung an der Pfeilerbasis wird dessen Bestreben, auszugleiten, verhindern, wenn

$$\varphi' (W + Q) > d, \text{ d. g.}$$

für den sichern Stand der Pfeilerbasis durch die Reibung

$$\text{VII.} \quad \varphi' (W + Q) > \frac{Cf' + sQ + lW + \frac{1}{2} B^2 q}{f + f'}.$$

Bezieht man die letzte Gleichung auf die Gründungsfläche eines Pfeilers, dann wird q nahe o gesetzt werden können.

Im Vorstehenden sind die wichtigsten jener Umstände erörtert, die den sichern Stand eines Pfeilers bedingen, gegen den sich ein Bogen anlehnt. Häufig aber stützen sich zwei Bögen in einer Ebene gegen einen Pfeiler, wefshalb uns jetzt die Beantwortung der Frage zu beschäftigen hat: Welche Wirkung üben die Schübe zweier Bögen gegen ihren gemeinschaftlichen Pfeiler?

Sind die Bögen vollkommen gleich, welche sich gemeinschaftlich gegen einen Pfeiler stützen, dann können die von beiden kommenden und auf den Pfeiler übergehenden Schübe T und t keine andere Wirkung, als vertikale Belastung des letztern bedingen; denn jeder Bogenschub giebt den Vertikaldruck

$$T \sin \beta = W,$$

beide belasten also den Pfeiler mit

$$2\,W;$$

jeder Bogen giebt ferner den Horizontalschub

$$T \cos \beta = C$$

und es wird der Horizontalschub des einen Bogens von dem des andern aufgehoben, weil sie in gleicher Höhe gegen einander gerichtet sind. Somit erleidet der Pfeiler, gegen den sich zwei ganz gleiche Bögen in ganz gleicher Höhe stützen, nur einen Vertikaldruck, der dem Gewichte der Masse gleich ist, die sich vom Pfeiler aus bis zum Scheitel jedes Bogens hin befindet. Doch anders ist die Wirkung des Schubs zweier Bögen, die sich gegen einen Pfeiler stützen, wenn sie ungleich grofs sind, oder

wenn sie sich in ungleicher Höhe an den gemeinsamen Pfeiler anschliefsen.

Eine Drehung eines Pfeilers um eine Kante seiner Basis, die winkelrecht zur Stirnfläche steht, kann nicht eintreten, wenn sich gegen denselben zwei Bögen, wie in Fig. 14 angedeutet ist, anlehnen, weil die mit einer solchen Drehung nothwendig in Verbindung stehende Bewegung des obern Pfeilerendes durch die übliche Bauform, namentlich bei Brückenbögen, verhindert wird. Um diefs nachzuweisen, sei, wie bisher, der gesammte Druck, den der gröfsere Bogen in Fig. 14 gegen den Pfeiler unter dem Richtungswinkel β angiebt, gleich T und R der Punct, durch welchen die Drehachse liegt. Der horizontale Abstand des Endpunctes X der freien Stützlinie des gröfsern Bogens von der Drehachse durch R sei l und der vertikale Abstand eben dieser Puncte gleich f. Das statische Moment der Drehung um die Achse durch R, welches der Schub T hervorbringt, setzt sich aus dem Horizontalschub C und aus dem Vertikaldruck W, beide in X aus T entspringend, so zusammen, dafs das Moment der Drehung um die Achse durch R von X gegen X_1 hin ist

$$Cf - Wl.$$

Diesem Momente wirkt der Schub des kleinern Bogens entgegen. Der Endpunct der freien Stützlinie dieses Bogens sei X_1, der lothrechte Abstand derselben von R gleich f_1 und der horizontale l_1. Ferner sei der gesammte Schub des kleinern Bogens T', sein Richtungswinkel β', der aus T' in X_1 entspringende Horizontaldruck gleich C_1 und der zugehörende Vertikaldruck W_1. Nach dieser Bezeichnung ist das Moment, welches der Bogenschub T', bezogen auf R, übt

$$C_1 f_1 - W_1 l_1.$$

Dieses Moment wirkt, wie schon gesagt, dem erstern entgegen, so dafs das bleibende Moment des Bogenschubs, bezogen auf R, von X gegen X_1 hin beträgt

$$Cf - C_1 f_1 - (Wl - W_1 l_1).$$

Einer Kantung des Pfeilers um R wirkt das Gewicht des Pfeilers, wirkt die winkelrechte Adhäsion der Fläche RA entgegen. Nach den frühern Bestimmungen, und zwar auf Seite 59 und 60, ist das Moment des Pfeilergewichtes, bezogen auf R,

$$Qs,$$

das Moment der winkelrechten Adhäsion

$$\tfrac{1}{2} B^2 q.$$

Mit Berücksichtigung des Pfeilergewichtes und der Adhäsion verbleibt ein Moment der Drehung um die Achse durch R in der Richtung von X gegen X_1 hin

$$Cf - C_1 f_1 - (Wl - W_1 l_1) - Qs - \tfrac{1}{2} B^2 q.$$

Setzen wir nun den Druck gleich c, der in horizontaler Richtung von X_1 gegen X hin in dem lothrechten Abstande f' von X angelegt werden mufs, um die Kantung des Pfeilers um R zu hindern, dann wird, weil der lothrechte Abstand des Druckes c von R ist $f + f'$

$$c(f + f') = Cf - C_1 f_1 - (Wl - W_1 l_1) - Qs - \tfrac{1}{2} B^2 q, \text{ d. g.}$$

$$\text{VIII. } c = \frac{Cf - C_1 f_1 - (Wl - W_1 l_1) - Qs - \tfrac{1}{2} B^2 q}{f + f'}.$$

Dieser zur Erhaltung der Ruhe oder des sichern Standes des Pfeilers, also auch der Bögen erforderliche Druck kann durch eine Verbindung der obern Pfeilerenden, von welchen der gröfsere Bogen eingeschlossen wird, geboten werden. Besteht die eben gedachte Verbindung nicht, dann wird der von X gegen X_1 hin gerichtete Horizontaldruck sich in der mittlern Höhe des kleinern Bogens in horizontaler Richtung fortpflanzen und so an einen Endpfeiler oder an ein Widerlager kommen, wo derselbe die genügende Stützung findet. Ist aber eine solche endliche Stützung für den oben gefundenen Druck vorhanden, wie diefs bei Brücken immer der Fall ist, dann wird eben dieser Druck nur in diesem Widerlager Stützung suchen und die Verbindung der Pfeiler, deren wir oben gedachten, gar nicht in Anspruch nehmen. Mit diesem Endwiderlager, welches den oben gefundenen Druck c stützt, mufs aber auch das Bestreben des Pfeilers, um einen Punct R sich zu drehen, völlig aufgehoben werden, was wir eben als Behauptung aufstellten.

Auf das Perpendikel durch die Kantungslinie in R wirken nach der einen Seite die Horizontaldrücke C und c, nach der entgegengesetzten aber wirkt der Horizontaldruck C_1. Der horizontal gerichtete Druck d, der hieraus, mit Hinsicht auf die Gesetze des einarmigen Hebels, für die Ebene durch den Kantungspunct entspringt, ist,

$$d = C + c - C_1$$

oder, wenn man hierein den oben für c gefundenen Werth setzt,

$$\text{IX.}\quad d = C - C_1 + \frac{Cf - C_1 f_1 - (Wl - W_1 l_1) - Qs - \tfrac{1}{2} B^2 q}{f + f'}.$$

Der Verschiebung d der Basis eines Pfeilers, gegen den sich, wie in Fig. 14 angedeutet ist, zwei ungleiche Bögen stützen, wirkt mindestens die Reibung entgegen. Die Last nun, welche die Pfeilerbasis in Fig. 14 trägt, ist

$$W + W_1.$$

Setzen wir den ihr zugehörenden Reibungscoëfficienten gleich φ', dann fordert der sichere Stand des Pfeilers durch die Reibung bedingt

$$(W + W_1)\,\varphi' > d, \text{ d. g.}$$

$$\text{X.}\quad (W + W_1)\,\varphi' > \frac{(C - C_1)(f + f') + Cf - C_1 f_1 - (Wl - W_1 l_1) - Qs - \tfrac{1}{2} B^2 q}{f + f'}.$$

Den Pfeiler in Fig. 14, gegen welchen sich zwei ungleich groſse Bögen anlehnen sollen, haben wir uns in seinen einzelnen Theilen unverschiebbar, gleichsam aus einem Stücke gedacht. Diese Annahme widerstreitet der Praxis nicht; denn bei dichter Mauerung bedingt die Reibung des Materials, bei der Vermauerung mit Mörtel aber dieser einen Verband der einzelnen Steine, der die gemachte Voraussetzung für den Bedarf von Zusammenhang als völlig zulässig erscheinen läſst. Uebrigens kann ein Pfeiler, der mit einem langsam und erst spät völlig bindenden Mörtel aufgeführt wird, bis dahin durch Zuganker von Eisen in der erforderlichen Weise fest zusammengeschlossen werden. Hat man die Wahl zwischen eisernen Ankern und einem Mörtel, der innerhalb der Zeit der Herstellung des Pfeilers und der Vollendung der Bögen gehörig erhärtet, dann wird der Mörtel immer den Vorzug verdienen, weil die Wirkung der Anker, wegen ihrer Verlängerung und Verkürzung bei Erhöhung und Erniedrigung der Temperatur, geändert wird, und weil nicht selten ein völliges Zerreiſsen derselben bei starker Kälte eintritt.

Zwölfter Abschnitt.

Ueber die Richtung der Wölbfugen.

Es ist Gebrauch, die Richtung der Wölbfugen gewölbter Bögen winkelrecht zur zugehörenden Richtung der innern Wölblinie zu nehmen, und es wird derselbe bei der practischen Ausführung so streng gehandhabt, dafs hieraus der Laie die Meinung schöpft, es sei eben diese Richtung der Wölbfugen für das Bestehen eines gewölbten Bogens unerläfslich. In wie weit die eben genannte Meinung gegründet ist, wollen wir im gegenwärtigen Abschnitte untersuchen.

Gewölbte Bögen pflanzen, wie wir gesehen haben, Druck in der Richtung ihrer mittlern Wölblinie fort. Wenn die letztere als freie Stützlinie wirkt, wird der in ihrer Richtung vorhandene Druck als alleiniger anzusehen sein, der für den Bogen überhaupt besteht; durch eine Fuge des letztern kann folglich auch nur der Druck hindurchgehen, der in der zugehörenden Stelle der freien Stützlinie vorhanden ist.

Denken wir uns die mittlere Wölblinie eines Bogens als vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung, dann wird ein in einem Puncte derselben befindlicher Wölbstein den dort bestehenden Druck nach der Richtung der mittlern Wölblinie, zugleich aber auch einen gewissen Horizontaldruck erleiden. Für den letztern leistet, gemäfs der Annahme oder unter Umständen, die Hintermauerung genügenden Widerstand, wefshalb alsdann eine Verschiebung des gedachten Wölbsteins nur durch den Druck bewirkt werden kann, der in der Richtung der mittlern Wölblinie besteht.

Tritt endlich die mittlere Wölblinie eines Bogens als vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung auf, dann empfängt der in einem Puncte der letztern befindliche Wölbstein nicht allein Drück in der Richtung der mittlern Wölblinie, sondern es geht durch ihn noch ein Theil des Tangentialdruckes hindurch, den über dem Wölbsteine nach dem Scheitel hin liegende Puncte der mittlern Wölblinie abgesetzt haben. Obschon der zuletzt genannte Druck durch den Wölbstein geht, so kann er doch nicht auf eine

Verschiebung derselben einwirken, wenn ihn die Hintermauerung in sich aufnimmt. Eine Verschiebung des gedachten Wölbsteins wird somit nur durch den Druck veranlafst werden können, der in der Richtung der mittlern Stützlinie vorhanden ist.

In den drei besondern Fällen der Wirksamkeit, in welcher wir uns die mittlere Wölblinie eines Bogens nach und nach dachten, bleibt immer nur der Druck, der in der Richtung jener vorhanden ist, als auf eine Verschiebung der Wölbsteine einwirkende Ursache übrig und es fragt sich jetzt: Wie müssen die Steine eines Bogens an einander gelagert werden, um der Fortpflanzung des Druckes nach der Richtung der mittlern Wölblinie kein Hindernifs zu bieten?

In den Figuren 15 und 16 mögen A und B Steine sein, deren Berührungsflächen eine horizontale Richtung haben. Ein lothrecht gegen den Stein A Fig. 15 angelegter Druck D_n bedingt keine Bewegung desselben über B weg. Derselbe Druck aber kann, wie in Fig. 16 angedeutet ist, unter dem Winkel ψ zur Richtung der Berührungsflächen beider Steine auf A geübt, eine Verschiebung des letztern über B bedingen. Die Erfahrung lehrt uns, dafs eine solche Verschiebung des Steines A um so leichter erfolgt, je glätter die Berührungsflächen sind.

Nach den Grundlehren der Statik entspringt aus dem Drucke D_n Fig. 16 ein solcher winkelrecht gegen die Berührungsfläche beider Steine von

$$(1)\quad D_n \sin \psi$$

und ein zweiter nach der Richtung der Berührungsfläche von

$$(2)\quad D_n \cos \psi.$$

Der letzte der eben angeführten Drücke äufsert das Bestreben, den Stein A in der Richtung seiner Lagerfläche über B wegzuziehen, der erstere dagegen drückt den Stein A gegen B. Der Zug in (2) wird nur dann eine Verschiebung des Steines A zu bewirken vermögen, wenn er gröfser als die Reibung ist, die sich an der Berührungsfläche zeigt. Diese Reibung entspringt aber aus dem Drucke, mit welchem die Berührungsflächen winkelrecht gegen einander gepreſst werden, also nur aus dem Drucke in (1), wenn von dem Eigengewichte des Steines A abgesehen wird. Für die Bewegung mufs defshalb, wenn der Reibungscoëfficient mit φ bezeichnet wird, bestehen

$$D_n \cos \psi > \varphi D_n \sin \psi,$$

und, soll eine Verschiebung nicht entstehen,

$$D_n \cos \psi < \varphi D_n \sin \psi, \text{ d. g.}$$

$$\text{I. } \cot g \psi < \varphi.$$

Der Zahlenwerth des Reibungscoëfficienten φ hängt von der Glätte der sich berührenden Steinflächen ab. Bei auf einander geschliffenen Flächen beträgt derselbe im trockenen Zustand

für Ziegelsteine 0,65

„ Sandsteine 0,7.

und als mittlern kleinsten Werth für die Fugenflächen der Wölbsteine kann

$$\varphi = 0{,}6$$

angenommen werden.

Den letzten Werth des φ in I. gesetzt giebt

$$\cot g \psi < 0{,}6.$$

Der Winkel ψ, dessen Cotangente 0,6 beträgt, ist nun $59^0\ 2'$. Also, weil die Cotangente abnimmt, wenn der Winkel wächst:

Irgend ein Druck D_n wird bei einem Reibungscoëfficienten von 0,6 den Stein *A* Fig. 16 nicht über *B* weg zu schieben vermögen, wenn der Winkel ψ, unter welchem der Druck gegen die Verschiebungsfläche gerichtet ist, mehr als

$$59^0\ 2'$$

beträgt.

Der für die eben gemachte Bestimmung zum Grunde gelegte Reibungscoëfficient von 0,6 möge auch für die Lagerfläche der Wölbsteine des Bogens Fig. 17 bestehen. Es sei *AL* ein Wölbstein dieses Bogens und *AB* dessen untere Lagerfuge. Der Druck, den dieser Wölbstein empfängt, hat die Richtung der mittlern Wölblinie in *E*; soll sich der Wölbstein in der Richtung der Fuge *AB* nicht niederwärts verschieben können, dann mufs der Winkel

ψ gröfser, höchstens gleich sein $59^0\ 2'$,

was wir durch

$$\psi \geqq 59^0\ 2' \text{ andeuten;}$$

es mufs also der Winkel *AEC*, den die Wölbfuge *AB* mit der auf der Richtung der mittlern Wölblinie winkelrecht stehenden Linie *CD* einschliefst, weniger als

$90^0 - 59^0$ oder weniger als 31^0 betragen.

Ein anderer Wölbstein sei *FM* Fig. 17 und seine untere Fuge *FG*. Soll sich auch dieser Stein durch den in der Richtung der mittlern Wölblinie empfangenden Druck nicht in der Fugenrichtung *FG* über den untern Wölbstein fortschieben, dann mufs abermals der Winkel

$$\psi > 59^0,$$

also der Winkel *GKJ*, den die Fuge mit der Linie *JKH* einschliefst, die winkelrecht auf der mittlern Wölblinie steht, kleiner als

$$31^0 \text{ sein.}$$

Wie glatt auch die Fugenflächen zweier Wölbsteine sein mögen, so wird doch keine Verschiebung derselben nach der Richtung jener eintreten können, wenn sie winkelrecht auf der zugehörenden Richtung der mittlern Wölblinie stehen. Das eben Angeführte in Verbindung mit dem vorher Entwickelten liefert folgende Beantwortung der oben gestellten Frage in Beziehung auf die Richtung der Wölbfugen der Wölbsteine:

Für vollkommen glatte Flächen der Wölbsteine müssen die Wölbfugen durchgängig hinterstützter gewölbter Bögen eine winkelrechte Richtung zur mittlern Wölblinie haben, doch kann man von dieser Richtung um so mehr abweichen, je rauher die Fugenflächen sind, ohne eine Verschiebung der Wölbsteine befürchten zu müssen oder, ohne den Bogen unfähig zu machen, Druck in seiner Richtung fortzupflanzen. Für einen Reibungscoëfficienten von 0,6 ist noch eine Fugenrichtung zulässig, die mit der Richtung der mittlern Wölblinie einen Winkel von 60^0, oder mit der zur mittlern Wölblinie winkelrechten Richtung einen Winkel von 30^0 einschliefst.

Der Gebrauch, die Wölbfugen eines Wölbbogens winkelrecht zur innern Wölblinie zu richten, bedingt zwar nicht im Allgemeinen eine ebenfalls winkelrechte Richtung der Fugen zur mittlern Wölblinie, doch ist die entstehende Abweichung eine so geringe, dafs damit die Grenze, welche der Reibungscoëfficient der Fugenflächen gestattet, wohl niemals überschritten wird. Die übliche Richtung der Wölbfugen kann, zufolge des Vorstehenden, nicht nur als eine zulässige, sondern als eine empfehlenswerthe bezeichnet werden. Indefs giebt es auch Fälle, in welchen mit Nutzen eine nahe bis zur

Grenze hinreichende Abweichung der Fugenrichtung von der winkelrechten zur mittlern Wölblinie mit dem besten Erfolg in Anwendung gebracht werden kann.

Nach dem Erörterten wird man, wie in Fig. 18 geschehen ist, die Wölbfugen eines kreisförmigen Stichbogens, statt nach dem Mittelpuncte *C*, sämmtlich nach einem Puncte *D* oberhalb des letztern ziehen können. Bei dieser Anordnung der Fugen erscheinen die Wölbsteine spitzer, als sie sich nach dem Mittelpuncte *C* gerichtet ergeben, was bei sehr flach gespannten Bögen und bei nicht sorgsamer Ausführung das Herausfallen einzelner Wölbsteine verhindert.

Die Lage des Punctes *D*, nach welchem sich die Fugen hinziehen, wird durch den Winkel *CAD*, und der gröfste zulässige Werth derselben durch den Winkel ψ bestimmt, um welchen die Fugenrichtung von der winkelrechten Richtung zur mittlern Wölblinie, nämlich von *CA*, abweichen darf. Für einen Reibungscoëfficienten von 0,6 ist der gröfste Werth des Winkels *CAD*, wie wir oben fanden, nahe 30^0.

Die Hintermauerung gewölbter Brückenbögen ist nicht unwesentlich für deren Bestehen, insofern Bogenschub in dieselbe übergeht; aber auch deren Anschlufsrichtung an den Bogen kann nicht immer ganz beliebig sein.

Ist die mittlere Wölblinie eines Bogens eine freie Stützlinie für die zu stützenden Massen, findet folglich nur Druck in der Richtung derselben statt, dann mufs die Form ganz beliebig sein können, in der sich die Hintermauerung an den Bogen anschliefst. Soll dagegen die mittlere Wölblinie eines Bogens als vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung wirken, dann wird der zuverlässigste Uebertrag des horizontal gerichteten Bogenschubs erfolgen, wenn die Aufsenflächen der Wölbsteine, wie diefs in Fig. 19 angedeutet ist, sich mit vertikal gerichteten Flächen an die Hintermauerung anlehnen. Die nämliche Form des Anschlusses der Wölbsteine an die Hintermauerung, welche in Fig. 19 dargestellt ist, erscheint noch als völlig geeignet, wenn die mittlere Wölblinie eines Bogens als vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung wirkt.

Den vorstehenden Betrachtungen über die Richtung der Lagerfugen der Wölbsteine liegt die Annahme zum Grunde, der Bogen sei durchgängig hinterstützt. Es giebt aber auch Bögen, wie wir sehen

werden, die nur theilweise hinterstützt, die z. B. nur zwischen zwei Stirnmauern eingeschlossen sind. Ein solcher kann offenbar den Druck nicht unmittelbar absetzen, der über seine Richtung hinausfällt.

Um zu erkennen, wie bei einem Bogen mit nur theilweiser Hinterstützung die Drücke gestützt werden, die nicht in dessen Richtung fallen, wollen wir uns in Fig. 20 $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$, $A_2B_2C_2D_2E_2$, $A_3B_3C_3D_3E_3$ als vier völlig gleiche und in ihren Ecken auch gleich belastete Polygone denken, von welchen jedes innerhalb einer lothrechten Ebene liegen soll. Die Eckpuncte dieser Polygone wollen wir uns ferner mit steifen Linien verbunden denken, die sämmtlich winkelrecht die lothrechte Ebene durchschneiden mögen, innerhalb welcher die Polygone liegen, und ferner endlich nehmen wir noch an, es seien die äufsern Polygone $ABCDE$ und $A_3B_3C_3D_3E_3$ durch steife und unverschiebbare lothrecht gerichtete Ebenen hinterstützt.

Sind die Polygone, wie wir voraussetzen, vorgeschriebene Stützlinien für die in den Eckpuncten gedachten Gewichte, dann wird in jeder Ecke eines jeden Polygons, aufser im Scheitel, ein Ueberdruck (Abschnitt 5 Seite 24) entstehen. Diese Ueberdrücke in den Eckpuncten der äufsern Polygone $ABCDE$ und $A_3B_3C_3D_3E_3$ finden sofort durch die steifen und unverschiebbaren lothrechten Ebenen, in welchen sie liegen, die nöthige Hinterstützung. Die Ueberdrücke in den Eckpuncten der übrigen Polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$ und $A_2B_2C_2D_2E_2$ aber gehen zunächst auf die steifen Linien DD_3, EE_3 über und treten als Belastung derselben auf. Enden eben diese Linien in den mehr erwähnten steifen und lothrecht gerichteten Ebenen und werden sie von diesen gehalten, dann gehen die Ueberdrücke von den Eckpuncten der innern Polygone durch die steifen Verbindungslinien AA_3, BB_3.... ebenfalls auf die äufsern Begrenzungs- oder Hinterstützungsebenen über.

Beziehen wir die vorstehenden Betrachtungen auf einen materiellen Bogen, dessen Endflächen in Stirnmauern eingebunden sind: so überzeugen wir uns, dafs der Bogen den Druck, der nicht in seine Richtung fällt, von allen Puncten aus, wo sich ein solcher bildet, durch seine eigene Steifigkeit auf die Stirnmauern überträgt.

Die Fähigkeit eines materiellen, in seinen Eckpuncten gestützten

Körpers, winkelrecht gegen seine Richtung auf ihn einwirkende Drücke zu stützen, hängt von seinem Querschnitte und von seiner Länge innerhalb der Stützpuncte ab. Ein Wölbbogen, der in unverschiebbare Steinmauern eingebunden ist, kann somit noch durch die Ueberdrücke innerhalb der letztern durch Aufbiegung zerbrochen werden. Bei Brückenbögen kann indefs dieser Fall kaum vorkommen: denn ist der gewölbte Bogen nur durch Stirnmauern hinterstützt, dann wird derselbe noch mit Boden hinterfüllt, der das Aufbiegen oder Aufsteigen des Bogens in Folge der Ueberdrücke verhindert. Ziehen sich aber aufser den Stirnmauern noch andere als Hinterstützung wirkende Mauern über den Bogen weg, dann wird immer eine so geringe Breite des letztern frei oder ohne Hinterstützung bestehen, dafs dessen Steifigkeit für die Ueberdrücke mehr als genügt.

Weil nur theilweise durch Mauern hinterstützte Bögen Druck in ihrer Richtung fortpflanzen, den Ueberdruck aber in tangentialer Richtung, nämlich auf dem kürzesten Wege und ebenfalls in der Richtung des Bogens auf die Hinterstützungsmauern übertragen, also nur Druck in der Richtung des Bogens verbleibt: so wird die beste Richtung der Wölbbfugen auch bei nur theilweise hintermauerten Bögen jene sein, die winkelrecht auf der Richtung der mittlern Wölblinie des Bogens steht. Was bereits oben über die Abweichung von der wahren Fugenrichtung gesagt ist, gilt auch noch für nur theilweise hintermauerte Bögen, d. h. bei einem Reibungscoëfficienten des Wölbmaterials von 0,6 kann die Richtung der Wölbfugen von der für vollkommen glatte Fugenflächen nöthigen um nahezu 30^0 abweichen, bevor eine Verschiebung eintritt. Von der Bindung des Mörtels bei Wölbbögen mufs man in der Regel völlig absehen, weil sie bei der Aufführung derselben durch die Senkung der hölzernen Lehrgerüste gar nicht selten eine Unterbrechung erleidet. Verhindert man die Senkung der Lehrgerüste völlig, dann wird in Folge des Verbandes, den die Wölbsteine durch den Mörtel erhalten, bisweilen eine noch gröfsere Abweichung der Fugenrichtung zulässig werden, als sie die Reibung gestattet.

Dreizehnter Abschnitt.

Von der Richtung der Lager- und Stofsflächen der Wölbsteine gerader Bögen.

Unter der Lagerfläche eines Steines in einer Mauer begreifen wir jene Fläche desselben, mit der er sein eigenes Gewicht, so wie die auf ihm liegende Last stützt, unter Stofsflächen dagegen jene Seitenflächen, mit welchen er angrenzende gleich hoch gelegene Steine berührt. Dieselben Benennungen trägt man auch auf die Wölbsteine über; man nennt die Fläche eines solchen, mit der er sich gegen den darunter befindlichen lehnt, dessen Lagerfläche, ferner jene, mit welchen er angrenzende Steine berührt, dessen Stofsflächen. In Fig. 19 ist für den Wölbstein *abc* die Linie *ab* die Wölbfuge *bd*, die Lagerfuge und die Fläche desselben, die durch die Linien *ab* und *bd* zur Hälfte begrenzt wird, dessen Lagerfläche. Die Linien *de* und *fg* sind die Stofsfugen und die Flächen des Wölbsteins, zu welchem sie gehören, die Stofs- oder Anstofsflächen des letztern.

Die Lagerflächen an einander stofsender Wölbsteine eines Tonnengewölbes bilden immer eine zusammenhängende Fläche, wie sie von *abc* zur Hälfte begrenzt wird, die Stofsfugen oder Stofsflächen aber wechseln. Ohne die zuletzt genannte Einrichtung würden die Wölbbögen als für sich bestehende Ringe erscheinen, während durch eine Versetzung der Stofsfugen nahezu dieselbe Wirkung erzeugt wird, die die Herstellung jeder Wölbschicht, wie *ahicb*, aus einem Steine gewährt oder, die Versetzung der Wölbfugen wirkt der Trennung eines gewölbten Bogens in vertikalen Ebenen parallel zu den Stirnflächen entgegen.

Die Richtung der Wölbfuge *ab* eines Wölbsteins ist unabhängig von der der Lagerfuge, beide aber bestimmen die Richtung der Lagerfläche desselben. Wir legen uns jetzt die Fragen vor: Haben die Lagerflächen der Wölbsteine eines Wölbbogens Einflufs auf denselben? Und, wenn diese Frage bejaht werden mufs: Welche Lage wird der Lagerfuge eines Wölbsteins zu geben sein, um deren Einwirkung am unschädlichsten zu gestalten?

Zur umfassenden Beantwortung dieser Fragen müssen wir weit ausholen.

Bekanntlich ist eine im Puncte A Fig. 21 aufgehangene Last Q von diesem Puncte aus in zwei beliebigen Richtungen AG und AF, wenn nur diese und die Richtung von Q durch A in einerlei Ebene liegen, zu stützen. Wird Q durch die Linie AD dargestellt, und beschreibt man damit als Diagonale das Parallelogramm BC, dann entspringt aus Q nach AG der Druck AB und nach AF der Druck AC. Die beiden Drücke AB und AC sind zusammen offenbar gröfser als AD und ihre Summe wird AD um so mehr übertreffen, je gröfser der Winkel CAB ist. Durch Rechnung erhält man für

$$\text{den Druck } AB = \frac{Q \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)},$$

$$\text{„ „ } AC = \frac{Q \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

In Fig. 22 wollen wir uns ferner eine Last Q in einem Puncte A aufgehangen denken, der durch beliebig viel Linien AB, AF, AC und AD, AG, AE zu stützen sein soll, die sämmtlich in zwei Linien CB und ED enden, welche letztere sich in einer horizontalen Ebene befinden mögen. Offenbar ist Q zu stützen

durch die Linien AE und AB,
„ „ „ AD „ AC,
„ „ „ AG „ AF etc.

insofern sie mit Q in einer Vertikalebene liegen.

Ohne Feststellung näherer Bedingungen läfst es sich nicht entscheiden, welche Linien Q allein oder vorzugsweise stützen. Nur soviel wissen wir, dafs, wenn die Stützung der Last Q von je zwei Linien erfolgt, die in den unverschiebbaren Linien ED und CB enden, der in jene übergehende Druck mit dem Winkel zunimmt, den sie bei A mit einander einschliefsen, und dafs es folglich zwei Seiten geben mufs, die, wenn sie Q allein stützen, einen gröfsern Druck in sich aufnehmen müssen und dafs es ebenso zwei andere geben mufs, die einen kleinern Druck erhalten, als je zwei andere die Last Q stützende Linien. Stehen sich die Puncte G und F am nächsten, G und B dagegen am entferntesten unter allen Puncten auf ED und BC, ist folglich der Winkel FAG kleiner, dagegen BAE gröfser

als der Winkel, den zwei andere in einer Vertikalebene durch *A* liegende Stützlinien bilden, dann ist der Druck, den die Seiten *AF* und *AG* erleiden, am kleinsten, jener aber, der in die Seiten *AB* und *AC* übergeht, am gröfsten unter den Seiten, die möglicher Weise die Last *Q* stützen können.

Alle Linien nun, welche von *BC* und *ED* aus nach *A* hin denkbar sein sollen, mögen sich in einem sehr geringen Grade zusammendrücken oder sich verkürzen, indem man sie belastet. Doch wollen wir damit den Begriff der Elasticität nicht verbinden. Also nicht elastisch, d. h. nicht im Verhältnifs der Belastung sollen sich die Stützlinien verkürzen, sondern überhaupt nur um ein gewisses ihrer Länge proportionales Mafs sollen sie im Augenblicke der Belastung kürzer werden. Diese Annahme zielt auf Wölbbögen hin. Werden die Lehrbögen von solchen weggeschlagen, dann drücken sich die Lagerflächen der Wölbsteine etwas näher an einander oder, der Bogen verkürzt sich, ohne dafs bei einer beliebig grofsen Belastung, die später auf den Bogen kommt, eine ähnliche Erscheinung wiederkehrt.

Sind nun die Linien *AF* und *AG* die kürzesten, von welchen die Last *Q* gestützt werden kann, dann wird, gemäfs der gemachten Annahme der Verkürzung bei dem Eintritt der Belastung, *Q* ausschliefslich von *AG* und *AF* gestützt werden müssen, weil in der Richtung der kürzesten Linie die Zusammendrückung am geringsten ist. Eben diese kürzesten Linien schliefsen, für die von uns zu betrachtenden Fälle, auch den kleinsten Winkel *FAG* ein; die kürzesten Stützlinien erleiden defshalb auch den geringsten Druck durch die Last.

Die zwei Grundlinien *BC* und *ED* mögen eine parallele Lage zu einander haben. Für diese sind die kürzesten Linien, die von *A* aus auf sie gezogen werden können, jene, welche eine Vertikalebene durch *A* bestimmt, die winkelrecht gegen *BC* und *ED* gerichtet ist.

Beziehen wir das Vorstehende auf ein gerades Tonnengewölbe oder, auf einen geraden Brückenbogen von gewöhnlicher Bauart: so erkennen wir, dafs die Stützung des Bogengewichtes in Vertikalebenen erfolgen mufs, die den Stirnflächen parallel sind. Doch ist hierbei die Einwirkung der Richtung der Lagerflächen noch nicht genau erwogen.

Die Lagerflächen der Steine einer Mauer sind in der Regel horizontal, man wird sie jedoch auch, wie in Fig. 23, schief und zwar unter einem Richtungswinkel ξ gegen den Horizont lagern können, ohne ein Rutschen derselben befürchten zu müssen. Belastet man eine so gestaltete Mauer in vertikaler Richtung mit einer Last Q, dann werden sich die Lagerflächen in vertikaler Richtung um eine gewisse Höhe $ab = f$ niedersetzen und dabei um ac winkelrecht nähern. Das Dreieck abc ist ein rechtwinkeliges und Winkel bac gleich ξ, gleich dem Winkel, den die Richtung der Lagerflächen mit einer Horizontale einschliefst. Eben defshalb wird in Fig. 23 das Setzen nach lothrechter Richtung mehr betragen, als die winkelrechte Näherung der Lagerflächen. Für das Setzen winkelrecht gegen die Lagerflächen erhält man

$$f_1 = f \cos \xi,$$

wenn, wie oben, das Setzen in lothrechter Richtung f beträgt. Das Setzen der Lagerfugen ist somit in einer Richtung, die winkelrecht auf der Lagerfläche steht, am kleinsten. Hiermit rechtfertigt sich der bei Aufführung von Mauern übliche Gebrauch, die Lagerflächen der Steine mit Sorgfalt horizontal, die Stofsflächen dagegen vertikal zu legen.

Wenn aber das Setzen in den Lagerflächen nach verschiedenen Richtungen hin sich ungleich zeigt und winkelrecht gegen die Lagerflächen als am geringsten herausstellt, so wird auch die Richtung der Lagerflächen Einflufs auf die Richtung haben müssen, in welcher die Stützung der Wölbmassen erfolgt, und zwar erkennen wir nun:

> dafs für gerade Brückenbögen oder Tonnengewölbe die Lagerflächen der Wölbsteine Richtungen haben müssen, welche eine lothrechte Ebene winkelrecht durchschneiden, dafs also auch die Lagerfugen horizontal und die Stofsflächen vertikal sein müssen, soll sich die Wölbmasse auf dem kürzesten Wege oder in Vertikalebenen stützen, die mit den Stirnflächen des Bogens parallel gehen.

Was wir soeben für die Richtung der Lagerfugen, der Stofs- und Lagerflächen der Wölbsteine als Erfordernifs nachgewiesen haben, dem wird in der Praxis in der Regel mit thunlichster Genauigkeit entsprochen.

Vierzehnter Abschnitt.

Ueber Lehrbögen im Allgemeinen, über die Ausführung und über das Setzen gewölbter Bögen.

Die Bestimmung eines Lehrbogens für einen auszuführenden Bogen ist: die innere Wölbfläche des letztern während der Bauzeit unverändert darzustellen und den gröfsten Theil des Bogengewichtes zu stützen. Je vollständiger ein Lehrbogen dieser Bestimmung genügt, mit um so gröfserer Zuverlässigkeit kann, bei sonst geeignetem Verfahren und tauglichem Material, auf einen sichern Stand des Bogens nach Entfernung des Lehrgerüstes gerechnet werden.

Ein Lehrbogen für gröfsere Wölbbögen umfafst:

1) Die Verschaalhölzer, welche die innere Wölbfläche des auszuführenden Bogens bilden und gegen die sich die Wölbsteine zunächst stützen;

2) die Krümmen oder Biegen, welche die Verschaalhölzer stützen, und

3) das Lehrgerüste im engeren Sinne, das die Krümmen trägt.

Die Krümmen oder Biegen bilden einzelne Unterstützungs-Rippen oder Ringe, in deren Ebene sich der zugehörende Theil des Lehrgerüstes, in Form abgebundener hölzerner Wände oder einzelner Säulen, befindet. Diese Wände oder Säulen mit den zugehörenden Krümmen stehen in lothrechten Ebenen, 1, 2 und mehrere Ellen von einander entfernt, je nach der Gröfse der zu stützenden Massen und der Stärke der verwendeten Hölzer, und werden auch unter sich durch Bänder verbunden.

Für kleine Bögen bestehen die Biegen und das Lehrgerüste aus massiven Bretkörpern u. s. w. und heifsen nur Biegen.

Einige der üblichsten Formen von Lehrbögen mit den zugehörenden Rüstungen für verschieden grofse Spannweiten werden wir später folgen lassen.

Wir gehen nun zur Ermittelung der hauptsächlichsten Anforderungen über, welchen ein Lehrbogen zu entsprechen hat, und schicken als Einleitung die Eigenschaften der schiefen voraus.

Auf einer schiefen Ebene *EF* Fig. 24, die mit der Horizontale *EG* einen Winkel α einschliefst, wird sich unter Umständen ein Kör-

per vom Gewichte L erhalten, oder er wird niedergleiten. Aus seinem Gewichte entspringt ein Druck AC nach der Richtung der schiefen Ebene und ein zweiter AB normal gegen die letztere. Die schiefe Ebene stützt nur den normal gegen sie gerichteten Druck AB, wefshalb der Körper immer in der Richtung derselben mit dem Drucke AC niedergleiten mufs, wenn aus ihrer Berührung mit dem Körper keine Reibung entspringt. Findet aber diese statt, wie es nie anders sein kann, dann wird durch dieselbe der Druck AC nach der Richtung der schiefen Ebene entweder ganz, oder doch theilweise aufgehoben.

Die Rechnung giebt uns

für den Normaldruck des Körpers gegen die schiefe Ebene den Druck

$$(1)\quad AB = L \cos \alpha \text{ und}$$

für den Druck, den das Gewicht des Körpers nach der Richtung der schiefen Ebene übt,

$$(2)\quad AC = L \sin \alpha.$$

Ist die schiefe Ebene nicht fähig zu stützen, dann mufs sie normal zu ihrer Richtung durch den Schwerpunct des Körper, der auf ihr liegt, mit dem Drucke AB hinterstützt werden.

Die gesammte Reibung, die sich in der Richtung EF der schiefen Ebene als Bewegungshindernifs ergiebt, ist

$$\varphi L \cos \alpha,$$

wenn mit φ der Coëfficient der Reibung (Seite 57) bezeichnet wird, die zwischen der schiefen Ebene und dem darauf befindlichen Körper erzeugt wird; folglich der Druck, mit welchem der letztere in der Richtung der schiefen Ebene nach niederwärts strebt,

$$(3)\quad P = L \sin \alpha - \varphi L \cos \alpha = L (\sin \alpha - \varphi \cos \alpha) = L \cos \alpha (tg\, \alpha - \varphi).$$

Solange

$$\sin \alpha > \varphi \cos \alpha \text{ oder } tg\, \alpha > \varphi$$

ist, wird sich der Körper niederwärts oder von F nach E hin bewegen und dabei die schiefe Ebene selbst und zwar mit dem Drucke

$$(4)\quad p = \varphi L \cos \alpha$$

von F nach E hin drücken. Eine Verschiebung oder Bewegung des Körpers auf der schiefen Ebene kommt aber nicht zu Stande, wenn

$$(5)\quad \sin \alpha = \varphi \cos \alpha \text{ oder } tg\, \alpha = \varphi,$$

oder, wenn überhaupt

$$(6)\ tg\,\alpha < \varphi$$

ist. Kann sich auch die Last, durch die Reibung daran gehindert, nicht auf der schiefen Ebene niederwärts bewegen, so bleibt doch immer noch das Bestreben dazu vorhanden, und es mufs nothwendig auf die schiefe Ebene selbst übergehen.

Was wir soeben über das Verhalten eines Körpers auf einer schiefen Ebene angeführt haben, wird uns zur Entwickelung gewisser wünschenswerther Eigenschaften der Lehrbögen etc. führen. Zur Ableitung dieser stelle die Figur 25 einen in der Ausführung begriffenen Bogen mit einem irgendwie construirten Lehrbogen und Lehrgerüste dar, der beiderseits bis zu den Wölbsteinen C gediehen sein mag.

Bei den vorhabenden Betrachtungen haben wir zu beachten, auf welche Weise jeder Wölbstein auf seine Stelle gebracht wird. Diefs kann nun geschehen entweder

a) indem man ihn bei bc auf die Schaalhölzer niederläfst und von hieraus gegen die Lagerfläche ab anrückt, oder

b) indem man ihn sofort auf seine Lagerfläche ab bringt und nur erforderlich gegen die Schaalhölzer vorschiebt.

Von den beiden unter a und b angeführten Methoden, einen Wölbstein auf sein Lager zu bringen, wird die erste oft durchgängig, wenigstens immer in der Nähe des Scheitels, die zweite dagegen nur in der Nähe eines Bogenanfanges angewendet, wo die Richtung der Lagerflächen nicht zu erheblich von der horizontalen abweicht. Zunächst wollen wir untersuchen, welche Einwirkung die unter a aufgeführte Lagerungsmethode der Wölbsteine auf den Lehrbogen übt.

Die Verschaalhölzer der Stelle des Lehrbogens, auf welcher sich der Wölbsteiu C befindet, stellen eine schiefe Ebene dar, von der der letztere gestützt wird. Nach den bereits aufgeführten Eigenschaften der schiefen Ebene übt das Gewicht L des Wölbsteins C einen winkelrechten Druck gegen die Verschaalhölzer und Krümmen, der, wenn ihre Richtung in einer Ebene parallel zu den Stirnflächen gegen den Horizont durch den Winkel α ausgedrückt wird, beträgt

$$\text{I. } Q = L \cos \alpha.$$

Nächstdem entsteht ein Druck nach der Richtung der schiefen Ebene von

$$\text{II.}\quad S = L\,sin\,\alpha,$$

mit welchem sich der Wölbstein *C* gegen die Lagerfuge *ab* anzulehnen strebt.

Die Verschaalhölzer können verschiebbar, aber auch unverschiebbar auf den Krümmen aufliegen. Indem der Wölbstein *C* von *c* nach *b* hin gegen seine Lagerfläche geschoben wird, entspringt aus dem Drucke *Q* in I. die Reibung

$$\varphi\,L\,cos\,\alpha,$$

und es bezeichnet φ den Reibungscoëfficienten zwischen dem Wölbsteine und den Verschaalhölzern, wenn diese unverschiebbar auf den Krümmen liegen, dagegen φ den Reibungscoëfficienten zwischen den Krümmen und den Verschaalhölzern, wenn sich die letztern auf den Biegen verschieben können, und dieser Werth des Reibungscoëfficienten wird immer kleiner sein, als der erste. Die angeführte Reibung ist ein Hindernifs der Bewegung gegen die Lagerfläche *ab*. Der nach dieser Richtung hin angeführte Druck *S* unter II. wird dadurch umgewandelt in

$$\text{III.}\quad P = L\,sin\,\alpha - \varphi\,L\,cos\,\alpha = L\,cos\,\alpha\,(tg\,\alpha - \varphi).$$

Es wird *P* der Druck sein, mit welchem sich der Wölbstein *C* gegen seine Lagerfläche anlehnt, und gleichzeitig wird ein Druck

$$\text{IV.}\quad p = \varphi\,L\,cos\,\alpha$$

auf den Lehrbogen nach der Richtung seiner Tangente auf *bc* übergetragen werden.

Die Drücke *P* und *p* gehen nach derselben Richtung hin und geben zusammen

$$P + p = L\,sin\,\alpha$$

den niedersteigenden Druck des Wölbsteins. Der Wölbstein *C* hört auf gegen seine Lagerfläche einen Druck zu üben, wenn

$tg\,\alpha$ gleich oder kleiner als φ

wird. Für eben diesen Fall ist aber

$\varphi\,L\,cos\,\alpha$ gröfser als $L\,sin\,\alpha$

und folglich geht der Druck *p* in

$$\text{V.}\quad p_1 = L\,sin\,a$$

nach der Richtung des Lehrbogens über, sobald der Wölbstein von letztern unterstützt, keinen Druck gegen seine Lagerfläche üben kann

Je gröſser der Reibungscoëfficient φ ist, um so entfernter vom Scheitel N eines Gewölbes fangen die auf dem Lehrgerüste liegenden Steine erst an, Druck gegen ihre Lagerfläche zu üben. Offenbar ist die Reibung gröſser, wenn sich Stein über Querholz wegschiebt, als wenn Querholz über Langholz gleitet. Deſshalb und weil es nur vortheilhaft sein kann, wenn sich die Steine eines noch vom Lehrgerüste unterstützten Bogens möglichst stark gegen einander pressen, und wenn dagegen der Druck in der Richtung des Lehrbogens möglichst gering ist, wird es sehr zweckmäſsig sein, wenn die Schaalhölzer einige Entfernung von einander haben, damit sie auf den Bogen gleiten können.

Die Schaalhölzer, welche eine Schicht Wölbsteine, wie C, unterstützen, können aber auch durch Hammerschläge von c nach b hin getrieben werden. Hierdurch ist nicht bloſs die Reibung aufzuheben, welche die Schaalhölzer an dem Bogen finden, sondern es kann noch durch die Schaalhölzer ein Schub, der die Wölbsteine gegen ihre Lagerflächen preſst, geübt werden, welcher der Reibung jener auf dem Bogen gleich ist. Bei dem eben Angedeuteten wird der Druck, den der Wölbstein C gegen seine Lagerfläche üben kann, sein

$$\text{VI.} \quad P_1 = L \sin \alpha + L \cos \alpha = L \cos \alpha \, (tg\, \alpha + \varphi),$$

dagegen wird der Lehrbogen einen Druck, in jedem Puncte nach der Richtung der Tangente, aufwärts erleiden, der

$$\text{VII.} \quad p_2 = \varphi \, L \cos \alpha$$

beträgt. Dieser von allen Wölbsteinen und Wölbschichten ausgehende Druck gegen den Scheitel N des Lehrgerüstes hin macht es nöthig, die Krümmen oder Biegen so zu verbinden, daſs sie nach eben dieser Richtung hin nicht verschoben werden können.

Bei der unter b aufgeführten Methode, die Wölbsteine auf ihr Lager zu bringen, tritt die Lagerfläche ab eines solchen als die schiefe Fläche auf, auf der er gegen den Lehrbogen hin gleiten oder auch, von der er in Folge der Reibung erhalten wird. Der Winkel β, den die Lagerfläche ab mit der Horizontale einschlieſst, wird, sobald die Lagerfläche auf der innern Wölbfläche winkelrecht steht, wie es fast immer ist, den Winkel α zu 90^0 ergänzen, also

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

sein.

Der Wölbstein C, den man auf seiner Lagerfläche von a nach b hin schiebt, drückt diese mit

$$L \cos\beta = L \sin\alpha,$$

aus welchem Druck für die Verschiebung von a nach b hin der Hindernifs

$$\varphi_1 L \sin\alpha$$

entsteht, sobald mit φ_1 der Reibungscoëfficient auf der Lagerfläche bezeichnet wird.

Neben dem Drucke

$$L \sin\alpha$$

übt der Wölbstein C einen Schub in der Richtung seiner Lagerfuge von

$$L \sin\beta = L \cos\alpha.$$

Der Wölbstein bleibt auf seiner Lagerfläche ruhig liegen, wenn

$$\varphi_1 L \sin\alpha \text{ gröfser als } L \cos\alpha$$

ist, er bewegt sich aber gegen den Lehrbogen hin, wenn

$$\varphi_1 L \sin\alpha \text{ kleiner als } L \cos\alpha$$

wird. In diesem Falle bringt der Wölbstein einen Druck von

$$\text{IIX.} \quad U = L \cos\alpha - \varphi_1 L \sin\alpha = L \sin\alpha (\cot g\, \alpha - \varphi_1)$$
$$= L \cos\beta (tg\, \beta - \varphi_1)$$

normal gegen den Lehrbogen hervor. In eben diesem Falle erhält die Lagerfuge ab den Schub

$$\text{IX.} \quad u = \varphi_1 L \sin\alpha = \varphi_1 L \cos\beta$$

und beide Schübe in der Richtung der Lagerfläche ab geben

$$U + u = L \cos\alpha,$$

wie es nicht anders sein kann.

Stöfst man den Wölbstein C heftig gegen das Lehrgerüste hin, dann wird, weil das letztere dem Stofse etwas nachgiebt, der gröfste Druck, mit welchem sich jener gegen das Lehrgerüste stützt, sein

$$\text{X.} \quad U_1 = L \cos\alpha + \varphi_1 L \sin\alpha = L \cos\beta (tg\, \beta + \varphi_1),$$

nach eben diesem Stofse empfängt die Lagerfläche des Wölbsteins einen Druck von b nach a hin, der beträgt

$$\text{XI.} \quad u_1 = \varphi_1 L \sin\alpha = \varphi_1 L \cos\beta.$$

Ein nach der unter b aufgeführten Methode gelagerter und scharf gegen den Lehrbogen in der Richtung seiner Lagerfläche gestofsener Wölbstein wird defshalb das Lehrgerüste mit dem Schub in der Richtung seiner Lagerfläche und mit der gesammten Reibung

in derselben oder überhaupt mit U_1 in X. belasten, gleichzeitig aber auch durch die Lagerfläche mit dem Drucke u_1, wie ihn XI. angiebt, aufwärts gegen den Bogen wirken, weil der niedergerammte Stein am Aufsteigen durch die Reibung

$$\varphi_1 L \sin \alpha$$

an seiner Lagerfläche und durch den in der Richtung der Fuge niederwärts gehenden Druck

$$L \cos \alpha$$

gehindert ist.

Ein, wie vorausgesetzt, gelagerter und niedergerammter Wölbstein kann auf verschiebbaren Schaalhölzern liegen. Treibt man diese von c nach b hin niederwärts, dann mufs der Wölbstein zuverlässig noch stärker gegen seine Lagerfläche gedrückt werden. Das Niederrammen eines Wölbsteins in der Richtung seiner Lagerfläche und das Niedertreiben der zugehörenden Schaalhölzer kann abwechselnd öfterer wiederholt und so ein Maximum des Druckes erzeugt werden, mit welchem sich der Wölbstein gegen seine Lagerfläche und gegen die zugehörende Stelle des Lehrgerüstes stützt. Denken wir uns nun jeden nach der unter b aufgeführten Methode gelagerten Wölbstein von a nach b hin niedergerammt und darauf die unterliegenden Schaalhölzer niederwärts getrieben, dann giebt uns die Rechnung

den Druck, mit welchem jeder Wölbstein gegen seine Lagerfläche gedrückt wird, zu

$$\text{XII.}\quad V = L \cos \beta + U_1 \varphi = L \cos \beta + \varphi L \cos \beta (tg\, \beta + \varphi_1)$$
$$= L \cos \beta \{1 + \varphi\, tg\, \beta + \varphi \varphi_1\},$$

den Druck, den der Lehrbogen von bc aus nach N hin empfängt, zu

$$\text{XIII.}\quad v = \varphi L \cos \beta (tg\, \beta + \varphi_1),$$

den Druck, den der Wölbstein gegen die Verschaalhölzer übt, wie in X., und

den Druck, den der Wölbstein in der Richtung seiner Lagerfläche aufwärts empfängt, wie in XI.

Nehmen wir ferner an, es sei der Wölbstein C nach der unter a aufgeführten Methode gelagert, man habe die Verschaalhölzer, die unter demselben liegen, niederwärts getrieben und habe endlich denselben Wölbstein gegen die Verschaalhölzer niedergerammt. Nach dem Niedertreiben der Verschaalhölzer ergiebt sich

ein Druck des Wölbsteins gegen seine Lagerfläche nach VI. von XIV. $P_1 = L \cos \alpha \, (tg \, \alpha + \varphi) = L \sin \beta \, (cotg \, \beta + \varphi)$

$$= L \cos \beta \, (1 + \varphi \, tg \, \beta),$$

und ein von *bc* gegen den Scheitel hin gerichteter Druck nach VII. von

$$p_2 = \varphi \, L \cos \alpha = \varphi \, L \sin \beta,$$

während der Wölbstein selbst einen Druck von

$$L \cos \alpha = L \sin \beta$$

gegen den Lehrbogen übt.

Durch das Niederrammen des Wölbsteins gegen das Lehrgerüste erfolgt auf dieses im Maximum eine Zunahme des bereits bestehenden Druckes von

$$P_1 \, \varphi_1 = \varphi_1 \, L \sin \beta \, (cotg \, \beta + \varphi),$$

so dafs der gesammte Druck in der Richtung der Wölbfläche gegen den Lehrbogen geübte Druck ist

$$L \sin \beta + \varphi_1 \, L \sin \beta \, (cotg \, \beta + \varphi) = L \sin \beta \, (1 + \varphi \, cotg \, \beta + \varphi_1 \, \varphi),$$

dagegen wird der Druck, den der Wölbstein in der Richtung seiner Lagerfläche aufwärts von *b* nach *a* hin empfängt,

$$\varphi_1 \, L \sin \beta \, (cotg \, \beta + \varphi).$$

Die angegebenen Behandlungen eines Wölbsteins, nämlich dessen Festrammen gegen das Lehrgerüste und das Niedertreiben der zugehörenden Schaalhölzer, jener mag nach der unter *a*, oder nach der unter *b* gegebenen Methode verlegt sein; bezwecken nur die Herstellung einer möglichst festen Pressung desselben gegen seine Lagerfläche. Bei der Verlegung nach *b* giebt V in XII. und bei der Lagerung nach *a* giebt P_1 in XIV. den Druck an, mit welchem sich der verlegte Wölbstein gegen seine Lagerfläche anlehnt. Gewifs ist V gröfer als P_1, doch sehr beachtenswerth fällt der Unterschied nicht aus und für die Praxis kann derselbe, als zu geringfügig, unbeachtet gelassen werden oder, es wird nahezu einerlei sein, welche von den Verlegungsmethoden der Wölbsteine, dafern das Niedertreiben der Schaalhölzer und das Niederrammen der Steine selbst Anwendung findet, gewählt wird. Die beste Wirkung erhält man aber immer, wenn der Wölbstein erst gegen den Lehrbogen gerammt und sodann die Schaalhölzer niedergetrieben, übrigens aber dasselbe Verfahren einige Male in gleicher Ordnung wiederholt wird.

Wenn schon jeder einzelne eben verlegte Wölbstein mittels

des Niederrammens gegen das Lehrgerüste und mittels des Niedertreibens der zugehörenden Schaalhölzer sich fester gegen seine Lagerfläche anlehnt, als es derselbe ohne alle Reibungshindernisse thun würde, wenn ferner durch eine Wiederholung desselben Verfahrens eben dieser Druck gegen die Lagerfläche, bis zu einer gewissen Grenze hin, nur eine Zunahme erfährt, und wenn endlich offenbar der Druck, mit welchem sich z. B. der Wölbstein *C* bei der angegebenen Behandlung gegen seine Lagerfläche *ab* anlehnt, auf die bis zum Bogenanfange hinabreichenden Wölbsteine einwirkt; so mufs durch das Niederrammen jedes Wölbsteins und durch das Niedertreiben der Schaalhölzer ein sehr starker Druck gegen die untern Lagerflächen entstehen. Das mögliche Maximum des Druckes in den nach den Bogenanfängen hin liegenden Lagerflächen wird freilich nur dann erlangt, wenn nach jeder verlegten Wölbschicht nicht blofs die Schaalhölzer für diese, sondern auch alle tiefer liegenden niedergetrieben werden. Mit diesem Verfahren sind die untern oder vom Scheitel *N* entferntern Wölbflächen unter einen Druck zu stellen, der unter Umständen eben so grofs, oft aber auch gröfser als jener wird, unter den die Lagerflächen eben dieser Wölbsteine mit der Entfernung des Lehrgerüstes treten.

Es ist Gebrauch, die sogenannten Schlufssteine oder jene, mit welchen ein Bogen geschlossen wird, mit hölzernen Handrammen möglichst fest niederzurammen. Eben dieser Gebrauch kann für jeden Wölbbogen nur dringend empfohlen werden. Derselbe bezweckt die Aneinanderpressung der vom Scheitel aus nach den Bogenanfängen hin liegenden Lagerflächen der Wölbsteine, doch erstreckt sich die Wirkung dieses Verfahrens nicht bis zu einer grofsen Entfernung vom Scheitel hin. Um diese Wirkung weiter fortzupflanzen, sind nach theilweiser Einrammung der Schlufssteine auch die Schaalhölzer niederwärts zu treiben, und es ist hiermit, sowie mit dem Einrammen abwechselnd fortzufahren. Es versteht sich übrigens von selbst, dafs die Schlufssteine nicht blofs fest, sondern auch passend vorgerichtet sein müssen, weil sie aufserdem zerschlagen oder, eingetrieben entweder den für sie bestimmten Raum nicht gehörig erfüllen oder nicht die erforderliche Spannung geben.

Schon bei der angegebenen Lagerung der Wölbsteine, einschliefslich ihres Niederrammens und des Niedertreibens der

Schaalhölzer, mehr aber noch bei dem Einrammen der Schlufssteine zeigt sich bei schwächern Wölbbögen ein Ausbiegen derselben. Soll hieraus kein Hindernifs für den festen Schlufs des Bogens, der zu ermöglichen ist, und kein Oeffnen der Wölbflächen erfolgen, so müssen vor dem völligen Eintreiben der Schlufssteine die beiderseitigen Stirnmauern bis nahe zur Schlufssteinhöhe emporgemauert werden. Eben diese Stirnmauern, oder eine solche Hintermauerung mit dem Wölbbogen gleichzeitig aufzuführen, so üblich diefs auch ist, mufs ernstlich widerrathen werden, weil hieraus ein Hindernifs für das dichte Aufschliefsen der Wölbflächen entspringt, während, wenn eben diese Arbeit erst begonnen und durchgeführt wird, wenn die Schlufssteine bereits eingesetzt sind, das schliefsliche Festrammen der letztern jede erforderliche Festschliefsung der Wölblagerflächen gestattet, ja unter Umständen bis dahin getrieben werden kann, dafs sich der Bogen selbstständig über das Lehrgerüste erhebt. Um das Einrammen der Schlufssteine mit Leichtigkeit und ohne das Gewölbe selbst zu erschüttern, bewirken zu können, ist eine möglichst feste Stützung gerade der beiderseitigen Wölbsteine nothwendig, zwischen welche der Schlufsstein eingetrieben werden soll. Die Nichtbeachtung dieses Umstandes bewirkt nicht blofs eine heftige Erschütterung des ganzen Gewölbes mit jedem Stofse, der gegen den einzutreibenden Wölbstein geführt wird, sondern auch dafs die Schlufssteine selbst unter Erreichung einiger Spannung des Gewölbes gar nicht niedergebracht werden können.

Je flacher die Krümmung eines Wölbbogens im Scheitel ist, desto gröfser wird der Horizontaldruck des Bogens daselbst, und es gehört keine erheblich grofse Spannweite dazu, um es unthunlich zu machen, durch das Eintreiben der Schlufssteine eben diese Spannung herbeizuführen. In einem solchen Falle gewährt das Eintreiben eiserner Keile in die Lagerfugen der Schlufssteine, die angemessen dicht neben einander gestellt und gleichmäfsig angezogen werden müssen, die beste Wirkung, was bereits Perronet, und nach ihm viele Andere, mit dem gehofften Erfolg angewendet haben. Auch hierbei erhebt sich der Wölbbogen im Scheitel, obwohl er sich nur selten frei über das Lehrgerüste emporrichtet, weil diefs, durch die entstehende Entlastung, mit emporsteigt, es erfolgt aber auch ein Oeffnen der Lagerfugen der Schlufssteine. Eine Aus-

füllung der letztern mit Zwicksteinen, mit Mörtel oder Cement wird im Allgemeinen nicht zu empfehlen sein. Das beste Ausfüllungsmaterial, weil Eisen nicht unzerstörbar bei dem Einflufs der Witterung ist, bietet das Blei unter Zusatz von etwas Antimon, um es leichtflüssiger und zugleich härter zu machen. Mit eben dieser Legirung werden die geöffneten Lagerfugen, und ebenso die Stofsfugen, der Schlufssteine ausgegossen, ohne die eingetriebenen eisernen Keile hierauf zu entfernen. Dafs die Unterseiten der Wölbfugen vor dem Eingufs der Bleilegirung mit Lehm verstrichen werden müssen, bedarf kaum der Erwähnung.

Es wird immer räthlich sein, vor dem völligen Schlufs eines aus Hausteinen ohne Anwendung eines Bindematerials hergestellten Wölbbogens, also auch vor Aufführung der Hintermauerung, die Lagerfugen mit Cement auszugiefsen. Der Romancement, der von braunrother Farbe, ist hierzu tauglich, aber noch empfehlenswerther ist der erst in der neuern Zeit in den Handel gekommene Portlandcement. Berühren sich die Lagerflächen bereits sehr dicht, dann können sie auch, ohne unverhältnifsmäfsig grofse Kosten herbeizuführen, mit der bereits oben erwähnten Bleilegirung ausgegossen werden, die unverkennbar besser ist, als Cementgufs.

Bei den aus kleinen Steinen, z. B. aus Ziegelsteinen, unter Anwendung eines Bindemittels herzustellenden Bögen ist das für Hausteine angegebene Verfahren nicht mehr durchgängig anwendbar, namentlich wird man von dem Niederrammen jedes einzelnen Steines, sowie von dem Niedertreiben der jeder Wölbschicht zugehörenden Schaalhölzer absehen müssen. Insofern es sich auch bei dem unter Verwendung eines Bindemittels aus kleinen Steinen zu bauenden Wölbbogen um eine möglichst feste Lagerung aller Steine, die durch das gebrauchte Bindemittel vereinigt werden, handelt, so liegt es auf der Hand, dafs jeder derartige Wölbbogen ebenfalls für sich, ohne die gleichzeitige Mitaufführung einer Hintermauerung, hergestellt, dafs die Schaalhölzer der vollendeten Strecken, nnd zwar einzeln vom Scheitel nach den Bogenanfängen hin, nach und nach niedergetrieben oder angezogen werden müssen, um der Zusammenziehung des Bindemittels kein Hindernifs in den Weg zu stellen, und dafs man wenigstens die Stirnmauern des Bogens bis nahe zu seiner

Scheitelhöhe emporführen mufs, bevor man dessen Schlufsteine fest niederrammt.

Für Wölbbögen, bei deren Herstellung das zwischen die Lagerflächen der Wölbsteine gebrachte Bindemittel zugleich die keilförmige Gestalt bietet, die jenen fehlt, wird in der Regel eine genügende Erfüllung der Wölbfugen im Scheitel durch Eingiefsung eines guten Cementes erreicht werden. Die Fugen, die sich etwa während der Aufführung des Bogens durch Senkung oder Verschiebung des Lehrgerüstes geöffnet haben sollten, werden ebenfalls mit einem guten Cemente auszugiefsen sein, bevor man ihn schliefst.

Welches Bindematerial aber auch z. B. zur Ausführung eines Ziegelbogens angewendet werden möge, immer wird es rathsam sein, den völligen Bogenschlufs, sowie die Herstellung der Stirnmauern, oder die der Hintermauerung erst nach völliger Austrocknung dieses Bindemittels vorzunehmen, weil mit der letztern eine Volumensverminderung, folglich ein Zusammenziehen des Bogens nach seinen Anfängen hin, in Verbindung steht. Der übliche Gebrauch, Ziegelbögen aufzuführen, umfafst zwar eine andere Methode der Bauführung, als die angegebene; man nimmt nämlich die Hintermauerung, oder die Stirnmauern, wenn nur solche Anwendung finden, mit dem Bogen gleichzeitig empor. Doch ist dieser Gebrauch nicht empfehlenswerth, vielmehr als ein sehr unzweckdienlicher zu bezeichnen, weil die völlige oder theilweise mit dem Bogen gleichzeitig aufgeführte Hintermauerung, die mit dem Trocknen des Bindemittels in den Wölbflächen in Verbindung stehende Zusammenziehung des Bogens nach seinen Anfängen hin nur zum geringsten Theile gestattet, woraus der Uebelstand entspringt, dafs der gewölbte Bogen nicht die Spannung annehmen kann, die er haben mufs, soll dessen Horizontalschub ein möglichst kleiner werden.

Alle Wölbsteine eines Wölbbogens vom Anfange A Fig. 25 desselben bis zu einer Wölbfuge ab hin, die mit der Horizontale den Winkel β einschliefst, erhalten sich, wenn kein Bindematerial auf die Lagerflächen gebracht wird, durch die blofse Reibung, solange nicht (Seite 83)

$$tg\,\beta \text{ gröfser ist als } \varphi_1.$$

Bei einem Reibungscoëfficienten in den Lagerfugen von 0,6 erhalten sich die Wölbsteine, nach Seite 73, von A aus bis zu einem

Winkel β, der gegen 31^0 beträgt. Bei der Anwendung von Kalkmörtel oder Cement können sich die Wölbsteine bis zu Lagerflächenrichtungen erhalten, die mit der Horizontale noch gröfsere Winkel β, als 31^0 einschliefsen. Das gröfste Gradmafs dieses Winkels giebt man oft zu 45^0 an, ohne dabei der Bindefähigkeit des Mörtels Erwähnung zu thun. Solange sich aber die Wölbsteine durch die Reibung auf ihrem Lager erhalten, so lange werden sie auch keiner Stützung durch das Lehrgerüste bedürfen. Um aber diefs wahrzumachen, mufs noch einer andern Bedingung Genüge geleistet werden. Gesetzt, die Lagerfuge *ab* sei die letzte, bis wohin ein Wölbstein mittels der Reibung liegen bleibt. Der zwischen *A* und *C* befindliche und durch die Reibung zusammengehaltene Bogenkörper wird sich um *A* als Drehpunct drehen, wenn der Schwerpunct des Mauerkörpers zwischen *A* und *C*, mit dem der Bogen zusammenhängt oder, wenn der Schwerpunct des Bogens zwischen *A* und *C*, dafern derselbe für sich besteht, innerhalb der Lagerfläche *ab* und des Perpendikels durch *A* liegt. In eben diesem Falle entsteht eine Oeffnung der Lagerfuge in *A*. Der eben gemachten Auseinandersetzung gemäfs kann ein Wölbbogen nur dann bis zu einer Lagerfläche *ab*, ohne einer Unterstützung durch das Lehrgerüste zu bedürfen, auszuführen sein, wenn hierbei der Schwerpunct des Bogenkörpers und der Mauermasse, mit der derselbe fest verbunden ist, innerhalb des Perpendikels durch *A* und dem Puncte *E* liegt. Eine Stützung des Wölbbogens durch den Lehrbogen wird nun von einer Lagerfläche *ab* aus beginnen müssen, auf welcher sich entweder ein Wölbstein durch die blofse Reibung nicht mehr erhalten kann oder, bis zu welcher hin der Schwerpunct des Bogenkörpers in das Perpendikel durch *A* fällt.

Der zur Fläche des Lehrbogens normal gerichtete Druck, den jeder Wölbstein auf das Lehrgerüste überträgt, würde, könnte man sämmtliche Wölbsteine mit einem Male auf den Lehrbogen bringen, denselben in der Nähe des Scheitels stärker belasten, als nach den Anfängen hin. Eine nothwendige Folge davon würde ein Flacherwerden des Lehrbogens in der Nähe des Scheitels sein, weil sich die verschiedenen Centralstreben oder deren Stellvertreter durch Ausbiegung und Eindrückung in einander verkürzen. Der Wölbbogen steigt jedoch nur nach und nach von den Anfängen nach dem Scheitel

hin empor; die zur Oberfläche des Lehrgerüstes winkelrechte Belastung tritt also ebenfalls nur nach und nach, und zwar von den Anfängen gegen den Scheitel hin ein. Eine einseitige derartige Belastung, z. B. nur auf der Seite *AN*, würde die Verschiebung des Lehrgerüstes nach der andern Seite, nämlich nach A_1 hin, zu bewirken streben. Diefs wird aufgehoben, wenn die Bogenwölbung auf beiden Seiten des Lehrgerüstes gleichmäfsig aufsteigt und wenn letzteres durch einen Horizontalverband fähig wird, die aufgeführten Bogenstücke gegenseitig zu stützen. Doch, eine geringe Abbiegung eben dieses Verbandes ist nie zu verhindern, woraus eine Zusammendrückung des Lehrbogens erfolgt, die anderseits eine Erhebung oder ein Aufsteigen eben desselben im Scheitel bedingt. Noch mehr, als durch die eben erwähnte Ursache, steigt der Lehrbogen im Scheitel *N* empor, wenn die Schaalhölzer nach Verlegung jeder Wölbschicht niedergetrieben werden, denn es folgt hieraus ein Druck tangential zur betreffenden Stelle des Lehrbogens gegen den Scheitel hin. Dagegen erleidet das erst erwähnte Aufsteigen des Lehrbogens eine geringe Minderung, wenn die Schaalhölzer nicht niedergetrieben werden, weil alsdann jeder Wölbstein durch die Reibung einen Schub auf den Lehrbogen oder auf die Biegen tangential zur zugehörenden Stelle niederwärts hervorbringt. Bis zu einer gewissen Höhe der aufsteigenden Bogenmauerung wächst die Erhebung des Lehrgerüstes im Scheitel und bald tritt ein Oeffnen der Lagerfugen in *A* ein. Eine noch weitere Aufführung des Bogens auf beiden Seiten des Lehrgerüstes leitet nun eine Senkung des letztern im Scheitel ein und die Fugen bei *A* und A_1 gehen zu, doch öffnen sich andere oberhalb *A* und A_1. Je mehr sich ein Wölbbogen seinem Schlufse nähert, um so mehr vermindert sich die höchste wahrgenommene Ueberhebung des Lehrgerüstes im Scheitel; sie ist völlig verschwunden und sogar eine Niederdrückung des Lehrgerüstes zu Stande gekommen, wenn der Bogen beiderseits bis zum Schlufse vorgeschritten ist. Ebenfalls bei dieser Höhe der aufgeführten Gewölbschenkel schliefsen sich alle Wölbfugen, dafern die verlegten Wölbsteine eine dem Lehrbogen und dem herzustellenden Bogen entsprechende Gestalt hatten.

Ein kräftiges Lehrgerüste und steife Biegen vermögen das vorerwähnte Aufsteigen und Niedersinken des Lehrbogens während der

Aufführung eines Gewölbes zu mindern, wenn auch nicht völlig zu beseitigen. Die Gesammtwirkung für den hergestellten Bogen ist die, dafs er im Scheitel niedriger wird, als ursprünglich der unbelastete Lehrbogen daselbst stand. Die Gröfse dieses Einsinkens ist im Voraus nicht genau zu bestimmen. Um den herzustellenden Wölbbogen nahe in der Höhe zu haben, die gefordert wird, überhebt man den Lehrbogen, d. h. construirt ihn höher, als jener werden soll. Behufs der noch nöthigen Ausgleichung, die bei dem genannten Ueberheben erforderlich werden dürfte, werden die unter dem Scheitel des Lehrgerüstes stehenden Säulen so vorgerichtet, dafs man sie um einige Zolle höher und tiefer stellen kann.

Für Wölbbögen, die mit Kalkmörtel oder mit Cement aufgemauert werden, ist das Aufsteigen und Niedersinken des Lehrgerüstes defshalb unangenehm, ja sogar schädlich, weil der durch das Bindemittel hergestellte Verband sich mit der Oeffnung der Fugen aufhebt, aber nicht wieder hergestellt werden kann. Nur ein Mittel giebt es, der Bewegung des Lehrgerüstes während der Aufmauerung eines Bogens für die Praxis genügend vorzubeugen und es besteht darin, dafs man den allergröfsten Theil des Wölbmaterials, das zur Herstellung jenes erforderlich wird, schon vor dem Beginn des Einwölbens auf das Lehrgerüste bringt. Für Wölbbögen aus Ziegelsteinen bietet die Anwendung dieses Verfahrens gar keine Schwierigkeiten, was um so erfreulicher ist, als gerade hier die Beseitigung der Bewegung des Lehrbogens sich am wünschenswerthesten zeigt. Weniger bequem dürfte die Aufbringung aller der Hausteine, die zur Herstellung eines Wölbbogens erforderlich sind, auf das zugehörende Lehrgerüste sein; indefs ist eine geringe Bewegung des letztern ohne erheblichen Nachtheil für den Bogen, wenn die aus Hausteinen geformten Wölbsteine ohne Kalkmörtel oder Cement verlegt werden, und schon eine theilweise Belastung, die jedoch für den Scheitel am gröfsten gewählt werden mufs, genügt für das Bedürfnifs.

Das unter fertigen Wölbbögen stehende Lehrgerüste mufs sich leicht abtragen und an einem andern Orte wieder aufstellen lassen. Das Abtragen beginnt mit dem Lüften oder allmäligen Niedersinken des Lehrgerüstes. Um diefs leicht bewirken zu können, wird es auf Doppelkeile gestellt, deren Zurückschlagung die Lüftung bedingt.

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Bei kleinen Wölbbögen, bei solchen, die scharf gespannt und deren Schlufssteine mit besonderer Vorsicht eingetrieben werden, bietet die Lüftung eines Lehrgerüstes keine Schwierigkeiten. Anders verhält es sich bei weit gespannten Bögen, bei schwachen Lehrgerüsten und dann, wenn man die Bögen mit den Stirnmauern oder mit den massiven Hintermauerungen gleichzeitig empor nahm. Ein Zurückschlagen der oben erwähnten Doppelkeile, wenn sie sich tief in die unterliegenden Schwellen eingedrückt haben, ist nicht möglich. Geben auch die Keile bei minder tiefem Eingedrücktsein noch nach, so genügt das hiermit erzielte Tieferstellen des Lehrbogens oft darum nicht, weil in dem Augenblicke, wo der Bogen sein eigenes Gewicht durchaus zu stützen bekommt, eine Zusammendrückung desselben und ein Tiefersinken oder Setzen besonders im Scheitel beginnt, das mehr beträgt, als das durch die Doppelkeile bedingte Tieferstellen. Es bleibt, um die Lehrgerüste entfernen zu können, oft nichts übrig, als die Hauptstützsäulen für dasselbe abzuhauen.

Es hat bisher nicht zu den Seltenheiten gehört, dafs Wölbbögen mit der Entfernung der Lehrgerüste, oder kurze Zeit darnach, niederbrechen. Zu schwache Widerlagsmauern können einen solchen Unfall bewirken, die nächste Ursache ist aber in den allermeisten Fällen die Art der Herstellung des Bogens selbst. Geschieht dessen Aufführung nicht in einer Weise, wie wir auf Seite 89 angedeutet haben, sondern wird die Hintermauerung, oder werden die Stirnmauern, dafern nur solche Anwendung finden, mit dem Bogen gleichzeitig aufgemauert, dann kann der letztere nicht als vorgeschriebene Stützlinie auftreten, es mufs vielmehr die wesentliche Stützung in einer Richtung oberhalb des Wölbbogens eintreten, in welcher das Setzen am geringsten ist. Eine nächste Folge davon ist, dafs ein gröfserer Horizontalschub entsteht, als zu Stande kommen würde, wirkte der Wölbbogen als vorgeschriebene Stützlinie, woraus wiederum ein gröfseres Bestreben zum Umwerfen oder Verschieben der Pfeiler oder Widerlager hervorgeht, als unumgänglich nothwendig wird.

Um das Vorbemerkte in etwas zu erhärten, nehmen wir an, es sei der in Fig 26 dargestellte Wölbbogen mit einer massiven Hintermauerung versehen und es sei diese mit dem Bogen gleichzeitig aufgeführt worden. Mit dem Lüften des Lehrgerüstes beginnt der

ganze Wölbkörper sich zu stützen. Die Spannung, welche der Wölbbogen vom Scheitel B aus in sich aufnehnen soll, bewirkt eine Zusammendrückung seiner Lagerflächen. Die Hintermauerung wird um so mehr von diesem Drucke durch sich nach Richtungen BD_1, BC_1, BD, BC u. s. w. fortpflanzen, je fester sie mit dem Bogen selbst oder überhaupt unverschiebbar in Verbindung steht. Nach eben diesen Richtungen hin wird aber die gesammte Verkürzung der Stofsfugen eine geringere sein, weil ihre Anzahl geringer ist, als die der Lagerfugen in der Richtung der Wölbschenkel BA_1 und BA_1. Weil nun die Hauptrichtung des Druckes (Seite 79) nur der Richtung der geringsten Verkürzung folgen kann, so wird auch, unter den gemachten Voraussetzungen, die mittlere Druckrichtung zwischen den Wölbschenkeln AB und A_1B und einer Linie CC_1 eintreten, mithin auch der Krümmungshalbmesser der somit bedingten Stützlinie im Scheitel (Seite 55) gröfser, folglich auch der Horizontaldruck daselbst gröfser sein, als wie dann, wenn der Bogen selbst als vorgeschriebene Stützlinie zu wirken vermag.

Ebenfalls unter den gemachten Voraussetzungen ist die verhältnifsmäfsige Zusammendrückung der Lagerflächen in der Nähe des Scheitels am gröfsten, der Wölbbogen setzt sich darum auch hier am meisten, so dafs die innere Wölbfläche bisweilen eine sehr gedrückte Gestalt AEE_1A_1 annimmt, ja es entstehen oft feine Fugenöffnungen EF und E_1F_1.

Die angedeuteten, durch die Bauführung bedingten Folgen des Setzens werden sich verschieden grofs zeigen, je nach der Zusammendrückung der Bogenfugen des Wölbbogens gegen die der Stofsfugen in der Hintermauerung. Am wenigsten nachtheilig wirkt das Setzen immer dann, wenn der Wölbbogen wenig Lagerfugen, die Hintermauerung aber viel Stofsfugen hat. Somit erklärt sich denn auch der gute Stand der Bögen, ungeachtet eines beträchtlichen Setzens, die aus Hausteinen hergestellt sind und eine Hintermauerung von Ziegelsteinen oder von Bruchsteinen haben, sowie der bekannte unsichere Stand, in Folge des grofsen Horizontalschubs, der nur aus Bausteinen gefertigten Bögen.

Ein Wölbbogen bricht nach Entfernung des Lehrgerüstes nieder, abgesehen von der Wirkung, die dessen Bauführung bedingt, wenn eine Verschiebung oder eine Kantung des Widerlagspfeilers

BAYERISCHE STAATS- BIBLIOTHEK MUENCHEN

auf der einen oder auf beiden Seiten zugleich eintritt. Dieser Fall ist der gewöhnlichste. Ein Niederbruch erfolgt aber auch bisweilen ohne ein wahrnehmbares Nachgeben der Widerlager. Ist diefs, dann tragen entweder zu mangelhaft stützende, oder ganz fehlende Stirnmauern, oder auch ein zu grofses Setzen der Wölbmasse im Scheitel die Schuld. Die sich unter den eben angeführten Umständen zeigende Bruchform des Bogens ist in der Mehrzahl der Fälle von der in Fig. 27 dargestellten Gestalt. Der Bogen öffnet sich im Scheitel A nach innen, ferner in zwei Puncten B und B_1 nach aufsen und in den Anfängen C und C_1 nach innen. Der Bogen bricht bei eintretenden Fugenöffnungen, wie sie eben bezeichnet wurden, zusammen, wenn die Kantung bis dahin vorschreitet, dafs die Bogenstücke AB und AB_1 von A aus zwischen B und B_1 niederfallen können; die zwei andern Bogenstücke BC und B_1C_1 fallen dann ebenfalls innerhalb CC_1 nieder. Doch nur selten schreitet die Kantung so weit vor, als wir eben voraussetzten. Fast immer wird, wenn sich der Bogen, wie in Fig. 27 angedeutet ist, zu öffnen anfängt, das Wölbmaterial in den Kantungspuncten allmälig zermalmt, abgedrückt und so den Bogenstücken AB und AB_1 die Gelegenheit geboten niederzufallen. Eine starke zwischen B und C und zwischen B_1 und C_1, aber auf beiden Seiten gleichmäfsig, aufgebrachte Belastung, verbunden mit einer nur mäfsigen Unterstützung oder Unterfangung des Bogens im Scheitel, vermag die Fugen wieder zu schliefsen. Nach Aufführung oder Besserung der Stirnmauern, nach angebrachter Hintermauerung oder Hinterfüllung können auch die unter den Scheitel gestellten Steifen wieder entfernt werden, ohne ein Oeffnen der Wölbfugen, wie es erst vorhanden war, neuerdings befürchten zu müssen.

Ebenfalls eine Folge einer nicht dichten Vermauerung der einzelnen Wölbsteine eines Bogens ist das Niedersinken oder Durchgleiten solcher bei Wegnahme des Lehrgerüstes. Einer, selbst einige niederrutschende Wölbsteine gefährden den Stand des Gewölbes nicht, bedenklich aber wird er für die Dauer, wenn sich mehre Wölbsteine aus einer Schicht senken. Die niedergerutschten Wölbsteine werden nachträglich abgearbeitet und die sich zeigenden Fugenöffnungen mit Cement oder einem ähnlichen Materiale verstrichen. Mehr als eine Brücke ist uns bekannt, in deren Bögen einzelne Wölbsteine gar beträchtlich mit der Wegnahme der Lehr-

BAYERISCHE STAATS- BIBLIOTHEK MÜNCHEN

gerüste niedergingen und verputzt werden mufsten. Bei Wölbbögen von Bruchsteinen rutschen nicht einzelne Steine mit der Entfernung des Lehrgerüstes nieder, sondern es gestalten sich oft beträchtliche Ausbauchungen an der innern Wölbfläche. Liegen solche nahe gleichweit von den Stirnflächen entfernt, dann sind sie fast immer als unschädlich zu betrachten, liegen sie aber nahe an einer Stirnseite, dann folgt gewöhnlich ein Niederbruch des ganzen Bogens nach. Am ungleichmäfsigsten setzen sich Bruchsteinbögen, deren Steirnseiten aus Hausteinen hergestellt sind. Bei nicht ganz besonders scharfer Vermauerung und bei einem zur Verwendung kommenden Mörtel, der nicht sehr schnell erhärtet, setzt sich fast immer der aus Bruchsteinen bestehende Bogentheil beträchtlich tiefer, als die Stirnschichten. Sind die letztern in den aus Bruchsteinen hergestellten Bogentheil eingebunden, dann bricht gern der ganze Bogen nieder, weil der gröfste Theil der Last des Bogens auf die Stirnseiten fällt. Aehnliches kann auch bei Ziegelbögen eintreten, deren Stirnschichten, um der Verwitterung, die sonst erfolgen könnte, vorzubeugen, aus Hausteinen gemacht werden, wenn bei der Ausführung nicht die auf Seite 89 angedeuteten Methoden in Anwendung gebracht werden. Ueberhaupt erfolgt das Setzen eines Wölbbogens am gleichmäfsigsten bei Wegnahme der Lehrgerüste und es tritt, bei sonst sorgsamer Ausführung, noch die gleichmäfsigste Spannung in allen Ebenen des Wölbbogens, parallel zu den Stirnflächen, ein, wenn vom Scheitel ab in beiden Theilen des Bogens durchaus gleichviel und durchaus gleichmäfsig dichtschliefsende Lagerflächen befindlich, sowie ferner, wenn auch die Stirnmauern oder die massiven Hintermauerungen gleichmäfsig hergestell sind.

Noch haben wir einige Bemerkungen über die Benutzung von Lehrbögen und deren Entfernung in Beziehung auf solche Bögen zu machen, die sich gegen einander lehnen und durch Pfeiler gestützt werden, wie diefs in Fig. 2 dargestellt ist. Angenommen, es seien zuerst die Pfeiler *a* und *b*, sodann *b* und *c* und endlich *c* und *d* durch Bögen mit einander zu verbinden. Die Endpfeiler *a* und *b* treten als Widerlagspfeiler auf, während die Mittelpfeiler unter Umständen nur als Tragpfeiler dienen können. Sind nämlich die Bögen ganz gleich, was wir vorerst voraussetzen wollen, die zwischen je zwei Pfeiler einzuwölben sind, dann hat, gemäfs Abschnitt 11, Seite 66, je-

der derselben, z. B. *b* und *c*, nur das Gewicht der an einen solchen sich lehnenden Bögen bis zum Scheitel hin zu stützen, weil sich die entstehenden Gewölbschübe nach horizontaler Richtung gegenseitig aufheben. Um nur dieser Bestimmung zu genügen, können die Mittelpfeiler *b* und *c* unter Umständen sehr schwach sein, was jedoch bei einer gewissen Höhe derselben machen wird, dafs sie für den Bogenschub nicht stabil sind, d. h. dafs, wenn z. B. der Bogen zwischen *c* und *d* aus irgend einem Grunde bricht, der Pfeiler *c* den Schub des zwischen *b* und *c* befindlichen Bogens nicht zu stützen vermag und defshalb eben dieser Bogen bricht, und dafs aus denselben Gründen auch der Bogen zwischen *a* und *b* niedergeht. Die Mittelpfeiler können auch für den Bogenschub stabil sein. Zunächst wollen wir voraussetzen, die Mittelpfeiler seien nicht stabil.

Das zur Aufmauerung des Bogens zwischen *a* und *b* erforderliche Lehrgerüste möge aufgestellt sein. Das als vortheilhaft, als besonders zweckdienlich erkannte Verfahren bei Aufführung eines Bogens, dessen wir auf Seite 89 gedachten, giebt schon während der Aufmauerung um so mehr Schub gegen die Pfeiler, je höher der Bogen emporsteigt. Der Widerlagspfeiler mufs für die Stützung dieses Schubs kräftig genug sein, dasselbe aber können wir von dem Mittelpfeiler *b* in gleicher Weise nicht voraussetzen, ja es kann unter Umständen schon der bei Aufführung des Bogens entstehende Schub gegen den Pfeiler *b* seine Standfähigkeit mehr als erschöpfen; ein schwacher Mittelpfeiler *b* mufs defshalb für die Ausführung des Bogens zwischen *a* und *b*, zur Verhütung einer Abbiegung in Beziehung auf *a*, abgesteift werden. Wir haben ferner gesehen, dafs vor dem völligen Schlufs eines Bogens die zugehörenden Stirnmauern aufgeführt werden sollen. Um diefs bewerkstelligen zu können, wird auch der Bogen zwischen *b* und *c* bis zur Schliefsung emporgeführt sein müssen. Bei völlig kunstgerechtem Schlufs des Bogens zwischen *a* und *b* entsteht ein Schub gegen *b*, oder gegen den Bogen zwischen *b* und *c*, wie ihn der letztere nach seinem Schlufs zurück gegen den ersten übt u. s. f. Für schwache Mittelpfeiler *b* und *c* ist somit die gleichzeitige Aufführung und Schliefsung aller Bögen die zweckmäfsigste Methode ihrer Herstellung. Bei vielen Bögen, die sich an einander reihen, kann der vielen Lehrgerüste und der durch sie erwachsenden Kosten wegen hiervon kein

Gebrauch gemacht werden; indefs ist auch die consequente Durchführung des erwähnten Verfahrens nicht unerläfslich nothwendig, obschon seine Zweckmäfsigkeit nicht verkannt werden kann.

Die sichere Schliefsung des Bogens zwischen den Pfeilern *a* und *b* erfordert Stirnmauern, die nahe bis zu dessen Scheitelhöhe emporzuführen sind. In eben diese Mauern geht von allen Stirnpuncten des Wölbbogens tangentialer Druck über: es ist folglich in den Theilen der Stirnmauern, die den Bogenanfängen am nächsten liegen, auch der gröfste Druck vorhanden, sie nach horizontaler Richtung zu verschieben. Die Schliefsung des Bogens zwischen *a* und *b* wird ohne alles Bedenken geschehen können, wenn die Stirnmauern in der Nähe der Bogenenden dieser Verschiebung zu widerstehen vermögen, was bei einer guten Lagerung der Steine in Verbindung mit einem Mörtel leicht erreicht wird, der bald einige Bindefähigkeit erlangt. Der beiderseitige Schub des Bogens, der *a* und *b* verbindet, geht auf eben diese Pfeiler über. Der Widerlagspfeiler mufs für den ganzen Bogenschub standfähig sein, doch wird und mufs nicht dieselbe Anforderung an den Pfeiler *b* gemacht werden. Ist derselbe für den Bogenschub nicht stabil, wie wir voraussetzen, dann fordert, wie schon die Aufführung, noch mehr aber die Schliefsung des Bogens eine nicht nachgebende Absteifung des Pfeilers *b*.

Dieselben Rücksichten und Vorkehrungen, die bei Aufführung und Schliefsung des Bogens zwischen *a* und *b* zu nehmen und zu treffen waren, finden auch bei dem Bogen zwischen *b* und *c* Anwendung.

Schon mit dem Schlufs eines Bogens kann es dahin gebracht werden, wie wir auf Seite anführten, dafs er sich selbst stützt, also des Lehrgerüstes nicht mehr bedarf. Doch nicht immer wird man in der Praxis eine Bogenwölbung und Schliefsung mit einer Sorgfalt durchführen, als zu dessen Selbststützung bei noch unterstehendem Lehrgerüste erforderlich ist, wefshalb denn im Allgemeinen angerathen werden mufs vorauszusetzen: der Bogenschub vermehre sich selbst noch bei der besten Aufführung und Schliefsung eines Bogens mit der Lüftung und Wegnahme seines Lehrgerüstes. Hiernach wird es nicht zu empfehlen sein, aufser bei kleinen Bögen und wenn der einem solchen zugehörende Pfeiler *b* für den Schub die genügende Standfähigkeit besitzt, das Lehrgerüste des Bogens zwi-

schen *a* und *b* früher zu entfernen, als bis der Bogen zwischen *b* und *c* völlig geschlossen ist. Bei aus vielen Bögen bestehenden Brückenkörpern ist es Gebrauch, keinen Lehrbogen früher zu lüften, als bis die zwei vorstehenden Bögen völlig geschlossen sind.

Auch der Bauführung und der Entfernung der Lehrgerüste wollen wir für den Fall Erwähnung thun, dafs ein weitspannender Bogen von weniger weitspannenden eingeschlossen wird, wie diefs in Fig. 14 angedeutet ist. Sind die Pfeiler, gegen welche sich der gröfsere Bogen stützt, für dessen Schub stabil, genügen sie ihm also als Widerlager, dann wird dessen Aufführung, seine Schliefsung und die Entfernung der Lehrgerüste, ohne Rücksichtnahme auf die kleinern Bögen, zu bewirken sein. Sind dagegen die Pfeiler für den Schub des grofsen Bogens nicht stabil genug, dann ist es sehr zu empfehlen, die kleinen Bögen aufzumauern und völlig zu schliefsen, weil für diese die Tragpfeiler des gröfsern Standfähigkeit genug besitzen werden, bevor man mit der Herstellung des gröfsern beginnt. Ob für den Schlufs des letztern und für die Entfernung seines Lehrgerüstes alle kleinern Bögen bis zu den Widerlagern vollendet sein müssen, ist im Allgemeinen nicht zu bestimmen, doch kann es für alle Fälle angerathen werden, weil es nur vortheilhaft auf den Stand des grofsen Bogens einwirken wird.

Bereits auf Seite 68 haben wir darauf hingewiesen, dafs durch eiserne Anker, die über den Scheitel eines Bogens in dessen Stirnmauern eigelegt werden, durch lange mit eisernen Klammern verbundene Simsplatten, durch massive Geländer u. d. m. für eben diesen Bogen, dessen noch zu stützender Horizontalschub beträchtlich kleiner, als der überhaupt bestehende Horizontalschub sich gestaltet. Wenn daher ein noch auf dem Lehrgerüste stehender Bogen mit einem dieser Verbindungsmittel, oder mit mehrern zugleich ausgestattet ist, mufs der mit der nachfolgenden Lüftung des Lehrbogens zu beiden Seiten des Wölbbogens sich gestaltende und von den Pfeilern oder den angrenzenden Bögen noch zu stützende Schub erheblich geringer sein, als ohne eine solche Vorrichtung.

Es ist Gebrauch, Trottoir- und Simsplatten, sowie Geländer, nach Entfernung des Lehrgerüstes, herzustellen, weil man glaubt, durch das Gewicht eben dieser Theile den Horizontalschub des Bogens zu vergröfsern. Das ist zwar wahr, aber die so bewirkte Ver-

gröfserung des Horizontalschubs ist ungleich kleiner, als die durch den Zusammenhang eben dieser Theile hergestellte Verringerung eben desselben, wie wir an speçiellen Beispielen noch näher sehen werden. Es wird daher sehr anzurathen sein, durch Klammern verbundene Simsplatten, Trottoirplatten mit versetzten Fugen, Geländer etc. vor Lüftung des Lehrbogens herzustellen, weil sie dann zur Verminderung des effectiven Bogenschubs beitragen, was besonders beachtungswerth für eine noch in Bau stehende Brücke ist, während sie im entgegengesetzten Falle nur auf Vermehrung eben dieses Schubs wirken.

Duch Zusammenfassung der vorstehenden Untersuchugnen gelangen wir schliefslich zu folgenden Sätzen:

1) Ein Lehrbogen wird durch das aufliegende Wölbmaterial an jeder Stelle winkelrecht zu seiner Richtung gedrückt: die unmittelbarste Stützung eines solchen geschieht somit durch sogenannte Centralsäulen, wie sie in Fig. 25 angedeutet sind.

2) Je nachdem die Wölbsteine auf ihre Lager gebracht werden, erleidet der Lehrbogen allenthalben nach der Richtung der Tangente jeder Stelle entweder einen Druck nach den Enden A und A_1, oder nach dem Scheitel N desselben hin. Die Krümmen eines Lehrbogens müssen defshalb eine Verbindung unter sich haben, die hierzu oder zur Fortpflanzung von Druck nach den Enden des Bogens oder nach seinem Scheitel hin geeignet ist. Der Lehrbogen wird immer einen Druck nach den Enden A und A_1 hin erleiden, man mag die Wölbsteine nach der unter a oder, nach der unter b Seite 83 beschriebenen Methode lagern; dagegen wird der Lehrbogen einen Druck nach dem Scheitel N empfangen, wenn die Verschaalung des Lehrbogens aus in Zwischenräumen gelegten Schaalhölzern besteht und wenn diese, nach Verlegung jeder Schicht von Wölbsteinen, nach den Enden des Lehrbogens hin niedergetrieben werden.

3) Jeder Lehrbogen mufs von seinen Enden aus nach dem Scheitel hin um so mehr überhoben construirt werden, als der herzustellende Wölbbogen, je schwächer, je zusammendrückbarer das Lehrgerüste selbst ist.

4) Das Aufsteigen der Krümmen oder Biegen eines Lehrbogens kann durch deren Steifigkeit, mehr aber noch durch Aufbringen eines Theiles des Wölbmaterials beseitigt werden. Bei Wölbbögen,

die aus kleinen Steinen, etwa aus Ziegelsteinen, unter Anwendung von Kalkmörtel oder Cement hergestellt werden, ist die nachtheilige Einwirkung, die das Steigen des Lehrbogens auf den Verband der vermauerten Steine übt, durch die trockne Verlegung der Wölbsteine über den ganzen Lehrbogen weg, bevor die Vermauerung beginnt, zu beseitigen.

5) Der vom Wölbmateriale gegen die Krümmen eines Lehrgerüstes geübte normale Druck bedingt eine Gesammtwirkung, welche nicht blofs die Schwellen, in welchen die Centralsäulen enden, vertikal niederwärts drückt, sondern auch deren Enden gegen einander schiebt. Werden die Biegen nicht durch Centralsäulen, sondern durch lothrechte Säulen, oder irgend wie gestützt, dann mufs das Lehrgerüste an mehrern Stellen mit Horizontalverband versehen werden, der kräftig genug ist, den Schub der beiden Lehrbogenhälften gegen einander aufzuheben, den das Wölbmaterial des Bogens im ungeschlossenen Zustande des letztern hervorbringt.

6) Ein Bogen kann nur mit Vortheil von seinen Enden aus nach dem Scheitel hin hergestellt werden, um möglichst dichtschliefsende Lagerflächen zu erhalten.

7) Es ist immer zweckmäfsig, die Verschaalung eines Lehrbogens aus Latten oder Verschaalhölzern zu machen, die lose auf den Biegen aufliegen und sich nicht unmittelbar berühren.

8) Ein Wölbbogen kann bis zu einem Puncte *B* Fig. 25 hin, ohne eines Lehrgerüstes zu bedürfen, aufgeführt werden, für welchen die Richtung der Lagerfugen noch nicht so steil ist, dafs der aufzubringende Wölbstein rutscht oder gleitet, doch gehört noch dazu, dafs der Schwerpunct des zwischen *A* und *B* liegenden Bogenkörpers nicht zwischen *B* und dem Perpendikel durch *A* liegt, oder was dasselbe ist, dafs nicht ein Kanten des Bogens um *A* erfolgt.

9) Ein Wölbbogen ist von seinen Anfängen aus beiderseits gleichförmig emporzuführen, um keine ungleichmäfsige Verschiebung des Lehrgerüstes zu erhalten, ganz besonders mufs hierauf gesehen werden, wenn die Biegen nicht durch Centralsäulen gestützt sind.

10) Bei Wölbbögen, die aus gröfsern Hausteinen gefertigt werden, ist ein starkes Anstofsen jedes Wölbsteins gegen seine Lagerfläche, ein Niederstofsen desselben gegen den Lehrbogen und ein Niedertreiben der unterliegenden Verschaalhölzer nöthig, um eine

möglichst dichte Lagerung der Wölbsteine zu erhalten. Für Wölbbögen aus Ziegelsteinen oder überhaupt für alle die, deren Steine durch Mörtel oder Cement verbunden werden, ist ein gleiches Verfahren unnöthig, aber ein schwaches Niedertreiben der Verschaalhölzer erscheint angemessen, um das mit der vorschreitenden Trocknung eintretende Schwinden der Mörtel- oder Cementfugen auszugleichen, weil auſserdem das Anhalten der Steine an den Verschaalhölzern und wieder das Anhalten dieser an den Biegen ein Reiſsen der Mörtel- oder Cementfugen herbeiführen könnte.

11) Damit die mittlere Wölblinie eines Bogens als vorgeschriebene Stützlinie auftrete, ist der letztere bis zum Scheitel hin so dicht als möglich herzustellen, vorläufig zu schlieſsen, ferner ist die Hintermauerung oder es sind die Stirnmauern bis zur Scheitelhöhe emporzumauern und nun erst der Bogen völlig zu schlieſsen. Eine feste Schlieſsung eines Wölbbogens, die durch das Eintreiben der Schluſssteine bewirkt werden soll, fordert die directeste oder festeste Unterstützung der Wölbschichten, an die sich die Schluſsschicht anlehnt. Bei flachen Wölbbögen empfiehlt sich die endliche Schlieſsung oder Spannung durch das Eintreiben eiserner Keile und das Ausgieſsen der hierbei geöffneten Scheitelfugen durch eine Legirung aus Blei und Antimon.

12) Das Lehrgerüste eines Bogens, dessen Pfeiler für den Bogenschub stabil sind, kann nach dessen völliger Schlieſsung gelüftet und entfernt werden. Für einen Bogen, der sich einerseits gegen einen für den Schub des letztern nicht stabilen Pfeiler anlehnt, ist es räthlich, vor der Lüftung des Lehrgerüstes die zwei vorliegenden, dafern sie sich gegen ebenfalls für den Bogenschub nicht stabile Pfeiler stützen, völlig zu schlieſsen und überdieſs noch den zweiten Pfeiler abzustützen, dafern er nicht ein Widerlagspfeiler ist. Es wird nöthig, einen Bogen, an den sich beiderseits kleinere anlehnen und dessen Pfeiler für seinen Schub nicht völlig stabil sind, nicht eher zu beginnen, als bis die kleinern Bögen geschlossen sind. Die Entfernung seines Lehrbogens kann nach seiner völligen Schlieſung ohne Bedenken erfolgen. Die Erhebung der Stirnmauern über den Scheitel eines Bogens, das Legen langer und mit eisernen Klammern verbundener Simsplatten, die Aufführung massiver Geländer, das Einlegen eiserner den Scheitel desselben Wölbbogens übergreifender

Anker vor der Lüftung des zugehörenden Lehrgerüstes kann nur angerathen werden, weil alle diese Vorkehrungen wesentlich dazu beitragen, dem Bogeuschub, der mit der Entfernung der Lehrgerüste vollständig auftritt, entgegen zu wirken.

Fünfzehnter Abschnitt.

Ueber schiefe Brücken.

Eisenbahnen und Landstrafsen durchkreuzen sich sehr häufig und unter verschieden grofsen Winkeln.

An der Kreuzungsstelle einer Eisenbahn mit einer Landstrafse kann die Ebene oder Planie der Eisenbahn mit der Strafse in gleicher Höhe, sie kann tiefer, sie kann aber auch höher liegen. Haben die Eisenbahn und die Landstrafse an der Krümmungsstelle gleiche Höhe, dann entsteht ein sogenannter Uebergang der Landstrafse über die Eisenbahn. Häufig finden derartige Uebergänge statt, und um sie zu erhalten, mufs nicht selten die Landstrafse in der Nähe eines Uebergangspunctes erhöht oder erniedrigt werden. Oft auch ist der Höhenunterschied zwischen der Planie der Eisenbahn und der Landstrafse zu beträchtlich, als dafs durch eine Erhöhung oder Erniedrigung der letztern ein unmittelbarer Uebergang herzustellen wäre. In Fällen dieser Art wird mittels einer Brücke entweder die Eisenbahn die Landstrafse, oder die Landstrafse die Eisenbahn übersetzen müssen, unter welcher Richtung auch die Eisenbahn die Landstrafse kreuzen möge.

In Fig. 28 sei xx die Richtung einer Eisenbahn und yy die einer Strafse, welche sich unter der Eisenbahn hindurchziehen soll.

Die Führung einer Strafse unterhalb der Planie einer Eisenbahn erfordert eine Durchgangsöffnung für dieselbe durch den Bahnkörper, deren Form und Gröfse sehr manchfaltig gedacht und ausgeführt werden kann. Für gewöhnliche Strafsen bestehen gewisse Gesetze, die vorschreiben, bis zu welcher Breite und Höhe ein Wagen beladen sein darf. Die Strafse mufs breit genug sein, um die Begegnung zweier bis zur vorgeschriebenen Grenze nach der Breite

hin geladener Wagen zu gestatten. Alle Durchgänge einer Strafse durch Thore etc. müssen ferner für die höchste Ladung und entweder für den Durchgang eines bis zur gröfsten Breite beladenen Wagens oder für die Begegnung zweier solcher hoch und weit genug sein. Aus der gröfsten Höhe und Breite, bis zu welcher ein Wagen vorschriftmäfsig höchstens beladen werden soll, und aus der Bestimmung, ob die überdeckte oder begrenzte Strafsenstelle für den Durchgang nur eines Wagens oder für die gleichzeitige Durchfahrt zweier genügen soll, wird sich ein Minimum für die Durchgangs- oder Passagenöffnung der Strafse herausstellen. Demnach ist der im Minimum von einer Strafse beanspruchte Raum bei der Durchführung einer solchen durch einen Bahnkörper ein Prisma, dessen Achse mit der Richtung der Strafse zusammenfällt und dessen winkelrechter Querschnitt das Minimum der Passagenöffnung ist.

Die Fig. 29 möge das Minimum der Passagenöffnung der Strafse *yy* Fig. 28 für ihre Durchführung durch den Bahnkörper *xx* sein. Gemäfs dieser Annahme und dem Vorbemerkten ist die Form der Durchgangsöffnung der Strafse unterhalb der Planie der Eisenbahn durch ein nach der Strafsenrichtung liegendes Prisma bedingt, welches in der äufsern Begrenzung des Bahnkörpers endet und das die Passagenöffnung zum Querschnitt hat.

Wenn eine Eisenbahn eine Landstrafse übersetzt, dann geschieht diefs fast immer mittels einer Brücke und die Oeffnung einer solchen mufs mindestens den oben aufgestellten Anforderungen entsprechen, d. h. sie mufs mindestens die kleinste Passagenöffnung der Strafse besitzen. Gar nicht selten werden auch Landstrafsen mit Brücken über Eisenbahnen weggeführt, die gleichfalls für die Eisenbahn das Minimum der Passagenöffnung bieten müssen. Nothwendig ist es durchaus nicht, dafs bei der Ueberführung einer Eisenbahn über eine Fahrstrafse, oder so umgekehrt, die Oeffnung der Brücke nur das Minimum der Passagenöffnung im ersten Falle für die Fahrstrafse, im andern aber für die Eisenbahn habe, vielmehr kann die Durchgangsöffnung beliebig gröfser sein. Das letztere ist indefs nicht üblich, weil hierbei die Ueberbrückung mehr Material als bei der vorgedachten Beschaffenheit erfordern oder, weil die entstehende Form eine ungefällige sein würde, indem sie eine nutzlose Weite herstellt. Werden aber die Uebergangsbrücken nur der ge-

ringsten Passagenöffnung entsprechend hergestellt, d. h. wird ihre Oeffnung dem Minimum der zugehörenden Passagenöffnung gleich gemacht, dann mufs jede derartige Brücke

eine gerade sein, wenn die Richtung der Eisenbahn die der Strafse unter einem rechten Winkel durchkreuzt, dagegen

eine schiefe werden, wenn die Richtung der Eisenbahn die der Strafse unter einem spitzen Winkel schneidet.

Insofern die Stirnflächen von Brücken in der Regel lothrecht sind, wird die Oeffnung jeder schiefen Brücke den Raum eines schiefgeschnittenen prismatischen Körpers darstellen, dem die Passagenöffnung als Querschnitt zugehört.

Schiefe Brücken kommen vorzugsweise bei der Ueberführung einer Eisenbahn über eine Fahrstrafse, sowie im entgegengesetzten Falle, sie kommen aber auch, obschon ausnahmsweise, bei dem Uebergang einer Eisenbahn über einen Strom vor, wenn die Brückenrichtung nicht auf der des Wasserlaufes winkelrecht steht. Die Strompfeiler von Brücken müssen, namentlich bei raschlaufenden Wässern, um die Durchgangsöffnungen für das Wasser, für Schiffe, für Eis etc. möglichst vortheilhaft zu erhalten, eine mit der Richtung des Wasserlaufes zusammenfallende Richtung haben. Bei der Längenrichtung einer Brücke, die nicht winkelrecht zur Richtung des Wasserlaufes ist, kann diefs offenbar nur durch schiefe Bögen erreicht werden, weil die mit der Stromrichtung gehende Richtung der Pfeiler die der Brückenbahn nicht winkelrecht schneidet.

Erheblich schiefe Brücken von geeigneter Construction sind erst in der neuern Zeit und zwar bei dem Eisenbahnbau in Anwendung gekommen, weil sie hier weniger leicht, als bei Fahrstrafsen umgangen werden können; ja man treibt mit deren Herstellung bei dem Eisenbahnbau schon einen gewissen Luxus, d. h. man bedient sich ihrer bereits in Fällen, wo eine unabweisliche Nothwendigkeit für solche eben nicht vorliegt.

Der Grund, warum man früher den Bau erheblich schiefer Brücken umging, war ganz einfach der, dafs die meisten Versuche, dergleichen herzustellen, mifsglückten oder, dafs die grofse Mehrzahl derartigen Brücken nach ihrer Vollendung niederbrach. Eben defshalb besitzen noch viele der ältern Eisenbahnen, statt gemauerter schiefer Brücken, solche von Holz oder von Eisen. Die Haltlosig-

keit der frühern schiefen Brücken war zunächst durch deren Construction bedingt, die wieder aus einer unrichtigen Auffassung ihres Wesens entsprungen war. Man betrachtete, um es kurz anzugeben, ehedem schiefe Brücken nur als schief abgeschnittene gerade Brücken, was zwar der Form, nicht aber den Stützungsverhältnissen nach richtig ist, und führte sie defshalb wie gerade Brücken aus. Noch jetzt ist diese irrige Ansicht bei vielen Practikern die vorherrschende, und eben darum werden noch jetzt hier und da schiefe Brücken wie gerade construirt. Die Abschnitte, die sich in der Reihenfolge der Ausführung schiefer Brücken aufstellen lassen, umfassen:

a) Die Herstellung wenig schiefer Brücken in der Cnnstruction gerader Brücken,
b) die Vertretung erheblich schiefer Brücken durch in schiefer Richtung neben einander gestellte gerade Gurte, Gurtbrücken genannt, und
c) Die Herstellung beliebig schiefer Brücken von einer ihrem Wesen entsprechenden Construction.

Die Betrachtungen, die wir nun über schiefe Brücken anstellen wollen, sollen sich befassen:

1) mit den einschlagenden graphischen Darstellungen und
2) mit der Erforschung ihrer statischen Eigenschaften in Beziehung auf die Construction derselben.

In Fig. 30 stelle xx die Richtung der Planie einer Eisenbahn dar, welche mittels einer schiefen Brücke eine nach der Richtung yy gehende Strafse übersetze. Die Form der schiefen Brücke sei im Grundrifse $ABCD$, ihre Passagenbreite BE und die der Passagenöffnung zugehörende Form der innern Wölbfläche BGE. Zunächst soll es sich um die graphische Darstellung der Form handeln, welche die innere Wölbfläche an der Stirnfläche hat.

Insofern die Durchgangsöffnung, welche die schiefe Brücke bietet, ein Prisma ist, das nach der Richtung der Fahrstrafse liegt, dem die Passagenöffnung als Querschnitt zugehört und das von vertikalen Ebenen begrenzt wird, die mit xx parallel gehen: wird die Bestimmung der Stirnform einer schiefen Brücke nur in der Darstellung der schiefen Abschnittsfläche eines Prisma bestehen, dessen winkelrechter Querschnitt die Passagenöffnung ist, eine Arbeit, die keine Schwierigkeit bietet. Das die Durchgangsöffnung einer

schiefen Brücke darstellende Prisma, winkelrecht zu seiner Achse yy geschnitten, soll die krumme Linie BGE als Form der innern Wölbfläche bieten, die gesuchte Form dagegen ist die Begrenzungslinie an der innern Wölbfläche, die entsteht, wenn das vorerwähnte Prisma mit einer Vertikalebene AB geschnitten wird, die parallel zu xx geht. Zwei Puncte F und J an der innern Wölbfläche, die in einer zur Achse des Prisma der Brückenöffnung parallelen Vertikalebene liegen, müssen gleiche Höhe haben, d. h. die zwei Puncte F und J in den lothrechten Schnittflächen BE und BA, die sich in einer Linie F_1J parallel zu yy befinden, stehen gleich hoch über dem Anfange der innern Wölbfläche. Der lothrechte Abstand des Punctes F vom Bogenanfange B ist aber FF_1, folglich ist auch der lothrechte Abstand des Punctes J vom Bogenanfange B

$$JJ_1 = FF_1,$$

und es mufs J_1 ein Punct an der innern Wölblinie nach der Richtung der Stirnfläche der schiefen Brücke sein. Aus dem eben Angeführten entwickelt sich folgende einfache Construction für die graphische Darstellung einzelner Puncte der innern Wölbform an der Stirnseite schiefer Brücken:

Ist die der Passagenöffnung der Brücke zugehörende Form der innern Wölblinie BGE, so dafs BE winkelrecht auf yy steht, und ist BA die Richtung der schiefen Brücke an ihrer Stirnseite, dann ziehe man eine zu yy parallele Linie FF_1 durch J eine Linie JJ_1 winkelrecht zu BA und mache

$$JJ_1 = FF_1.$$

Beliebig viel Puncte in der eben angeführten Weise aufgesucht und in der gehörigen Reihefolge mit einander verbunden geben die Form der innern Wölbfläche an der Stirnseite der schiefen Brücke. Mit eben dieser Form ist auch der Aufrifs der schiefen Brücke bestimmt.

Aehnlich der eben angeführten Construction läfst sich aus der vorgeschriebenen Wölblinie der innern Wölbfläche nach der Richtung einer schiefen Brücke die Gestalt der innern Wölblinie bestimmen, die entsteht, wenn die innere Wölbfläche mit einer Vertikalebene geschnitten wird, die winkelrecht auf der Richtung yy der Durchgangsöffnung steht. Das hierzu dienliche Verfahren ist auf folgende Weise darzustellen:

Um aus der vorgeschriebenen Linie BJ_1A der innern Wölbfläche an der Stirnseite einer schiefen Brücke einzelne Puncte der innern Wölblinie BF_1E, welche winkelrecht auf der Durchgangsrichtung steht, zu erhalten, Fälle man von beliebigen Puncten J_1 der vorgeschriebenen Wölblinie an der Stirnfläche Perpendikel auf BA, ziehe durch die sich ergebenden Puncte J Parallelen zu yy, mache

$$FF_1 = JJ_1,$$

verbinde die so gefundenen Puncte F_1 in gehöriger Reihefolge mit einander, und man hat die gesuchte innere Wölblinie BF_1E.

Für die Ausführung schiefer Brücken ist es, wie wir noch sehen werden, von Vortheil, die an der Stirnfläche bestehende Form der innern Wölbfläche so zu haben, dafs sie sich graphisch und mathemathisch leicht darstellen läfst. Am einfachsten wird diefs erlangt, wenn man die Gestalt der innern Wölblinie nach der Richtung der Stirnfläche einer schiefen Brücke wählt. Von dieser Linie und der Schiefe der Brücke hängt aber die Passagenöffnung ab. Um sich zu vergewissern, ob die letztere von der gehörigen Beschaffenheit ist, wird es räthlich sein, sie nach der eben angegebenen Methode zu construiren. Der gekrümmte Theil der Passagenöffnung einer Brücke, den die innere Wölbfläche bildet, ist in der Mehrzahl der Fälle ziemlich unwesentlich, weil eben dieser Theil nur selten von der Passage beansprucht wird, wefshalb es um so unbedenklicher ist, die Linie zu wählen, welche die innere Wölbfläche an der Stirnseite einer schiefen Brücke bildet.

Neben der graphischen Darstellungsmethode der Linie, welche die innere Wölbfläche einer schiefen Brücke an der Stirnseite zeigt, aus der Gestalt der innern Wölblinie nach der Richtung der Passagenöffnung, giebt es eine ebenfalls sehr einfache durch Rechnung, deren wir jetzt gedenken wollen.

Für die Wölblinie in der Ebene BA der Stirnfläche der schiefen Brücke Fig. 30 sei die dem Puncte J_1 derselben zugehörende

horizontale Abscisse $BJ = x_1$ und die
vertikale Ordinate $JJ_1 = y_1$.

Die einem Puncte F_1 der innern Wölblinie nach der Richtung der Passagenöffnung zugehörende

horizontale Abscisse sei $BF = x$ und die
vertikale Ordinate sei $FF = y$.

Liegen die Puncte J_1 und F_1, wie diefs in der Figur und den gegenwärtigen Betrachtungen vorausgesetzt wird, in einer Vertikalebene, die mit der Richtung der Brückenöffnung parallel geht, dann haben auch beide Puncte gleiche Höhe, d. h. es wird

$$y_1 = y.$$

Dagegen erhält man für die Abscissen die Bedingungsgleichung, wenn die Schiefe der Brücke, d. i. der Winkel BOG, den die Stirnseite BA mit der Richtung yy ihres Durchganges einschliefst, mit ε dargestellt wird

$$BF = BJ \cos(90 - \varepsilon) \text{ d. g.}$$

$$\text{I.} \begin{cases} x = x_1 \sin \varepsilon \text{ oder} \\ x_1 = \dfrac{x}{\sin \varepsilon}. \end{cases}$$

Will man die Abscissen nicht von B, sondern von O und O_1 aus zählen und man setzt zu diesem Ende

$$O_1F = X, \; OJ = X_1,$$

und ferner die halbe Spannweite in der Richtung der Stirnfläche der schiefen Brücke

$$OB = S_1,$$

so hat man

$$X_1 + x_1 = S_1 \text{ d. g.}$$

$$x_1 = S_1 - X, \text{ also auch}$$

$$(1) \; S_1 - X_1 = \frac{x}{\sin \varepsilon}.$$

In der letzten Gleichung geht x in BO_1 über, wenn sich X_1 in o verwandelt d. g.

$$S_1 = \frac{BO_1}{\sin \varepsilon}; \; BO_1 = S_1 \sin \varepsilon_1.$$

Für $OF_1 = X$ und immer noch $BF = x$ wird

$$BO_1 = X + x,$$

$$S_1 \sin \varepsilon = X + x,$$

$$S_1 \sin \varepsilon - X = x,$$

und wenn man diesen Werth in (1) setzt,

$$S_1 - \frac{S_1 \sin \varepsilon - X}{\sin \varepsilon} = X_1 \text{ d. g.}$$

$$\text{II. } X_1 = \frac{X}{\sin \varepsilon}.$$

Gesetzt, es sei die aus der innern Wölbfläche an der Stirnseite einer schiefen Brücke entstehende Linie BJ_1A Fig. 30 ein Kreisbogen mit dem Radius r und für denselben $OJ = X_1$ und $JJ_1 = Y_1 = Y$, dann ist nach den bekannten Eigenschaften des Kreises

$$X_1^2 = r^2 - Y_1^2, \text{ nach II.}$$

$$\frac{X^2}{\sin^2 \varepsilon} = r^2 - Y_1^2 \text{ oder}$$

$$(2)\quad Y_1 = Y = \sqrt{\left\{r^2 - \frac{X^2}{\sin^2 \varepsilon}\right\}}.$$

In dieser Gleichung bezeichnet, um es noch einmal anzuführen,

$X = O_1F$ die horizontale Abscisse eines Punctes F_1 der innern Wölblinie in der Passagenweite und

Y die zugehörende Ordinate FF_1,

wenn die Wölblinie nach der Ebene der Stirnfläche der schiefen Brücke ein Kreisbogen mit dem Radius r ist.

Bei schiefen Brücken kommt auch die Gestalt der abgewickelten innern Wölbfläche in Betrachtung. Für gerade Brückenbögen ist diese ein Rectangel, dem die Länge der innern Wölblinie (in der Richtung der Passagenweite nämlich) als Länge und die Tiefe des Bogens als Breite zugehört. Ergänzen wir die schiefe Brücke $ABCD$ Fig. 30 zu einer geraden $EBHD$, dann ist die Rectangelfläche $ebhd$ Fig. 31 die Mantelfläche des geraden Bogen der letztern, nämlich

$$be = hd = \text{Bogen } BF_1\,GE \text{ und}$$

$$bh = ed = BH = ED.$$

Die Puncte F und J sollen in einer Vertikalebene liegen, die der Durchgangsrichtung der schiefen Brücke parallel ist.

In der Mantelfläche des geraden Bogens hat der Punct F den Abstand BF_1 vom Bogenanfange. Macht man nun in den Figuren 30 und 31

$$\text{Bogen } BF_1 = bf \text{ und}$$

$$FJ = fi, \text{ ferner}$$

$$\text{Bogen } BGE = bfe \text{ und}$$

$$EA = ea, \text{ endlich}$$

$$bc = ik = ad = BC,$$

so mufs *biadkc* die abgewickelte innere Wölbfläche des schiefen Bogens sein. Das practische Verfahren für die Construction der Mantelfläche eines schiefen Bogens läfst sich einfach wie folgend angeben:

Nachdem für den schiefen Bogen Fig. 30 die innere Wölblinie BF_1GE nach der Richtung der Passagenweite und, wie in Fig 31, ein rechter Winkel *cbe* angetragen ist, ziehe man Linien F_1FJ parallel zur Achse yy der schiefen Brücke, mache

$$bf = \text{Bogen } BF_1,$$

ziehe durch f eine Parallele zu bc, mache

$$fi = FJ, \text{ ferner}$$
$$bc = ik = BC$$
u. s. f.

und verbinde die Puncte $bi \ldots . a$, sowie
„ „ $ck \ldots . d$.

Die Rectangelflächen bc_1 und ad_1 sind endlich die sich zugekehrten Pfeilerflächen, wenn

$bb_1 = BB_1;\ b_1c_1 = bc = a_1d$ ist und
bb_1 winkelrecht auf bc, sowie
aa_1 „ „ ad steht.

Die krumme Linie $bi \ldots . a$ Fig. 31, welche die innere Wölbfläche des schiefen Bogens abgewickelt bildet, läfst sich auch durch Rechnung finden. Mit Rücksicht auf deren Entstehung und wenn wir für einen Punct i derselben

die Abscisse bf mit s und
die zugehörende winkelrechte Ordinate
fi mit t

darstellen, ist

$$\text{III.} \begin{cases} s = bf = \text{der Länge des Bogens } BF_1, \text{ sowie} \\ t = fi = FJ = x \text{ cotg } \varepsilon. \end{cases}$$

Kennt man die Wölblinie BF_1E in der Ebene der Passagenweite und ist die Länge des einer Abscisse $BF = x$ zugehörenden Bogens allgemein darzustellen, dann sind die Gleichungen unter III. noch vollständiger darzustellen. In dieser Absicht sei die Wölblinie nach der Richtung der Passagenweite ein Halbkreis BF_1GE mit dem Radius r und ferner der dem Puncte F_1 zugehörende Centrumswinkel $BO_1F_1 = \delta$. Für diese Voraussetzungen wird

$$x = BF = r - r\cos\delta = r(1 - \cos\delta),$$

$$s = \text{Bogen } BF_1 = \frac{r\pi\delta}{180}$$

und hiermit gehen die Gleichungen unter III. über in

$$(3)\begin{cases} s = \dfrac{r\pi\delta}{180} \text{ und} \\ t = r(1 - \cos\delta)\, cotg\, \varepsilon. \end{cases}$$

Die innere Wölblinie in der Ebene der Stirnseite eines schiefen Bogens wird stets ein Ellipsenbogen, wenn die in der Passagenweite liegende innere Wölblinie desselben ein Kreisbogen ist, weil, wenn man einen Cylinder schief zu seiner Achse schmiedet, die Begrenzungslinie der entstehenden Schnittfläche immer eine Ellipse giebt. Für die schiefe Brücke in Fig. 30, deren Wölblinie nach der Passagenweite ein Halbkreis BF_1E sein soll, wird die in die Ebene der Stirnseite AB fallende innere Wölblinie eine halbe Elipse BJ_1A, deren grofse Achse die lichte Spannweite AB, in der Ebene der Stirnfläche gemessen, und deren halbe kleine Achse der Radius O_1G oder die Höhe des Wölbbogens ist. Den Winkel mit ε bezeichnet, wie diefs bereits oben geschehen, der die Durchgangsrichtung yy einer schiefen Brücke mit der Richtung AB der Stirnseiten einschliefst, ferner den Radius der innern Wölblinie nach der Richtung der Passagenweite mit r, die halbe grofse Achse der elliptischen Wölblinie in der Ebene der Stirnseite mit A und die zugehörende halbe kleine Achse mit B dargestellt, giebt

$$\text{IV.}\begin{cases} B = r \text{ und} \\ A = \dfrac{r}{\sin\varepsilon}. \end{cases}$$

Die angeführten Constructionsmethoden für schiefe Brücken, nämlich aus der innern Wölblinie nach der Richtung der Passagenweite die in der Ebene der Stirnfläche sich zeigende innere Wölblinie und so umgekehrt, sowie die Mantelfläche eines schiefen Bogens zu finden, gelten nicht blofs für Rundbögen, sondern auch für Spitzbögen. Als eine Wiederholung eben dieser Constructionen wollen wir für die schiefe Brücke in Fig. 37, deren Durchgangsrichtung yy, deren vertikale Stirnfläche AD, und ebenso KO, parallel xx sein und welcher in der Richtung der Passagenweite der Spitz-

bogen ACB als innere Wölblinie zugehören möge, die innere Wölblinie an der Stirnfläche und die entsprechende Mantelfläche bestimmen. Nach der practischen Regel auf Seite 110 dieses Abschnittes sind von beliebig vielen Puncten H Perpendikel auf AB zu fällen oder Parallelen zu yy bis AD zu ziehen, aus den sich ergebenden Abschnittspuncten M Perpendikel zu AD oder xx zu fällen und

$$MN = GH$$

zu machen. Alle so gefundenen Puncte mit einander in der gehörigen Ordnung verbunden, geben die gesuchte innere Wölblinie $ANED$ in der Ebene der Stirnfläche, aus der sofort der Aufrifs abzuleiten ist. Im letztern zeigt sich noch ein Theil K_1N_2 der innern Wölblinie an der hintern Stirnfläche, für deren Bestimmung es ebenfalls keiner weitern Angabe bedürfen wird.

Die Herstellung der Mantelfläche Fig. 38 anlangend, welche der schiefen Brücke Fig. 37 zugehört, ist, gemäfs der practischen Regel auf Seite 114 dieses Abschnittes,

ag = Bogen AH,

gm winkelrecht zu agb und

$gm = GM$ u. s. f., ferner

$$ak = mm_1 = ll_1 = do = AK = DO$$

zu machen. Die Rectangel dr_1 und aq geben ferner die sich zugekehrten Flächen der Pfeiler, wenn

$$ap = kq = dr = or_1 = A_1P = D_1R = K_1Q \text{ ist.}$$

Die Herleitung der innern Wölblinie eines schiefen Bogens nach der Ebene der Stirnseite aus der innern Wölblinie nach der Passagenweite findet bei der bildlichen Darstellung schiefer Brücken, aber auch bei der Anfertigung der Lehrbögen für solche Anwendung. Die Biegen oder Krümmen für schiefe Bögen müssen nämlich, wie für gerade, in lothrechten Ebenen stehen, die den Stirnflächen parallel sind, folglich auch eine mit der innern Wölblinie an der Stirnfläche übereinstimmende Gestalt haben, soll, wie wir noch sehen werden, aus dem Setzen des Lehrgerüstes der geringste nachtheilige Einflufs für den schiefen Bogen erwachsen.

Bevor wir über die graphische Darstellung der Stofs- und Lagerfugen schiefer Bögen sprechen, wollen wir die statischen Verhältnisse der letztern erörtern, weil diese die Richtung der Stofs- und Lagerfugen bedingen.

In Figur 28 stelle das Parallelogramm *DGLJ* den Grundrifs der Wölbfläche eines schiefen Bogens mit einer Passagenöffnung, wie sie die Fig. 29 giebt, und mit einer Richtung der Durchgangsöffnung nach *yy* dar. Der schiefe Bogen läfst sich zu einem geraden ergänzen, wenn an den beiden Enden die Bogenkeilstücke *DFG* und *LKJ* angesetzt werden; derselbe kann ferner auch aus einem geraden Bogen *NGPJ* durch Anfügung der Bogenkeilstücke *DGN* und *LJP* entstanden gedacht werden.

Jeder gerade Wölbbogen giebt von seiner Scheitellinie aus nach beiden Seiten hin Schub in Vertikalebenen, die winkelrecht auf seiner Durchgangsrichtung stehen, wenn die Stofsfugen in eben solchen Ebenen liegen und es ist hierbei zugleich der Bogenschub kleiner, als wenn die Stützung in anders gerichteten Vertikalebenen erfolgt. Angenommen, es stütze sich die Wölbmasse des schiefen Bogens Fig. 28 wie die eines geraden, nämlich in Vertikalebenen *JP*, *NG*.... winkelrecht zu *yy*. Bei dieser Voraussetzung wird der beiderseitige Bogenschub innerhalb der Vertikalebenen *JP* und *NG* gleich grofs sein und ein Gleichgewicht desselben in der Scheitelfuge *QO* erfolgen. Anders verhält es sich mit den Bogenkeilstücken *DGN* und *PLJ*. Offenbar übt der Bogenkeil *GOC* gegen die Scheitelfuge *OC* einen geringern Druck, als das Bogenstück *DCON* gegen eben dieselbe, so dafs ein Ueberdruck gegen die Scheitelfuge *OC* in Vertikalebenen gegen *GF* hin entsteht. Eben dieser Ueberdruck geht durch den Wölbkörper hindurch und hat das Bestreben, die Wölbseite *GL* horizontal zu verschieben oder, wenn die Ecke *G* feststeht, um eine Vertikallinie durch *G* zu drehen. Ganz dasselbe Bestreben findet an der hintern Stirnseite des Bogens statt. Hieraus folgt nun,

> dafs jeder schiefe Bogen, wie *DGLJ* Fig 28, das Bestreben zu einer horizontalen Umdrehung hat, wenn sich dessen Masse in Vertikalebenen stützen mufs, die winkelrecht auf seiner Durchgangsrichtung stehen.

Die vorausgesetzte Stützung eines schiefen Bogens tritt immer dann ein, wenn ein solcher wie ein gerader hergestellt wird, d. h. wenn die Stofsflächen in Vertikalebenen liegen, die auf seiner Durchgangsrichtung winkelrecht stehen, wenn die Lagerfugen horizontal laufen und wenn die Wölbfugen auf der zugehörenden Richtung der innern oder mittlern Wölblinie des Bogens, letztere nach der Ebene

der Passagenweite genommen, winkelrecht stehen. In dieser Weise aber wurden ehedem schiefe Bögen vorzugsweise aufgeführt und die Ursache des seltenen Haltes solcher kann nur das Bestreben zu einer horizontalen Umdrehung oder der Schub gewesen sein, der auf die Enden *G* und *J* der Widerlagspfeiler kam. Die nächste Wirkung des Bestrebens zur horizontalen Verdrehung eines schiefen Bogens, der hinsichtlich seiner Stofs-, Lager- und Wölbfugen wie ein gerader ausgeführt ist, wird diesein, das Wölbmaterial zwischen *C* und *G*, sowie zwischen *H* und *J* zu zerdrücken und ferner, den Pfeilertheil bei *G*, sowie den bei *J* umzuwerfen. Findet eine Zerdrückung des Wölbmaterials in der Nähe des Scheitels an beiden Stirnflächen statt, dann folgt hieraus ein theilweiser Niederbruch des schiefen Bogens, der sich jedoch höchstens auf die völlige Zerstörung der Bogenkeilstücke *DGN* und *LJP* erstrecken kann. Der ganze Wölbbogen mufs aber niederbrechen, wenn das Wölbmaterial an den Stirnseiten dem Zerdrücken widersteht, dagegen die Enden der Pfeiler bei *G* und *J* für den auf sie kommenden Schub nicht Standfähigkeit genug besitzen, der aus dem Ueberdrucke auf die Scheitelfugenlängen *OC* und *QH*, der erstere gegen *GF*, der letztere gegen *JK* hin gerichtet, entspringt. Die eben angedeutete Art des Niederbruches schiefer Bögen, wenn sie wie gerade ausgeführt sind, dürfte jene sein, die in der Regel eintritt.

Bei schiefen Brücken, die durch angeschüttete Erddämme hindurchgehen, wird der Bodendruck nicht nur das Bestreben zur horizontalen Verdrehung nicht vermindern, sondern um so mehr vergröfsern, je mehr der hinterfüllte Boden Schub gegen den Bogen hin übt.

Nachdem wir uns überzeugt haben, dafs einem schiefen Bogen das Bestreben zu einer horizontalen Verdrehung einwohnen kann und allemal dann zukommen wird, wenn sich dessen Masse nur in Vertikalebenen stützt, die auf der Durchgangsrichtung winkelrecht stehen und dafs eben dieses Bestreben gar nicht selten den Niederbruch schiefer Bögen herbeigeführt hat, so entsteht die Frage: Wie müssen schiefe Bögen construirt werden, um das Bestreben zur Horizontalverdrehung zu beseitigen?

Die Antwort auf diese Frage finden wir sehr leicht. Das Bestreben zur Horizontalverdrehung eines schiefen Bogens wird nicht

bestehen können, wenn sich die Wölbmasse nur in Vertikalebenen stützt, die den Stirnflächen parallel sind.

Die Richtung der Stützung der Masse eines gewölbten Bogens wird bei seiner Herstellung oder Aufmauerung vorgeschrieben und die Stützung selbst beginnt zum Theil mit der Eintreibung der Schlufssteine, im Allgemeiuen aber und vollständig mit der Lüftung des Lehrgerüstes. Die Richtung, nach welcher hin sich hierbei die Wölbmasse stützt, wird keine andere als die sein (Seite 79), nach welcher hin sich das geringste Setzen des Bogens herausstellt. Demnach müssen schiefe Bögen, deren Stützung nur in Vertikalebenen erfolgen soll, die den Stirnflächen parallel sind, dergestalt construirt werden, dafs die in der Richtung eben dieser Ebenen mit dem Eintreiben der Schlufssteine oder mit der Lüftung des Lehrgerüstes eintretende Verkürzung eines schiefen Bogens in Vertikalebenen am geringsten ist, die mit den Stirnflächen parallel gehen. Hierzu aber gehören Stofsflächen der Wölbsteine, welche in Vertikalebenen parallel den Stirnflächen liegen, und Lagerflächen, welche auf den Stirnflächen winkelrecht stehen.

Bei normaler Beschaffenheit eines Bogens stützt derselbe sein eigenes Gewicht und das aufliegender Massen wesentlich nach seiner Richtung hin. Soll nun nach eben dieser Richtung das Setzen eines Bogens am geringsten werden, wodurch derselbe ganz besonders befähigt wird, seiner Bestimmung zu entsprechen, so mufs die Lagerfläche eines jeden Wölbsteins in einem schiefen Bogen nicht blofs winkelrecht zur Stirnfläche, sondern auch winkelrecht gegen die zugehörende Richtung der innern (eigentlich der mittlern) Wölblinie des Bogens (diese nach einer Vertikalebene genommen, die der Stirnfläche parallel ist) gerichtet sein. Durch Zusammenstellung der vorstehenden Erörterungen erhält man folgende Sätze als Antwort auf die oben gestellte Frage, die zugleich den Abschnitt 13 vervollständigen und für Wölbbögen überhaupt gelten:

1) Ein Wölbbogen, dessen Stirnflächen in parallelgehenden Vertikalebenen liegen, besitzt kein Bestreben zu einer Horizontalverdrehung, wenn sich dessen Masse nur in Vertikalebenen stützen kann, die mit der Stirnfläche parallel gehen.

Damit ein Wölbbogen seine Masse nur in Vertikalebenen stütze, die mit der Stirnfläche parallel gehen, müssen

2) die Stofsflächen der Wölbsteine in Vertikalebenen liegen, die mit den Stirnflächen parallel laufen,

ferner müssen

3) die Lagerflächen der Wölbsteine eine Richtung haben, die auf der der Stirnflächen winkelrecht steht,

endlich müssen noch, soll der geringste Bogenschub zu Stande kommen,

4) die Lagerflächen der Wölbsteine auf der zugehörenden Richtung der innern (eigentlich der mittlern) Wölblinie des Bogens (nämlich nach einer Vertikalebene parallel zu den Stirnflächen genommen) winkelrecht stehen;

folglich müssen auch für jeden Wölbogen mit vertikalen Stirnflächen

5) die Stofsfugen in Vertikalebenen liegen,

6) die Lagerfugen auf der zugehörenden Richtung der Stofsfugen winkelrecht stehen, und endlich müssen

7) die Wölbfugen die Richtung der zugehörenden Stelle der innern (eigentlich der mittlern) Wölblinie des Bogens (in einer Vertikalebene parallel zur Stirnfläche befindlich) rechtwinklig durchschneiden.

Nachdem wir die Beschaffenheit der Wölb-, Lager- und Stofsfugen für Wölbbögen im Allgemeinen, also auch für schiefe Bögen festgestellt haben, gehen wir zur Betrachtung der practischen Zulässigkeit derselben für schiefe Bögen über.

Der schiefe Bogen *ABCD* Fig. 32 habe in der Richtung seiner Passagenweite, also in einer Vertikalebene, die winkelrecht auf seiner Durchgangsrichtung steht, einen Halbkreis *AE* zur innern Wölblinie. Die entsprechende innere Wölblinie an der Stirnfläche ergiebt sich nach dem Verfahren auf Seite 110 als *AB* und eben so im Aufrisse als A_2FB_2. Die innere Wölbfläche des schiefen Bogens hat abgewickelt und nach dem auf Seite 113 angegebenen Verfahren bestimmt, die Form Fig 33. Alle zwischen A_1B_1 und D_1C_1 gezogenen Linien aa_1, bb_1, cc_1 etc., die unter sich in den Richtungen A_1D_1 gleiche Abstände von einander haben, müssen an der innern Wölbfläche des schiefen Bogens Linien geben, die sämmtlich in Vertikalebenen parallel zu den Stirnflächen liegen; sie haben folglich die nämliche Richtung, die den Stofsfugen des schiefen Bogens zugehören. Wenn aber die zwischen A_1B_1 und D_1C_1 in der Richtung

A_1D_1 gleich weit von einander abstehenden Linien aa_1, bb_1, cc_1 etc. in Fig. 33 die Richtung der Stofsfugen der Wölbsteine des schiefen Bogens Fig. 32 darstellen, dann werden alle die Linien, wie GH, LM, JK in Fig. 33, die A_1B_1 und D_1C_1 verbinden und die zwischen den letztern liegenden Linien aa_1, bb_1 winkelrecht durchschneiden, Lagerfugen des schiefen Bogens Fig. 32 auf seiner abgewickelten innern Wölbfläche sein können, denn sie müssen an der innern Wölbfläche Linien geben, welche die Stofsfugenrichtungen winkelrecht kreuzen. Mittels der Linien GH, LM, JK u. s. f. und der zwischen A_1B_1 und D_1C_1 liegenden Linien aa_1, bb_1 lassen sich die Wölbsteinflächen, welche die innere Wölbfläche bilden, darstellen, wie diefs in Fig. 33 mit Versetzung der Stofsfugen geschehen ist.

Aus einer nähern Betrachtung der Figur 33 erhellt

a) dafs die Lagerfugen von F_1C_1 gegen F_1B_1 hin, so wie von F_1A_1 gegen D_1F_1 hin um so mehr zusammenlaufen, je näher ihr Anfang auf F_1C_1 oder F_1A_1 an C_1 oder D_1 liegt, und

b) dafs die Höhe der Wölbschichten von F_1C_1 gegen F_1B_1, sowie von F_1A_1 nach D_1F_1 hin abnimmt.

Die wahre Richtung der Stofs- und Lagerfugen eines schiefen Bogens gestattet, gemäfs der Figur 33, nicht die Verwendung von Wölbsteinen mit gleich grofsen der innern Wölbfläche zugekehrten Flächen, was die Ausführung schiefer Bögen mit richtigen Stofs- und Lagerfugen nicht wenig erschwert. Die Wölbsteine in der Nähe der Puncte B_1 und D_1 erhalten überdiefs nach der Richtung der Stirnseiten A_1B_1 und D_1C_1 eine nur kleine Länge, deren Herstellung unter Umständen nicht eben bequem sein kann. Für die Stützungsrichtung eines schiefen Bogens wird es indefs ohne Nachtheil sein, an eben diesem Puncte die Wölbsteine nicht in der Länge auszuführen, wie sie die Figur 33 giebt, sondern etwa in der Gröfse, welche die Figur 34 zeigt. Ein verhältnifsmäfsig nur geringer Unterschied in der Länge der Wölbsteine eines schiefen Bogens stellt sich dann heraus, wenn dessen innere Wölblinie winkelrecht gegen seine Durchgangsrichtung z. E. kein Halbkreis, sondern etwa ein Kreisstichbogen ist. Als Beleg hierzu mag der schiefe Bogen Fig. 35 dienen, dessen innere Wölbfläche mit den sie bildenden Wölbsteinsflächen die Figur 36 darstellt. Haben Brücken eine geringere Schiefe, als die in der Figur 32, dann ist auch das Zusammenlaufen

der Lagerfugen *LM* und *JK* Fig. 33 geringer, also auch die Differenz in der Länge der Wölbsteine weniger erheblich, selbst wenn die innere Wölblinie nach der Richtung der Passagenweite als Halbkreis genommen wird.

Durch die Richtung der Lagerfugen eines schiefen Bogens ist die der Lagerflächen der Wölbsteine noch nicht völlig bestimmt; denn die Lagerfuge giebt nur die eine Richtung derselben und zwar an der innern Wölbfläche an. Zu ihrer völligen Bestimmung gehört noch die Richtung der Wölbfuge, die bekanntlich auf der zugehörenden Richtung der innern (eigentlich der mittlern) Wölblinie des Bogens winkelrecht steht. Weil nun die Wölbfuge für einen Wölbstein eines schiefen Bogens keine gerade, sondern stets eine krumme ist und weil ferner die Richtung der innern Wölblinie in allen den Puncten eine andere wird, welche von der Lagerfuge getroffen werden, so folgt hieraus,

> dafs die Lagerfläche eines jeden Wölbsteins in einem schiefen Bogen mit richtigen Stofs- und Lagerfugen keine gerade, sondern eine gewundene Fläche sein mufs.

Für den einzelnen Wölbstein eines schiefen Bogens wird die gewundene Gestalt seiner Lagerfläche um so unmerklicher sich zeigen oder, einer ebenen Fläche um so näher liegen, je geringer die Schiefe des Bogens und je kleiner die Wölbsteine im Vergleich mit dem Bogen sind. Die Bestimmung dieser Lagerflächen hat bei der practischen Ausführung eines schiefen Bogens keine Schwierigkeiten, denn sie ermitteln sich durch die Richtung der Stofsfugen und durch die der Wölbfugen.

Die Mühen sind nicht ganz gering, die eine genaue Ausführung eines schiefen Bogens mit richtigen Lagerflächen der Wölbsteine, verglichen mit der eines geraden Bogens, bietet. Eine, wenn auch nicht erhebliche, Erleichterung bei der Herstellung schiefer Bögen wird erreicht, wenn man, wie in Fig. 31, auf der abgewickelten Wölbfläche des Bogens Fig. 30 sämmtliche Lagerfugen winkelrecht zur Chorde *ab* oder *cd* nimmt. Die Abweichung der so sich ergebenden Lagerfugen von deren wahrer Richtung ist nur an den Enden *ad* und *bc* des Bogens, nicht aber in der Nähe seines Scheitels erheblich. Die Zulässigkeit der eben angeführten Richtung der Lagerfugen erscheint defshalb für die Praxis um so unbedenklicher, weil das

Setzen eines Bogens am erheblichsten in der Nähe des Scheitels erfolgt (Seite 97), besonders wenn das auf Seite 89 angegebene Verfahren für das Einwölben der einzelnen Steine gehandhabt wird.

Bei einer Richtung der Lagerfugen eines schiefen Bogens, deren wir zuletzt gedachten, und welche für den schiefen Bogen Fig. 30 in Fig. 31 angegeben ist, bilden eben diese Lagerfugen an der innern Wölbfläche Schraubenlinien, die zugehörenden Lagerflächen aber Schraubenflächen, wenn die innere Wölblinie des schiefen Bogens nach der Richtûng seiner Passagenweite die Gestalt eines Kreisbogens hat.

Schiefe Bögen müssen, wie gerade, über Lehrgerüsten aufgeführt werden. Die Form und Richtung der Lehrbögen wird hierbei mit der Wölblinie der innern Wölbfläche, parallel zur Stirnfläche genommen, zusammenfallen müssen. Nur in seltenen Fällen dürfte die Form eines schiefen Wölbbogens nach der Richtung der Passagenweite, also winkelrecht zur Durchgangsrichtung desselben, unabänderlich vorgeschrieben sein. Ist diese Form für eine schiefe Brücke zu wählen, dann wird die Construction der Lehrbögen eine Vereinfachung erfahren, wenn man die innere Wölblinie der Brücke in der Ebene ihrer Stirnfläche als Kreisbogen, etwa als Halbkreis nimmt, denn die Lehrbögen werden dann ebenfalls durch Kreisbögen an der der schiefen Wölbfläche zugekehrten Seite begrenzt.

Nicht immer stellt man bei der Ausführung schiefer Brücken die Lehrbögen parallel zu den Stirnflächen, sondern auch bisweilen nach der Richtung der Passagenweite. Die nächste Veranlassung hierzu ist die Bequemlichkeit der Herstellung der Lehrbögen; denn bei dieser Stellung haben sie die Form der innern Wölblinie nach der Richtung der Passagenweite, die fast immer als Kreisbogen gewählt wird. Eben diese Bequemlichkeitsmethode, die oft aus der Unkenntnifs der Construction der innern Wölblinie nach Vertikalebenen, parallel zu den Stirnflächen, aus jener nach der Richtung der Passagenweite, entspringt, ist nur bei geringen Spannweiten und bei sehr steifen Lehrgerüsten anzuwenden. Für gröfsere Spannweiten mufs sie defshalb sehr widerrathen werden, weil aus einer Stellung der Lehrbögen, die mit der Stirnfläche nicht parallel ist, besonders in der Nähe der Stirnseiten, eine ungleichförmige Biegung entsteht, die nicht blofs nachtheilig auf die Form, sondern auch auf die Stützungs-

richtung und den Halt des schiefen Bogens einwirkt. Uebrigens wird, wie wir bereits angeführt haben, die mit der winkelrechten Stellung der Lehrbögen zur Durchgangsrichtung schiefer Bögen erzielte Erleichterung hinsichtlich der Lehrbögen viel einfacher und ohne eine nachtheilige Einwirkung auf den herzustellenden Bogen zu bedingen, dadurch erlangt, dafs man die innere Wölblinie des schiefen Bogens parallel zur Ebene der Stirnfläche als Kreisbogen nimmt.

Als Stellvertreter für schiefe Brücken wurden früher sogenannte schiefe Gurtbogenbrücken, wie die Figur 39 eine solche im Grund- und Aufrifse darstellt, ausgeführt. Sie bestehen aus einzelnen geraden Bögen *ABCD*, *EGHF* etc., die nach Mafsgabe der Durchgangsrichtung zur Stirnfläche an einander gestellt sind. Ein Verband dieser Bögen wird zunächst nur durch eiserne Klammern und ferner durch die Ueber- und Hintermauerung herzustellen sein, der jedoch niemals die Solidität gewährt, die ein wahrhaft schiefer Bogen mit versetzten Stofsfugen, bei richtiger Construction und Ausführung, bietet. Namentlich ist die Tragfähigkeit schiefer Gurtbogenbrücken ungleich geringer, als die der eigentlich schiefen Brücken mit gewechselten Stofsfugen. Unweit Dresden, in der Nähe des Dorfes Trachau, geht die Leipzig-Dresdener Eisenbahn mittels einer schiefen Gurtbogenbrücke über die Dresden-Meifsener Chaussee weg. Dieselbe ist von pirnaischem Sandstein erbaut und hat sich bis jetzt als genügend bewährt. Ob sie aus einem weichern Materiale hergestellt sich ebenso zeigen würde, steht zu bezweifeln.

Ueber die graphische Darstellung der Stofs- und Lagerfugen schiefer Bögen bleibt uns nur wenig zu bemerken übrig. Nachdem die innere Wölblinie an der Stirnseite eines schiefen Bogens, wie z. E. in Fig. 32, aufgetragen ist, werden die auf der abgewickelten innern Wölbfläche Fig. 33 verzeichneten Stofsfugenrichtungen aa_1, qb_1, cc_1 etc. für den Aufrifs Fig 32 ganz einfach erhalten, wenn man durch die Puncte 1, 2, 3 etc. zwischen A_2 und F Horizontalen zieht, von den Anfangspuncten 1, 2, 3 derselben aus die Abstände ei$_2a$, A_2b, A_2c etc. aufträgt und die zusammengehörenden Puncte mit Anander verbindet. Dieses Verfahren gründet sich auf den Umstand, dafs die Stofsfugenrichtungen aa_1, bb_1, cc_1 etc. Fig. 33 in den zu A_1D_1 parallelen Richtungen 1_11, 2_12, 3_13 etc. die nämlichen Abstände,

als auf A_1D_1, folglich auch gleiche Abstände auf A_2D_2 Fig. 32 von einander haben, und ferner darauf, dafs die zu A_1D_1 parallelen Linien $1_1 1$, $2_1 2$ etc. in Fig. 33 an der innern Wölbfläche des Aufrifses Fig. 32 als gerade Linien erscheinen müssen.

Die Bestimmung der Lagerfugen im Aufrifse eines schiefen Bogens, wie in Fig. 32, kann sehr leicht mittels des Netzes geschehen, das die Stofsfugenrichtungen aa_1, bb_1, cc_1 etc. und die Horizontalen $1_1 1$, $2_1 2$, $3_1 3$ etc. bilden, und zwar so, dafs man die Stofsfugen in dieses Netz so einträgt, als es die zugehörende abgewickelte innere Wölbfläche Fig. 33 vorschreibt.

In der soeben angeführten Weise sind auch die Lagerfugen eines schiefen Bogens Fig. 32 in den zugehörenden Grundrifs $ABCD$ des letztern einzutragen. Im Grundrifse Fig. 32 haben die Stofsfugen aa_1, bb_1, cc_1 etc. eine parallele Richtung zu AB und die Linien $1_1 1$, $2_1 2$, $3_1 3$ etc. eine parallele Richtung mit AD. Das von den eben aufgezählten Linien im Grundrifse des schiefen Bogens gebildete Netz gestattet das Eintragen der Lagerfugen in dasselbe; denn die letztern müssen hier dieselbe Lage zu den Linien des Netzes haben, als in der abgewickelten Wölbfläche Fig. 33.

Die gleichartige Bezeichnung dergleichen Linien in den zusammengehörenden Figuren wird hoffentlich das Verständnifs der graphischen Darstellung der Stofs- und Lagerfugen für alle schiefe Bögen, die wir bisher betrachteten, wesentlich fördern. Hinsichtlich der Richtung der Lagerfugen schliefsen wir noch die Bemerkung an, dafs sie für die schiefen Bögen Fig. 32 und 35 auf den zugehörenden Mantelflächen Fig. 33 und 36 durchgängig regelrecht oder winkelrecht gegen die Stofsfugen, für die schiefen Bögen Fig 30 und 37 auf den entsprechenden Mantelflächen Fig. 31 und 38 dagegen nur genähert und durchaus winkelrecht zur Chorde der innern Wölblinie an der Stirnseite genommen sind.

Noch haben wir einige Bemerkungen über den Scheiteldruck oder Horizontalschub schiefer Bögen anzuschliefsen. Es müssen schiefe Bögen, wie wir erkannt haben, das Gewicht ihrer Masse nur in Vertikalebenen stützen, die den Stirnflächen parallel sind. Geschieht diefs, dann wird auch jene mittlere Wölblinie des schiefen Bogens, die in einer Vertikalebene parallel zur Stirnfläche liegt, als vorgeschriebene Stützlinie für die Wölbmasse im Allgemeinen

auftreten. Es ist die innere Wölblinie eines schiefen Bogens in einer Vertikalebene parallel zur Stirnfläche, wie uns die bisherigen Betrachtungen und die Figuren 30, 32 etc. zeigen, stets im Scheitel um so flacher, hat also einen um so gröſsern Krümmungshalbmesser daselbst, als die innere Wölblinie nach der Richtung der Passagenweite, je gröſser die Schiefe des Bogens ist. Dasselbe, was wir soeben für die innere Wölblinie bemerkten, wird in ganz gleicher Weise auch für die mittlere bestehen. Weil nun der Horizontalschub eines schiefen Bogens von regelrechter Construction und Ausführung nicht vom Krümmungshalbmesser im Scheitel der mittlern Wölblinie nach einer Vertikalebene winkelrecht zu seiner Durchgangsrichtung, sondern nur vom Krümmungshalbmesser im Scheitel der mittlern Wölblinie nach einer Ebene parallel zur Stirnfläche abhängt und der letztere Krümmungshalbmesser um so gröſser als der erstere wird, je gröſser man die Schiefe des Bogens wählt: so muſs, bei unveränderlicher Passagenweite, der Horizontalschub eines Bogens mit seiner Schiefe zunehmen. Für die Praxis geht hieraus hervor, daſs man Bögen von vorgeschriebener Passagenweite eine möglichst kleine Schiefe geben müsse, um einen möglichst kleinen Horizotalschub zu erhalten.

Sechzehnter Abschnitt.

Ueber krumme Brücken.

Die Richtung der Landstraſen und der Eisenbahnen muſs nicht selten von der geradlinigen abweichen, theils um dadurch gewisse Hindernisse zu umgehen, theils um damit gewisse Orte zu erreichen.

Die Art der Benutzung einer Landstraſse gestattet eine jähe Abänderung ihrer Richtung. Nicht eben so ist es bei Eisenbahnen. Bei diesen muſs der Uebergang aus der geradlinigen Richtung in die krummlinige möglichst unmerklich und der Theil einer Krümmung,

den die Länge eines Wagenzuges einnimmt, ein Bogen sein, der mit seiner Sehne nahe zusammenfällt. Die Krümmungen der Eisenbahnen oder die sogenannten Curven pflegt man als Kreisbögen in der Art zu gestalten, dafs die Richtung oder die Tangente des Endpunctes einer solchen mit der sich anschliefsenden geradlinigen oder krummlinigen Richtung der Bahn zusammenfällt. Die gewöhnlich vorkommenden Curven sind einfache, d. h. aus einem Kreisbogen bestehende, oder auch sogenannte Contrecurven, deren Gesalt ∾ förmig ist und welche durch zwei Kreisbögen znsammengesetzt werden. Den mittlern Radius der Krümmung einer Eisenbahncurve nennt man deren Krümmungshalbmesser.

Die Länge der Brücken ist, verhältnifsmäfsig, fast immer nur gering, so dafs bei Landstrafsen, zumal eine jähe Aenderung ihrer Richtung zulässig ist, die Nothwendigkeit wohl gar nicht, bei Eisenbahnen aber gewifs höchst selten, eintritt, Brücken krummlinig bauen zu müssen. Fällt bei einer Eisenbahn eine Brücke in eine Curve und ist deren Länge nur gering, dann wird eine geradlinige Brücke, von gröfserer Breite als gewöhnlich gebaut, die Ueberführung der Bahn in krummliniger Richtung über die letztere zuverlässig gestatten. Dasselbe Mittel, nämlich die Breiterfassung der Brücke, wird auch dann zur Umgehung einer schiefen Brücke noch zulässig sein, wenn eine solche von erheblicher Länge in eine Bahncurve mit einem kleinen Krümmungshalbmesser fällt; indefs mufs man doch, und zwar der Kosten halber, bisweilen hiervon absehen und die Brücke wirklich krumm herstellen.

Angenommen, in Fig. 40 sei *MA* die Krümmung der äufsern und *ND* die der innern Stirnfläche einer herzustellenden Brücke. Es scheint zunächst zu liegen, die Schäfte oder Pfeiler *AC*, *EG* u. s. f. nach dem zugehörenden Mittelpuncte der Krümmung zu richten. Dadurch nun wird die horizontale lichte Oeffnung *BCFE* zwischen je zwei Pfeilern, über die sich ein Bogen spannt, trapezförmig oder, die lichte Spannweite jedes Bogens erweitert sich von *CF* nach *BE* hin. Nehmen wir den Bogenanfang an den zwei Pfeilern *BD* und *EG* in durchaus gleicher horizontaler Höhe und die innere Wölblinie an der innern Stirnfläche *CF* z. E. als Halbkreis, dann mufs die von *CF* nach *BE* hin gelegene innere Wölbfläche von der cylindrischen Gestalt und zwar derartig abweichen, dafs die innere Wölb-

linie an der äufsern Stirnfläche *BE* als ein gedrückter Kreisbogen erscheint, dafern eine waagerechte Richtung der Scheitellinie der innern und äufsern Wölbfläche gefordert wird.

In Eisenbahncurven liegen die Schienen bekanntlich nicht in einer horizontalen, sondern in einer gegen den Mittelpunct der Curve hin gerichteten schiefen Ebene. Demnach können auch die Scheitellinien der Bögen krummer Brücken in Ebenen liegen, die sich gleichfalls gegen den Mittelpunct der Krümmung hin senken; woraus wiederum folgt, dafs wohl in den meisten Fällen, wenn z. E. die innere Wölblinie der Stirnfläche *CF* ein Halbkreis ist, alle zwischen den zwei Stirnflächen *CF* und *BE*, in Vertikalebenen parallel den Stirnflächen, liegenden Wölblinien ebenfalls Halbkreise sein können. Ueberhaupt wird es unbedenklich sein, alle zwischen *CF* und *BE* befindlichen innern oder mittlern Wölblinien, die in Vertikalebenen parallel den Stirnflächen liegen, auch in dem Maafse zu erhöhen, als sich deren Spannweite vergröfsert, weil die hieraus entspringende und sich gegen den Mittelpunct der Krümmung hin neigende Brückenfläche diese Lage haben kann oder haben mufs. Eine Neigung der Brückenbahn gegen den Mittelpunct der Krümmung, gröfser als sie practisch zulässig ist, entspringt hieraus innerhalb der zulässigen Spannweiten und der kleinsten üblichen Krümmungshalbmesser der Bahncurven nicht, was sich leicht darthun läfst. Gesetzt, es sei der mittlere Krümmungshalbmesser der Bahnstrecke, in die eine krumme Brücke einzubauen ist, 500 Ellen, die Breite $BC = EF$ der Brücke 15 Ellen, ferner die geradlinige Entfernung *CF* oder, die lichte Spannweite des Bogens zwischen den Pfeilern *BD* und *EG* an der innern Stirnfläche = 20 Ellen, die Pfeilerlänge an der innern Stirnseite $DC = 4$ Ellen und endlich die innere Wölblinie an der innern Stirnfläche ein Halbkreis von 10 Ellen Radius.

Der Halbmesser der innern Brückenkrümmung beträgt

$$500 - 7\tfrac{1}{2} = 492\tfrac{1}{2} \text{ Elle}$$

und der der äufsern

$$500 + 7\tfrac{1}{2} = 507\tfrac{1}{2} \text{ Elle.}$$

Die Bögen *CF* und *BE* gehören demselben Centrumswinkel und ebenso die Bögen *DC* und *AB* einem Centrumswinkel an. Defshalb und weil sich die zu einem Centrumswinkel gehörenden Bögen und Chorden wie die Radien verhalten, wird

$$\text{Chorde } BE = \frac{507,5 \times 20}{492,5} = 20,609 \text{ Ellen} = 20 \text{ Ellen } 14,6 \text{ Zoll},$$

$$\text{„} \quad AB = \frac{507,5 \times 4}{492,5} = 4,0829 \text{ „} = 4 \text{ „} \quad 14 \text{ „}$$

Wenn aber *BE* nur um 14,6 Zoll gröſser als *CF* ist, dann wird der Halbmesser der halbkreisförmigen innern Wölblinie an der äuſsern Stirnfläche

10 Ellen 7,3 Zoll

betragen, während derselbe an der innern Wölbfläche

10 Ellen

ist. Der Scheitel der innern Wölblinie an der äuſsern Stirnfläche liegt demnach nur um 7,3 Zoll höher, als der gleichnamige Punct an der innern Stirnfläche und ein nur unbedeutend gröſserer Höhenunterschied wird sich selbst dann für die durch die äuſsern Scheitel der Wölbbögen gelegte Linie ergeben, wenn die Bogenhöhe von der innern Stirnfläche nach der äuſsern hin, nach Maſsgabe der zunehmenden Spannweite, wächst. Die Differenz der Pfeilerlängen *DC* und *AB* ergiebt sich nach der vorstehenden Rechnung zu

2 Zoll.

Die gefundenen Zahlenwerthe, verglichen mit dem Umstande, daſs bei Eisenbahnen, wenigstens die mit Ueberbrückungen zusammenfallenden Curven, wohl nie Krümmungshalbmesser unter 500 Ellen haben und daſs die lichten Spannweiten krummer Brücken mit Nutzen nicht über 20 Ellen zu wählen sein werden, geben den Beleg zu unserer gestellten Behauptung, daſs es nämlich immer zulässig sein wird, den Wölbbogen von *CF* nach *BE* hin in dem Maſse zu erhöhen, als seine Weite zunimmt.

Es fragt sich nun: Wie sind die Pfeiler- und Stirnflächen zu gestalten? Es liegt nicht auſser dem Bereiche der Möglichkeit, die Stirnflächen der Pfeiler und Bögen kreisförmig herzustellen, doch ist keine Nothwendigkeit, aber auch kein Vortheil zu bezeichnen, der für die kreisförmige Krümmung spricht. Deſshalb und mit Rücksicht auf die practische Bauführung wird von der kreisförmigen Gestalt der Stirnflächen einer krummen Brücke abgesehen werden können und die vertikale Stirnfläche eines jeden Bogens oder Pfeilers in die Richtung der zugehörenden Sehne *CF*, *BE*, *DE*, *AB* u. s. f.

zu legen sein. Die Gestalt, die hierdurch die ursprünglich krumme Brücke annimmt, ist eine polygonale und nur diese wird immer gemeint, wenn man von krummen Brücken spricht.

Wir verschreiten nun zur Bestimmung der statischen Verhältnisse krummer oder polygonaler Brücken von bisher angedeuteter Construction.

Die innere und äufsere Stirnfläche der Bögen, welche z. E. zwischen den Pfeilern *FH* und *CA* der krummen Brücke Fig. 39 liegen, gehen parallel, aber stehen nicht winkelrecht auf den Pfeilerflächen *BC* und *EF*. Der Schub nun, der von dem zwischen *BF* befindlichen Bogen auf den Pfeiler *EG* übergeht, hat die Richtung der Chorde *CF*, so wie der auf den nämlichen Pfeiler übergehende Schub des über *HK* befindlichen Bogens die Richtung der Chorde *GK*. Die Schübe der über *HK* und *EC* stehenden Bögen gegen den Pfeiler *HF* werden zuverlässig gleich grofs, wenn die Spannweiten und Massenanordnungen der Bögen gleich sind. Die Richtungen derselben aber, unter welchen sie auf den Pfeiler einwirken, sind nicht die nämlichen, wefshalb sie sich, ungeachtet ihrer gleichen Gröfse, nicht gegenseitig aufheben können, sondern einen Druck *s* erzeugen müssen, der den Pfeiler *EG* in der Richtung des Radius der Krümmung nach auswärts zu schieben das Bestreben hat. Was wir vom Pfeiler *EG* so eben anführten, wird in gleicher Weise auch für alle übrigen gelten müssen.

Den allgemeinen Ausdruck für die Gröfse des nach auswärts gerichteten Pfeilerdruckes bei krummen Brücken findet man leicht und etwa auf folgende Weise. In Fig. 41 sei *C* der Mittelpunct der Krümmung einer Brücke, *AC* gleich R_1 der Radius der innern Krümmung, die innere lichte Spannweite eines Bogens $AD = 2r$ und die Pfeilerlänge $DF = 2p$. Die vertikale innere Stirnfläche des Bogens geht durch die Eckpuncte *A* und *D* und die dem Centrum *C* zugekehrten Pfeilerflächen gehen durch die Puncte *D* und *F*. Bezeichnen wir den Centrumswinkel *ACD* der lichten Spannweite eines jeden Bogens mit 2α und den Centrumswinkel *DEF* der Breite jedes Pfeilers mit 2β, dann ist

$$(1)\quad \sin \alpha = \frac{r}{R_1}; \quad \sin \beta = \frac{p}{R_1}.$$

Ferner ist der Winkel AEG, den die verlängerten Stirnflächen zweier gegen einen Pfeiler sich anlehnender Bögen mit einander einschliefsen, wenn die Bögen und wenn die Pfeiler unter sich von gleicher Gröfse sind,

$$2\gamma = 2 \{90 - (\alpha + \beta)\} \text{ d. g.}$$

$$(2) \quad \gamma = 90 - (\alpha + \beta).$$

Jeder von den Bögen, die sich gegen einen Pfeiler stützen, giebt einen gesammten Horizontalschub in einer Vertikalebene parallel zu den Stirnflächen von C. Diese Schübe mögen, linear dargestellt, ac und bc Fig. 42 sein. Der Winkel, den sie mit einander einschliefsen, ist

$$acb = 2\gamma.$$

Nach der Lehre vom Parallelogramm des Druckes ist der aus den Drücken $ac = cb = C$ entspringende Druck die Diagonale cd des mit ac und bc beschriebenen Parallelogramms und, weil $ac = bc$ ist,

$$ce = \tfrac{1}{2}\, cd = \tfrac{1}{2}\, s,$$

ferner

$$\angle ace = \angle bce = \tfrac{1}{2}\,\gamma,$$

sowie

$$s = dc = 2 . ce = 2\, ac . \cos\gamma = 2\, C \sin(\alpha + \beta).$$

Der Druck also, mit welchem ein Pfeiler einer krummen Brücke durch die gegen denselben sich lehnenden Bögen von gleicher Beschaffenheit nach auswärts in der Richtung des Radius der Krümmung gedrückt wird, ist

$$\text{I.} \quad s = 2\, C \sin(\alpha + \beta) = C . 2 \sin(\alpha + \beta).$$

Aus den oben angenommenen Mafsen für eine schiefe Brücke, nämlich

$$r = 10 \text{ Ellen}, \; p = 2 \text{ Ellen und } R_1 = 492{,}5 \text{ Ellen},$$

ergiebt sich:

$$\sin\alpha = \frac{10}{492{,}5}; \quad \alpha = 1^0\, 9'\, 48'',$$

$$\sin\beta = \frac{2}{492{,}5}; \quad \beta = 14' \quad ,$$

$$\alpha + \beta = 1^0\, 23'\, 48'',$$

folglich

$$s = 0{,}048748\; C.$$

Der Schub s hängt, aufser von den Winkeln α und β, hauptsächlich von C ab, dessen Werth, bei halbkreisförmigen Wölbbögen, mit der lichten Spannweite abnimmt.

Bei krummen Brücken mit nur geringer Pfeilerhöhe kann der radiale Schub s nach auswärts, der auf jeden Pfeiler kommt, geradezu unbeachtet gelassen werden, dagegen wird es bei hohen Pfeilern räthlich, die dem Centrum der Krümmung abgekehrte Stirnseite derselben mit Strebepfeilern zu versehen.

Eine zweite Methode, krumme Brücken zu bauen, kann darin bestehen, die innere lichte Weite CF eines jeden Bogens Fig. 43 gleich der äufsern DE zu machen und die innern und äufsern Stirnflächen normal gegen die zugehörende Mittellinie GH zu richten, also die Pfeiler im Querschnitt keilförmiger zu gestalten, als diefs geschieht, wenn die sich zugekehrten Pfeilerflächen nach dem Mittelpuncte der Krümmung hin laufen. Die Abweichung der Pfeilerquerschnittsfläche von der rectangelförmigen Gestalt, welche die eben angeführte zweite Constructionsmethode giebt, ist nicht unbeträchtlich. Für die oben angenommenen Mafse ist, wenn die Pfeilerseiten AB und CD nach dem Mittelpuncte der Krümmung gerichtet sind, die äufsere Pfeilerlänge

$$AD = 4 \text{ Ellen } 2 \text{ Zoll und}$$

die äufsere lichte Weite des Bogens

$$DE = 20 \text{ Ellen } 14{,}6 \text{ Zoll.}$$

Soll aber die äufsere lichte Weite des Bogens gleich der innern sein, dann fällt der äufsern Pfeilerlänge von jedem angrenzenden Bogen sehr nahe die Hälfte von 14,6 Zoll zu. Für die Construction in Fig. 43 ist somit nahezu die äufsere Pfeilerlänge

$$4 \text{ Ellen } 2 \text{ Zoll} + 14{,}6 \text{ Zoll} = 4 \text{ Ellen } 16{,}6 \text{ Zoll,}$$

woraus sich eine Differenz zwischen der innern und äufsern Pfeilerlänge von nahe

$$16{,}6 \text{ Zoll}$$

ergiebt.

Das mifsgestaltete Ansehen, das Pfeiler krummer Brücken bei der zweiten Construction erhalten, ungleich mehr aber der Umstand, dafs deren Länge von der innern Stirnfläche nach der äufsern hin zunimmt oder deren Querschnittsfläche sich vergröfsert, während deren Belastung durch die Bögen von der innern Stirnfläche nach

der äufsern gleichmäfsig ist, läfst die erste Methode, krumme Brücken zu construiren, ungleich besser als die zweite erkennen.

Was wir über krumme Brücken entwickelten, führt uns zu folgenden Sätzen:

1) Man vermeide krumme Brücken, wo es nur immer möglich ist.

2) Es liegt keine Nothwendigkeit vor, die Stirnflächen krummer Brücken zirkelrund zu machen. Deren Ausführung wird, unbeschadet ihrer Bestimmung, erleichtert, wenn man die Stirnflächen der Bögen und die der Pfeiler als in der Richtung der Brückenkrümmung an einander stofsende gerade Flächen gestaltet.

3) Den Bögen krummer Brücken an der innern und äufsern Stirnseite gleiche Spannweite zu geben, ist unräthlich; besser wird es immer sein, die sich zugekehrten Pfeilerflächen nach dem Mittelpuncte der Krümmung hin zu richten, wodurch die lichte Spannweite jedes Bogens an der innern Stirnfläche kleiner, als die an der äufern wird.

4) Jeder gewölbte Bogen einer krummen Brücke kann sich von der innern Stirnfläche nach der äufsern hin, nach Mafsgabe der Zunahme seiner Spannweite, erheben, so dafs zwischen der lichten Spannweite und der lichten Höhe aller Wölblinien, die in Vertikalebenen parallel zu den Stirnflächen liegen, durchaus dasselbe Verhältnifs stattfindet.

5) Krumme Brücken müssen wo möglich nur aus gleichen Bögen bestehen.

6) Der Druck auf die Pfeiler krummer Brücken in der Richtung des Radius der Krümmung von der innern Stirnfläche nach der äufsern hin nimmt mit der Spannweite, mit dem Horizontalschub jedes Bogens und mit Verkleinerung des Radius der Krümmung der Brücke zu. Kleine Spannweiten, Umgehung flacher Wölbbögen und grofse Halbmesser für die Krümmung der Brücke mindern allein den Pfeilerdruck nach der Richtung des Radius der Brückenkrümmung.

7) Der Pfeilerdruck krummer Brücken nach der Richtung des Radius der Brückenkrümmung wirkt um so nachtheiliger auf die Standfähigkeit der Pfeiler, je höher diese sind. Die durch den erwähnten Pfeilerdruck verringerte Standfähigkeit der Pfeiler

ist durch an die Aufsenseiten derselben angesetzte Strebepfeiler auszugleichen.

Siebzehnter Abschnitt.

Gesetze der Tragfähigkeit gewölbter Bögen.

Die Frage: wie stützen gewölbte Bögen Lasten, die in einzelnen Puncten über denselben stehen? ist schon mehrfach angeregt worden. Eine sachgemäfse Beantwortung derselben wird nur mit Beachtung des Wesens und der Bestimmung gewölbter Bögen möglich.

Jeder gewölbte Bogen soll, wie wir schon mehrfach angeführt haben, sein eigenes Gewicht und das über ihm befindlicher Massen wesentlich nur in seiner Richtung stützen oder, seine mittlere Wölblinie soll für alle diese Massen als vorgeschriebene Stützlinie bestehen. Wie ein Bogen dieser Bestimmung entsprechend herzustellen ist, haben wir ganz besonders auf Seite 89 entwickelt. Für jede Last nun, die über einen Brückenbogen wegschreitet, wird der gewölbte Theil desselben ebenfalls nur als ein nach seiner Richtung stüzzender Körper auftreten. Um die hier einschlagenden Betrachtungen zu vereinfachen, nehmen wir statt eines materiellen Bogens einen linearen *EBCD* Fig. 44 an, der gleichfalls nur nach seiner Richtung hin stützungsfähig sein soll. Wir setzen ferner voraus, es sei der Raum zwischen diesem Bogen und der Linie *NN* mit irgend einem dichten Materiale erfüllt, sowie, es befinde sich im Puncte *A* der Abgleichung *NN* eine Last *L*.

Ist das Material zwischen dem linearen Bogen *EBCD* Fig. 44 und der Abgleichung *NN* eine dichte oder zusammenhängende Masse, dann wird nicht der unter *A* liegende Punct des Bogens die Last allein tragen, sondern sie wird sich über einen gewissen Theil *BC* des ganzen Bogens vertheilen. Aus der Belastung, die so auf jeden Punct dieses Bogenstückes übergeht, mufs Druck nach der Richtung

eben dieses Bogens entspringen und sich auf die Endpuncte B und C übertragen. Der Druck, der in eben bemerkter Weise auf den Endpunct B des stützenden Bogens nach seiner Richtung BF hin kommt, sei D und der, welchen der Endpunct C nach seiner Richtung CG hin empfängt, sei d.

Die Last L mufs auch gestützt werden, wenn man einen Druck D von F nach B hin gerichtet, gegen B und einen Druck d von G nach C hin gerichtet gegen C anlegt oder, die Last L fordert in den Puncten B und C die Gegendrücke D und d. Indem der Druck D von B nach dem Scheitel H hin fortgeht, setzt derselbe einen gewissen vertikal aufwärts gerichteten Druck V ab und erzeugt im Scheitel H den Horizontaldruck c. In ganz gleicher Weise mufs auch der Druck d von C aus nach dem Scheitel H hin einen Vertikaldruck v abgeben und im Scheitel selbst den Horizontalschub c_1 hervorbringen. Damit die Stützung der Last durch die Drücke D und d erfolge, mufs

$$(1)\quad V + v = L$$

sein. Aus der Last L kann unmöglich eine Horizontalverschiebung nach einer Richtung hin entspringen; folglich mufs stets

$$(2)\quad c = c_1$$

werden.

Die Begrenzungspuncte B und C des stützenden Bogens hängen zuverlässig von der Lage der Last und von der Beschaffenheit des Bogens selbst ab. Mit Hinsicht auf allgemeine Gesetze der Statik könnten wir schon jetzt aussprechen, dafs eben diese Puncte B und C keine andern, als jene sein können, deren Tangenten auf den Belastungspunct A treffen. Vor der Hand wollen wir jedoch hiervon keinen Gebrauch machen, sondern zunächst das Gesetz aufsuchen, nach welchem sich ein in B nach der Richtung der Tangente angelegter Bogendruck, unter Absetzung von vertikal aufwärts gerichtetem Druck, fortpflanzt. Zur Erleichterung dieser Bestimmung nehmen wir statt eines Bogens ein Polygon $NAEFM$ Fig. 45 an, dessen Seiten die Richtungswinkel η, η_1, η_2, $\eta_3 \ldots \eta_n$ zugehören sollen.

Ein Druck D, der auf die Polygonseite NA nach ihrer Richtung hin angelegt wird, setzt in der Ecke A den vertikal aufwärts gerichteten Druck AB ab und übt gegen die Polygonseite AE den Druck AC. Die Gröfse dieser Drücke wird bekanntlich durch die Seiten

AB und *AC* des Parallelogramms *BC* bestimmt, dessen Diagonale *AD* dem Drucke *D* gleich ist. Die Rechnung giebt uns

für den vertikal aufwärts gerichteten Druck *AB*

$$V_1 = \frac{D \sin(\eta - \eta_1)}{\cos \eta_1} = \frac{D \cos \eta \sin(\eta - \eta_1)}{\cos \eta \cos \eta_1} = D \cos \eta \, (tg\, \eta - tg\, \eta_1),$$

und für den Druck nach der Richtung der Polygonseite *AE*

$$D_1 = \frac{D \cos \eta}{\cos \eta_1}.$$

Der auf die Richtung der Polygonseite *AE* kommende Druck D_1 giebt, wie *D* in *A*, in *E*

den vertikal aufwärts gehenden Druck

$V_2 = D_1 \cos \eta_1 \,\{tg\, \eta_1 - tg\, \eta_2\} = D \cos \eta \,\{tg\, \eta_1 - tg\, \eta_2\}$ und

nach der Richtung der Polygonseiten *EF* den Druck

$$D_2 = \frac{D_1 \cos \eta_1}{\cos \eta_2} = \frac{D \cos \eta}{\cos \eta_2},$$

u. s. f.

Hiernach ist der in die Richtung einer Polygonseite fallende Druck, die mit dem Horizonte den Winkel η_n einschliefst,

$$\text{I.} \quad D_n = \frac{D \cos \eta}{\cos \eta_n}.$$

Alle Vertikaldrücke, die von der Ecke *A* aus Fig. 45 bis mit zu jener Polygonseite hin abgesetzt werden, die mit dem Horizonte den Winkel η_n einschliefst, sind

$$(s \,.\, V) = V_1 + V_2 + V_3 \ldots V_{n-1} + V_n.$$

Nun ist

$$V_1 = D \cos \eta \,(tg\, \eta - tg\, \eta_1),$$
$$V_2 = D \cos \eta \,(tg\, \eta_1 - tg\, \eta_2),$$
$$V_3 = D \cos \eta \,(tg\, \eta_2 - tg\, \eta_3) \text{ u. s. f.}$$
$$V_n = D \cos \eta \,(tg_{n-1} - tg\, \eta_n), \text{ folglich}$$
$$\text{II.} \quad (s \,.\, V) = D \cos \eta \,\{tg\, \eta - tg\, \eta_n\}.$$

Dafs die Formeln I. und II. völlig ungeändert auch für stetig gekrümmte Linien gelten müssen, folglich auch für den die Last *L* Fig. 44 stützenden Bogen *BC*, bedarf wohl keiner nähern Begründung. Nach eben diesen Formeln wird der von *F* nach *B* hin gehende Druck *D*, wenn seine Richtung mit einer Horizontale den

Winkel η einschliefst, bis zum Scheitel H, wo die Richtung des Bogens mit einer Horizontale den Winkel

$$\eta_n = 0$$

bildet, den vertikal aufwärts gerichteten Druck

$$(3)\quad (s\,.\,V) = D \cos\eta\,(tg\,\eta - tg\,0) = D \sin\eta$$

absetzen und den Scheitel H drücken mit

$$(4)\quad D_0 = \frac{D \cos\eta}{\cos 0} = D \cos\eta.$$

In ganz gleicher Weise übt der in der Richtung GC unter dem Winkel μ gegen eine Horizontale auf den Punct C des Bogens einwirkende Druck d gegen den Scheitel H des Bogens den Druck

$$(5)\quad d_0 = d \cos\mu$$

und setzt von C bis zum Scheitel H hin den Vertikaldruck

$$(6)\quad (s\,.\,v) = d \sin\mu$$

ab.

Mit Beziehung auf (1) wird

$$L = (s\,.\,V) + (s\,.\,v) \text{ oder}$$

$$\text{III.}\quad L = D \sin\eta + d \sin\mu,$$

und mit Beziehung auf (2)

$$c = c_1 = D_0 = d_0 \text{ d. g.}$$

$$\text{IV.}\quad D \cos\eta = d \cos\mu = c.$$

Durch Reduction erhält man aus III. und IV.

$$\text{V.}\quad \begin{cases} D = \dfrac{L \cos\mu}{\sin(\eta + \mu)} \\ d = \dfrac{L \cos\eta}{\sin(\eta + \mu)}. \end{cases}$$

Für die gemachte Voraussetzung, der Bogen $EBCD$ Fig. 44 stütze, und zwar nur nach seiner Richtung hin, die Last L zunächst, kann sich eben diese Last nur über einen Bogen BC verbreiten, dessen Endpuncte durch Tangenten bestimmt werden, die vom Puncte A der Belastung ausgehen, wenn das Füllmaterial zwischen dem Stützbogen und der Abgleichung ein dicht zusammenhängender Körper ist. Die Lage der Last L gegen den stützenden linearen Bogen und die Beschaffenheit des letztern selbst bedingen somit die Winkel η und μ.

Bezeichnet man die Winkel mit α und β, welche die Tangen-

ten der Puncte B und C mit einer Vertikale durch A einschliefsen, dann ist

$$\eta = 90 - \alpha;\ \mu = 90 - \beta;\ \text{folglich}$$

$$\text{VI.}\ \begin{cases} D = \dfrac{L \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \\ d = \dfrac{L \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \end{cases}$$

und der aus der Belastung entstehende Horizontaldruck im Scheitel der stützenden Linie

$$\text{VII.}\ c = D \sin \alpha = \frac{L \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{L}{cotg\, \beta + cotg\, \alpha}.$$

Der von der Last L entspringende Druck für die Puncte B und C des stützenden Bogens geht entweder sofort in die Masse der Hintermauerung über oder, er pflanzt sich in der Richtung des Bogens bis zu seinen Endpuncten E und D, unter Absetzung von Horizontaldruck, fort. Bei materiellen gewölbten Bögen wird die directe Fortpflanzung der Drücke D und d in der Regel nicht eintreten. Wie sie indefs auch erfolgen möge, die entstehende Einwirkung auf die Pfeiler bleibt immer dieselbe, wie sich leicht erweisen läfst. Es entsteht nämlich

vom Drucke D in B gegen die Vertikale durch E

ein Horizontaldruck

$$(7)\ h = D \cos \eta = D \sin \alpha = \frac{L \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{L}{cotg\, \beta + cotg\, \alpha} = c,$$

und ein Vertikaldruck

$$(8)\ l = D \sin \eta = D \cos \alpha,$$

ferner vom Drucke d in C gegen die Vertikale durch D

ein Horizontaldruck

$$(9)\ h_1 = d \cos \mu = D \sin \alpha = \frac{L}{cotg\, \beta + cotg\, \alpha} = c$$

und ein Vertikaldruck

$$(10)\ l_1 = d \sin \mu = \frac{D \cos \eta \sin \mu}{\cos \mu} = D \sin \alpha \cos \beta.$$

Es wird aber auch

$$(11)\quad l + l_1 = D \cos\alpha + \frac{D \sin\alpha \cos\beta}{\sin\beta} = \frac{D \sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = L,$$

was nothwendig so bestehen mufs, sowie

$$(12)\quad h = h_1 = c,$$

wie es gleichfalls nicht anders sein kann.

Die Drücke D und d, welche von der Last L für die Endpuncte des sie stützenden Bogens BC Fig 44 entstehen, sind die aus L entspringenden Seitendrücke nach den Richtungen AB und AC; denn construirt man ein Parallelogramm MO, von welchem die Seite AO auf AC, die Seite AM auf AB liegt, welchem ferner die Vertikale $AK = L$ als Diagonale zugehört, und berechnet nun die Seitendrücke AO und AM, so wird

$$AO = d \text{ und } AM = D.$$

Diese Beziehung mufs nach den Grundlehren der Statik nothwendig bestehen, wenn die Stützung der Last in den Bogenpuncten B und C nach der Richtung der Stützlinie daselbst bewirkt werden soll; denn die Mitwirkung des zwischen diesen Puncten liegenden Bogens BC hat auf die Stützung in den genannten Puncten gar keinen Einflufs.

Unsere bisherigen Erörterungen über die Fähigkeit eines linearen Bogens Lasten zu stützen beziehen sich auf den Fall, dafs der Umfang des die Last zunächst tragenden Bogens durch Tangenten vom Puncte der Last aus begrenzt wird. Es ist aber auch eine lineare Stützlinie EBC Fig. 46 und ein Punct A über derselben, in welchem sich die Last L befindet, denkbar, von welchem aus die Linie AC einen Winkel ACG mit der Tangente CG dieses Punctes einschliefst. Behalten wir unsere Voraussetzungen, der lineare Bogen könne innerhalb seiner Endpuncte nur nach seiner Richtung hin stützen, und es befinde sich über ihm bis zur Linie NN eine völlig unverschiebbare dichte Masse, unverändert bei, dann wird die Stützung der in A befindlichen Last ebenfalls durch den Bogen, aber sie wird auch noch durch den einen Endpunct C mit erfolgen. In B stützt der Bogen nur einen Druck D nach seiner Richtung hin, also in der Richtung AB, im Endpuncte C dagegen, weil sich dieser gegen einen linearen Pfeiler lehnt, der Vertikaldruck aufzunehmen fähig sein mufs, ist ein Druck T in der Richtung AC zu stützen. Nun sind B und C

die Endpuncte des Bogenstückes, welches die Last L allein stützt. Die Richtung der Stützung in B kann keine andere, als die Tangente BA, und in C keine andere als die Richtung CA sein. Beschreiben wir nach den Richtungen AB und AC ein Parallelogramm, dessen vertikale Diagonale gleich der Last L ist, dann ergiebt sich

$$\text{VIII.}\quad D = \frac{L \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)};\quad T = \frac{L \sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Der Bogen BC kann bei C nur nach der Richtung GCF seiner Tangente stützen. Aus dem Drucke

$$T = CM$$

entspringt nach dieser Richtung hin ein Druck

$$CF = d$$

und gleichzeitig ein Vertikaldruck CJ. Die Gröfse dieser Seitendrücke erhält man durch das Parallelogramm JF. Die Rechnung giebt für die aus T folgenden Seitendrücke, wenn die Richtung der Tangente GCF des Punctes C mit einer Horizontale den Winkel ε, also mit der Vertikale durch C den Winkel $90-\varepsilon$ einschliefst, wodurch im Parallelogramm FJ

$$\angle JCM = \gamma;\quad \angle FCJ = 90-\varepsilon;\quad \angle FCM = 90-(\varepsilon+\gamma)$$

wird,

Vertikaldruck

$$CJ = \frac{T \sin(90-[\varepsilon+\gamma])}{\sin(90+\varepsilon)} = \frac{L \sin\alpha \cos(\varepsilon+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\varepsilon},$$

Tangentialdruck CF

$$\text{IX.}\quad d = \frac{T \sin\gamma}{\sin(90+\varepsilon)} = \frac{L \sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)\cos\varepsilon}.$$

Aus d entspringt, mit Hinsicht auf I., ein Horizontaldruck im Scheitel von

$$c_1 = d \cos\varepsilon = \frac{L \sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{L}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\gamma}.$$

Der aus D für den Scheitel sich ergebende Horizontaldruck ist nach VIII.

$$c = D\cos\eta = \frac{L \sin\gamma \cos\eta}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{L \sin\gamma \sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{L}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\gamma}.$$

Es ist

$$c = c_1,$$

wie es nicht anders sein kann.

Der in C nach der Richtung der Tangente für die Stützung der Last anzulegende Druck giebt bis zum Scheitel des Stützbogens, gemäfs (3), den Vertikaldruck

$$v = d \sin \varepsilon = \frac{L \sin \alpha \sin \gamma \sin \varepsilon}{\sin(\alpha + \gamma) \cos \varepsilon}.$$

Ebenfalls bis zum Scheitel des Bogens entspringt aus dem in B nach der Richtung der Tangente, behufs der Stützung der Last, anzulegenden Druck D ein Vertikaldruck

$$V = D \sin \eta = \frac{L \sin \gamma \cos \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}.$$

Der vom Bogen gestützte Vertikaldruck ist

$$v + V.$$

Der Endpunct C stützt aber noch den Vertikaldruck CJ. Somit ist der gesammte Vertikaldruck, der Stützung empfängt,

$$v + V + CJ = \frac{L \sin \alpha \sin \gamma \sin \varepsilon}{\sin(\alpha + \gamma) \cos \varepsilon} + \frac{L \sin \gamma \cos \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} + \frac{L \sin \alpha \cos(\varepsilon + \gamma)}{\sin(\alpha + \gamma) \cos \varepsilon}$$

$$= \frac{L}{\cos \varepsilon \sin(\alpha + \gamma)} \left\{ \sin \alpha \sin \gamma \sin \varepsilon + \sin \gamma \cos \alpha \cos \varepsilon + \sin \alpha \cos(\varepsilon + \gamma) \right\} = L,$$

wie es sein mufs.

Auch im soeben betrachteten Falle erleidet jeder der linearen Pfeiler gegen die Vertikale durch die Endpuncte C und E des Bogens einen Horizontaldruck durch die Last, welcher jenem gleich ist, der aus eben dieser als Horizontalschub für den Scheitel hervorgeht; denn es ist

der Horizontalschub, der aus $CM = T$ hervorgeht,

$$h_1 = T \cos \gamma = \frac{L \sin \alpha \cos \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{L}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \gamma}$$

und jener, der aus dem Drucke D folgt,

$$h = D \cos \eta = D \sin \alpha = \frac{L \sin \gamma \sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{L}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \gamma}.$$

Aus den Formeln VI. und VII. erhält man, in Beziehung auf die Figur 44, durch Reduction:

$$\text{X.}\quad d = \frac{c}{\sin\beta};\ D = \frac{c}{\sin\alpha}$$

und in gleicher Weise für den durch die Fig. 46 dargestellten Fall der Stützung der Last durch den Bogen

$$\text{XI.}\quad T = \frac{c}{\sin\gamma};\ D = \frac{c}{\sin\alpha}.$$

Die Formel VII. lehrt uns für die Stützungsform in Fig. 44, dafs der aus der Last entstehende Horizontaldruck für den Scheitel des Bogens um so kleiner ist, je kleiner die Winkel α und β sind. Das nämliche gilt für die Drücke D und d. Es stellen sich aber auch dieselben Beziehungen noch bei der in Fig. 46 angegebenen Stützung der Last heraus, d. h. auch hier wächst der Horizontaldruck im Scheitel und wachsen die Drücke D und T mit den Winkeln α und γ.

Für die durch die Figur 44 dargestellte Stützungsform einer Last L durch einen Bogen $EBCD$ ist der vom Drucke D in der Richtung AB gestützte Vertikaldruck zu

$$V = L\,.\,\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha},$$

und der vom Drucke d gestützte Vertikaldruck zu

$$v = L\,.\,\frac{\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha}$$

bereits gefunden worden. Aus beiden Formeln wird durch Reduction

$$V = \frac{L}{1 + \frac{\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha}} = \frac{L}{1 + \frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}} = L\,.\,\frac{tg\,\beta}{tg\,\beta + tg\,\alpha}$$

$$v = L\,.\,\frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta + tg\,\alpha}.$$

Die so eben für V und v gefundenen Werthe lassen sich auch so anschreiben:

$$V = L\,.\,\frac{AP\,.\,tg\,\beta}{AP\,.\,tg\,\beta + AP\,.\,tg\,\alpha};\ v = L\,.\,\frac{PA\,.\,tg\,\alpha}{AP\,.\,tg\,\beta + AP\,.\,tg\,\alpha},$$

und geben nun in Beziehung auf die Figur 44

$$\text{XII.}\quad V = L\,.\,\frac{PG}{BG};\ v = L\,.\,\frac{BP}{BG}.$$

Das Gesetz der Vertheilung der Last L, das die eben gefundenen Formeln darstellen, ist dasselbe, das für die Belastung der Stützpuncte eines Traghebels besteht. Bei der in Fig. 44 angedeuteten Bogenstützung stellt eine zwischen die Tangenten AB und AG gezogene Horizontale BG den Traghebel und der vertikal unter dem Lastpuncte A liegende Punkt P derselben dessen Lastpunct dar. Für die von der Figur 46 dargestellte Bogenstützung gilt ebenfalls das Gesetz der Vertheilung des Vertikaldruckes, das die Formel XII. ausspricht.

Die Leichtigkeit der Bestimmung der Vertikaldrücke, die von der Belastung des Stützbogens Fig. 44 auf die Stützpfeiler des letztern übergeht, läfst es bequem erscheinen, hiervon den Scheiteldruck c des Bogens und die Drücke D und d abhängig zu machen. In VII. und in Beziehung auf Fig. 44 fanden wir

$$c = \frac{L}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta} \text{ d. g.}$$

$$c = \frac{L}{\frac{1}{tg\,\alpha} + \frac{1}{tg\,\beta}} = \frac{L\,tg\,\alpha\,tg\,\beta}{tg\,\alpha + tg\,\beta}, \text{ also}$$

$$\frac{c}{tg\,\alpha} = \frac{L\,tg\,\beta}{tg\,\alpha + tg\,\beta} = V$$

$$\frac{c}{tg\,\beta} = \frac{L\,tg\,\alpha}{tg\,\alpha + tg\,\beta} = v, \text{ somit}$$

$$\text{XIII. } c = V\,tg\,\alpha = \frac{L\,.\,PG\,.\,BP}{BG\,.\,AP}.$$

Hiernach ist der Horizontaldruck im Scheitel des Stützbogens, den die Last L hervorbringt, sehr bequem zu finden und es gilt dieselbe Bestimmungsweise, mit Rücksicht auf Seite 140, auch für eine Stützung der Last, welche die Figur 46 zeigt.

Nach VI. und VII. in Beziehung auf Fig. 44 ist ferner

$$D = \frac{L}{sin\,\alpha}\,.\,\frac{sin\,\alpha\,sin\,\beta}{sin(\alpha+\beta)} = \frac{L}{sin\,\alpha\,(cotg\,\alpha + cotg\,\beta)} = \frac{c}{sin\,\alpha} = c\,.\,\frac{AB}{PB}$$

$$= \frac{AB\,.\,PG}{BG\,.\,AP}\,.\,L;$$

$$d = \frac{L}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c}{\sin\beta} = \frac{AG \,.\, BP}{BG \,.\, AP} \,.\, L,$$

also für die Stützungsform Fig. 44

$$\text{XIV.} \begin{cases} D = \dfrac{AB \,.\, PG}{BG \,.\, AP} \,.\, L \\ d = \dfrac{AG \,.\, BP}{BG \,.\, AP} \,.\, L \end{cases}$$

Eben diese Gesetze gelten für die Stützungsform Fig. 46, nur geht für diese das *d* in *T* über.

Kommt bei der Stützungsform Fig. 44 die Last über den Scheitel zu stehen, dann wird $\alpha = \beta$ und defshalb

nach VI.

$$\text{XV.} \quad D = d = \frac{L \sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{L}{\cos\alpha} = \frac{L}{2} \,.\, \frac{AB}{AP},$$

nach VII.

$$\text{XVI.} \quad c = \frac{L}{2\,tg\,\alpha} = \frac{L}{2} \,.\, \frac{AP}{BP}$$

und ferner

$$\text{XVII.} \quad V = v = \frac{L}{2}.$$

Zwischen dem linearen Stützbogen *EBCD* Fig. 44 und der Abgleichung *NN* dachten wir uns ein dichtes, innig zusammenhängendes Material, das durch die Belastung keine Verschiebung erleidet. Nur bei dem Vorhandensein eines Körpers von dieser Beschaffenheit oberhalb des Stützbogens ist eine Vertheilung der Last über eine Bogenstrecke desselben weg und überhaupt in der erörterten Weise möglich.

Kann ein linearer Bogen in der von uns in Betracht gezogenen Art eine Last stützen, d. h. ist das Deckmaterial über demselben ein zusammenhängender dichter Körper, dann wird durch eine beliebige Last *L* kein Bestreben zum theilweisen Aufsteigen des Bogens erzeugt werden. Dieses Bestreben kommt aber unfehlbar zu Stande, wenn sich die Last nur über eine Strecke des Stützbogens zu verbreiten vermag, die kleiner als jene ist, von welcher sich die Tangenten der Endpuncte im Belastungspuncte vereinigen. Die Wahr-

heit der gemachten Behauptung können wir einfach auf folgende Weise darthun:

In Fig. 47 möge eine in A befindliche Last, in Folge der Verbindung der Brückenbahn NN mit dem Stützbogen $BCDE$, nur auf die Bogenstrecke CD übergehen. Stützt der Bogen, wie wir voraussetzen müssen, nur nach seiner Richtung hin, dann entsteht gegen den Punct D des Bogenstückes DE ein tangential gerichteter Druck d und ebenso gegen den Punct C des Bogenstückes CB ein tangential gerichteter Druck D. Diese Drücke selbst ergeben sich zu

$$d = FK \text{ und } D = FJ,$$

wenn in der Richtung der Tangenten der Puncte D und C das Parallelogramm JK beschrieben wird, dem die Vertikale $FG = L$ als Diagonale zugehört. Die Rechnung giebt für diese Drücke, sobald der Richtungswinkel der Tangente des Punctes D mit ξ und der der Tangente des Punctes C mit η bezeichnet wird,

$$D = \frac{L \cos \xi}{\sin (\eta - \xi)}; \; d = \frac{L \cos \eta}{\sin (\eta - \xi)}.$$

Der Druck D geht entweder sofort in die hinter dem Bogen CB befindliche Masse über oder, er pflanzt sich, unter Abscheidung von Horizontaldruck, in der Richtung des Bogens CB fort. Der Druck d geht vom Puncte D aus in der Richtung des Bogens aufwärts. Bis zum Scheitel H hin übt der letztere, gemäfs II., den vertikal aufwärts gerichteten Druck

$$A = d \cos \xi \, tg \, \xi = d \sin \xi = \frac{L \cos \eta \sin \xi}{\sin (\eta - \xi)}$$

und bedingt im Scheitel den Horizontaldruck

$$c = d \cos \xi = \frac{L \cos \eta \cos \xi}{\sin (\eta - \xi)}.$$

Je kleiner das Bogenstück CD ist, um so geringer ist der Unterschied der Winkel ξ und η, um so kleiner wird der Sinus ihrer Differenz und folglich um so gröfser müssen

$$A \text{ und } c$$

werden. Nach den gemachten Bestimmungen entsteht, wenn die Last L nur auf einen Punct F des linearen Bogens übergeht, weil hierbei $\xi = \eta$ wird, bis zum Scheitel H hin ein unendlich grofser

vertikal aufwärts gerichteter Druck und im Scheitel ein gleichfalls unendlich grofser Horizontalschub.

Mit der Zunahme des Winkels ξ wird der aufwärts gerichtete Druck A immer gröfser, mit der Abnahme des Winkels ξ aber immer kleiner und endlich gleich 0, wenn die Verbreitung der Last bis zum Scheitel reicht oder, wenn die Last im Scheitel der Stützlinie selbst steht.

Der von D bis zum Scheitel H Fig. 47 aus der Last entstehende vertikal aufwärts gerichtete Druck A in Verbindung mit dem Horizontaldruck c ist es, der das sogenannte Steigen oder Aufsteigen eines Bogens bedingt. Hierauf bezüglich weisen die vorstehenden Erörterungen nach

a) dafs das Bestreben zum Steigen eines linearen Bogens durch die Beschaffenheit des Mittels zwischen dem linearen Stützbogen und der Abgleichung oder durch die Verbindung der Brückenbahn mit dem Stützbogen veranlafst wird,

b) dafs die Bogendrücke D, d und c um so gröfser werden, je kleiner der Bogen CD in Gradmafs ist, über den sich die Last L verbreitet,

c) dafs die Tendenz zum Steigen eines Bogens mit der Entfernung der Last vom Scheitel zunimmt, aber 0 wird, wenn die Last über dem Scheitel steht, und

d) dafs ein flacher Bogen ein geringeres Bestreben zum Aufsteigen hat, als ein mehr gekrümmter.

Bei gewölbten Bögen wird das Bestreben zum Aufsteigen nur selten, bei hölzernen und eisernen Curven-Brücken aber sehr wahrnehmbar, was seinen Grund ganz einfach darin hat, dafs bei gewölbten Bögen die Last immer auf eine gröfsere Bogenstrecke übergeht und diese selbst nur wenig elastisch sind, wogegen bei den üblichen Constructionen hölzerner und eiserner Curvenbrücken die Last auf nur kleine Bogenstrecken trifft und den Curven selbst die Fähigkeit zur Verbiegung in hohem Grade eigen ist. Um das Aufsteigen zu verhindern pflegt man steinerne, hölzerne und eiserne Bogenbrücken stark zu belasten oder hoch zu beschottern. Dass hierdurch das Aufsteigen beseitigt wird, ist Thatsache, aber auch, dass damit eine vermehrte in Anspruchnahme der Festigkeit der Stützlinie und folglich eine Vergrösserung des Horizontalschubs erfolgt, ohne

das Bestreben zum Steigen selbst erheblich zu mindern. Eine hohe Beschotterung verringert die Tendenz zum Steigen in etwas, sobald sie festgefahren ist, weil sie dazu beiträgt, die Last über eine grössere Bogenstrecke, als ohne sie geschehen würde, zu verbreiten. Ungleich mehr, ja bis zu jeder beliebigen Grenze hin, läfst sich jedoch das Bestreben zum Aufsteigen einer Bogenbrücke vermindern, ohne die Nachtheile zu veranlassen, welche die Beschotterung bietet, wenn man die Brückenbahn selbst möglichst steif macht und sie möglichst ohne Unterbrechung und unverschiebbar mit den Stützbögen verbindet.

Aus der Stützungsfähigkeit eines linearen Wölbbogens wollen wir nun die eines materiellen ableiten. Zu diesem Ende sei *NHN* Fig. 48 der gewölbte Bogen einer Brücke und *A* ein mit *L* belasteter Punct der Brückenbahn; ferner sei der zwischen der letztern und dem Bogen befindliche Raum, wie bei einem linearen Wölbbogen vorausgesetzt wurde, mit einem ganz dichten Materiale erfüllt. Die Stützung der Last durch den materiellen Bogen *NN* muss, in Folge der letzten Annahme, wie bei einem linearen vor sich gehen. Stützte nur die Aufsenfläche des Bogens *NN*, dann verbreitete sich die Last zunächst über den Bogen *DE*, und geschähe das nämliche nur von der innern Wölbfläche, dann vertheilte sich die Last *L* über den Bogen *FG*. Doch der gewölbte Bogen muss in seiner Totalität oder gleichmäfsig zwischen der innern und äufsern Wölbfläche stützen, woraus folgt, dass die mittlere Wölblinie des Bogens als jene angesehen werden kann, welche als linearer Stützbogen die Stelle des gewölbten Bogens vertritt, mithin die Last *L* zunächst auf den Bogen *BC* übergeht. Die Ergebnisse der oben angeführten Erörterungen für einen linearen Stützbogen gelten demnach auch für einen materiellen, wenn man die mittlere Wölblinie des letztern als linearen Stützbogen annimmt.

Was wir bisher betrachteten, das bezieht sich allein auf die Stützungsfähigkeit eines Bogens in Vertikalebenen, die den Stirnflächen parallel sind. Wenn auch die Last nur auf einem Puncte der Brückenbahn steht, so wird sie doch nicht blos in einer Vertikalebene, parallel der Stirnflähe des Bogens, durch diesen Punct auf den Bogen übergehen, sondern sie wird sich auch über eine gewisse Breite oder Tiefe des letztern verbreiten. Doch nach welchem

Gesetze geschieht dies? Eine bestimmte Antwort läfst sich auf diese Frage nicht geben, weil die desfallsigen Versuche, die wir anstellten, hierüber einen genügenden Aufschluss nicht gaben; indefs ist so viel gewifs, dafs eine Last L auf eine um so gröfsere Fläche nach der Breite oder Tiefe des Bogens sich vertheilt, je dichter und höher das zwischen der Brückenbahn und dem Bogen befindliche Material ist. Der ungünstigste Fall der Belastung eines Bogens tritt unfehlbar ein, wenn wir von der Verbreitung der Last nach der Tiefe eines jeden Bogens hin, nämlich vom belasteten Puncte aus, ganz absehen und die nächste Stützung nur in Vertikalebenen *BAC* Fig. 48 parallel den Stirnflächen voraussetzen. Diese Annahme wird zu einer Beanspruchung der Festigkeit eines Bogens durch eine Last führen, die für Brückenconstructionen Geltung hat, bei welchen die Puncte der Brückenbahn, auf welche die Last trifft, mittels schwacher Mauern parallel den Stirnflächen mit dem betreffenden Brückenbogen in Verbindung stehen.

Dafs die Vertheilung und Stützung eines Druckes immer der Richtung der geringsten Zusammendrückung oder Verkürzung des stützenden Körpers (Seite 79) folgen mufs, setzen wir als eine allgemein gültige Wahrheit voraus, so dafs auch ein Brückenbogen nach eben diesem Gesetze die Lasten nur stützen kann, die über ihn wegschreiten. Doch, woher rührt diese Zusammendrückung und nach welchen Richtungen hin hat sie statt? Eine augenfällige Zusammendrückung zeigen wohl hölzerne und eiserne Bogenbrücken, aber niemals gewölbte, wenn eine Last über solche geht. Indefs, auch gewölbte Brückenbögen sind elastisch, was sich aus der Beobachtung solcher zu Zeiten mit Zuverlässigkeit herausstellt, zu welchen Lasten darüber schreiten. Man fühlt nämlich, unter einem Brückenbogen stehend und verschiedene Stellen der Breite oder Tiefe in der Nähe des Scheitels der innern Wölbfläche gleichzeitig berührend, sehr auffällig die Vertikalschwingungen, die ein den Bogen überschreitender Wagen hervorbringt. An den Orten der innern Wölbfläche, über welchen die Räder des Wagens gehen, sind die Vertikalschwingungen am stärksten, ohne an andern Stellen der Tiefe unmerklich zu werden. Diese Thatsache ganz besonders, aber auch schon eine blofse Beziehung der Wahrnehmung an hölzernen und eisernen Bogenbrücken, nämlich die einer Senkung,

wenn Lasten darüber schreiten, läfst mit Zuverlässigkeit auf eine Zusammendrückung eines gewölbten Bogens durch Lasten schliefsen, die einen solchen passiren.

Ein gewölbter Bogen kann sein eignes Gewicht und darüber schreitende Lasten nur in Vertikalebenen parallel zu den Stirnflächen stützen. In der Richtung eben solcher Ebenen mufs eine Zusammendrückung des Wölbmaterials durch veränderliche Belastung in Folge der Elasticität des letztern, und zwar eine geringere, als nach jeder andern Richtung hin, eintreten. Erfolgt aber die geringste Verkürzung eines Wölbbogens in einer Vertikalebene parallel den Stirnflächen, also auch ein Setzen des hier befindlichen Bogenelementes, dann wird das dichte Material zwischen der belasteten Stelle der Brückenbahn und dem Bogen den Druck nicht mehr allein in einer Vertikalebene parallel den Stirnflächen auf den Wölbbogen, sondern auch auf angrenzende Vertikalschichten und zwar in um so gröfsern Breiten übertragen müssen, je dichter das Wölbmaterial über dem Wölbbogen ist. Doch nicht bei allen Brückenconstructionen befindet sich zwischen der Brückenbahn und dem Bogen eine über die ganze Brückenbreite durchaus zusammenhängende Masse, vielmehr werden bei vielen Eisenbahnbrücken nur einzelne schwache Mauern parallel den Stirnflächen auf die Bögen gesetzt, die man zur Herstellung der Brückenbahn entweder mit kleinen Bögen verbindet oder mit Steinen überdeckt. Bei dieser Bauform geht die Last L im Puncte A Fig. 48 zunächst auf den Bogen BC in einer Breite, gleich der auf dem Bogen stehenden Mauer über. Aber auch hier wird die Last L nicht allein von dem Wölbring, der die erwähnte Stützmauer übergreift, sondern von einer viel gröfsern Breite, ja von der des ganzen Bogens gestützt. Die eben gestellte Behauptung läfst sich so begründen:

Angenommen, die Fläche NN Fig. 49 sei der von oben gesehene Bogen Fig. 48 zwischen den unverschiebbaren Hindernissen W, W_1, und BAC die Vertikalebene parallel der Stirnfläche, innerhalb welcher die Last vom Bogen zunächst gestützt werde. Die Last L drückt, wie wir gesehen haben, den Bogen zwischen B und C dergestalt zusammen, dafs in C ein Druck d und in B ein Druck D zu Stande kommt. Der Druck d pflanzt sich nach W_1 und D nach W hin fort. Ist das Wölbmaterial zusammendrückbar, dann erfolgt eine Verkür-

zung des Bogens in der Vertikalebene *BAC*. Die einzelnen Steine eines Wölbbogens bilden durch den Wechsel der Stofsfugen ein Ganzes, so dafs kein Wölbring parallel den Stirnflächen eine Verkürzung oder Senkung annehmen kann, ohne sie auf die angrenzenden mit überzutragen; also: verkürzt sich der in der Vertikalebene *BAC* gelegene Wölbring, dann erfolgt auch eine Verkürzung der Wölbringe in allen angrenzenden Vertikalebenen *JJ*, *KK* bis zu den Stirnschichten hin. Die Differenzen der Verkürzungen der Wölbringe *BAC* und *JJ*, *BAC* und *KK* etc. werden um so gröfser, folglich auch die auf die Ringe *JJ* und *KK* kommenden Spannungen um so kleiner gegen die Spannung im Ringe *BAC* sein müssen, je gröfser der Grad der Zusammendrückbarkeit des Wölbmaterials ist. Das Material eines gewölbten Bogens kann aber nur sehr wenig zusammendrückbar sein, wefshalb denn auch die Verkürzungen in allen Vertikalebenen eines solchen parallel zu *BAC* nahe dieselbe, mithin auch die Belastung, die von *L* auf alle Ringe parallel den Stirnflächen geht, nahezu die nämliche sein mufs.

Den eben nachgewiesenen Uebertrag der Belastung einer Bogenstelle über dessen ganze Breite weg finden wir bei allen mehr oder weniger biegsamen Materialien in gleicher Weise wieder. Die Erfahrung lehrt uns, dafs es nicht nothwendig ist, einen an seinen Enden *B* und *C* aufliegenden Körper Fig. 50 genau in der Mitte seiner Breite NN_1 zu belasten; denn er trägt nahezu die nämliche Last, gleichviel, ob sie in der Mitte der Breite oder ob sie in einem Ende, z. B. in *N*, aufgelegt wird. Aus solchen Wahrnehmungen müssen wir folgern, und oben haben wir die wahrscheinlichen Gründe dafür angeführt, dafs ein sehr wenig biegsamer Körper *BC* die in dem einen Ende seiner Breite NN_1 aufgelegte Last mit allen seinen Vertikalebenen parallel zu *BC* von N_1 nach *N* hin nahezu gleichmäfsig stützt, selbst wenn jene in dem einen Endpuncte N_1 der Breite liegt. Auch die Erfahrungen, die Brückenbögen bieten, bestätigen unsern Nachweis über die Vertheilung der Last über einen Bogen weg. Es ist nämlich kein Fall bekannt, dafs bei einer Brücke mit Versetzung der Stofsfugen nur ein Wölbring durch überschreitende Lasten zerdrückt wurde, ja es liegt nicht einmal ein Beleg dafür vor, dafs Brückenbögen überhaupt durch die Einwirkung veränderlicher Lasten zermalmt worden sind, wenn man die aus dem Weichen der

Widerlager folgenden Niederbrüche ausscheidet, was nur bei Vertheilung der über einen Bogen geführten Last über dessen ganze Breite weg erklärlich wird, weil nur hierbei die Einheit der stützenden Bogenfläche eine verhältnifsmäfsig geringe Anspannung erfährt.

Fassen wir die betrachteten Stützungen nach der Tiefe eines gewölbten Bogens hin zusammen, die nämlich stattfinden, einmal, wenn die Brückenbahn nach ihrer Länge und Breite hin durch ein dichtes Material und ein zweites Mal, wenn die Brückenbahn nur nach der Länge hin durch einzelne dichte Stützmauern mit dem Wölbbogen in Verbindung steht, so verkennen wir, dafs bei beiden Verbindungsformen einer Brückenbahn mit dem zugehörenden stützenden Bogen die Verbreitung der Last über die Tiefe des letztern durchaus die nämliche bleiben wird, aber auch, dafs durch einzelne Stützmauern zwischen der Brückenbahn und dem Stützbogen die vom letztern durch die Stützmauern unmittelbar berührten Steine eine etwas gröfsere Belastung erfahren werden, als wenn über die ganze Bogentiefe ein dichtes Material verbreitet ist.

Die aufgestellten Gesetze der Vertheilung einer Last über einen gewölbten Bogen nach seiner Länge, parallel zu den Stirnflächen, und nach seiner Breite setzen einen Wölbbogen voraus, der nach seiner Richtung hin durchaus als vorgeschriebene Stützlinie für sein eignes Gewicht, für das der auf ihm liegenden Massen und für die überschreitenden Lasten wirkt. Bei Herstellung eines gewölbten Brückenbogens haben wir immer nur diese Bestimmung im Auge; wir müssen sie als die wahre oder stets zu erstrebende festhalten, wir müssen defshalb alle hierzu dienlichen Vorkehrungen bei Anfertigung eines solchen treffen und ihm auch die Dimensionen geben, die die bezeichnete Wirkungsweise erheischt. Ein gewölbter Brükkenbogen wird aber der erwähnten Bestimmung in der That genügen und auch überschreitende Lasten in der oben entwickelten Weise stützen, wenn er mehr gespannt ist, als das über ihm stehende Mauerwerk. Auf die Herstellung dieser Eigenschaft wirkt schon die übliche Bauführung, den Bogen mit den Stirnmauern oder mit der Hintermauerung gleichzeitig empor zu nehmen, in etwas, mehr aber das auf Seite 89 angeführte Verfahren ein.

Wenn auch ein gewölbter Bogen für sein eignes Gewicht und für das des überstehenden Mauerwerks als vorgeschriebene Stütz-

linie wirkt, so ist doch eine noch andere Stützung überschreitender Lasten, als wir bisher entwickelt haben, möglich, und die auch unter Umständen theilweise statt hat. Denken wir uns, um das letztere zu erläutern, einen gewölbten Bogen NBN_1 Fig. 51 mit einer Hintermauerung versehen, die innig mit dem Pfeiler zusammenhängt, gleichsam ein Ganzes mit ihm bildet, denken wir uns die Brückenbahn im Puncte *A* mit *L* belastet und ferner *AD* als ein durch *A* geführtes Perpendikel. So lange die Last über der Pfeilerquerschnittsfläche durch *N* steht, wird sie nur vom Pfeiler gestützt. Tritt sie über das Perpendikel durch *N* gegen den Scheitel *B* hin in den Punkt *A*, dann kann immer noch eine Stützung derselben durch den Pfeiler erfolgen, wenn das hinter dem Perpendikel durch *A* gegen *M* hin gelegene Mauerwerk als ein mit dem Pfeiler völlig zusammenhängender Körper auftritt und der Bogen selbst in der Nähe seines Scheitels eine geringe Senkung gestattet. Die gemachte Voraussetzung, die Hintermauerung des Bogens bilde mit dem Pfeiler ein Ganzes, widerstreitet der Wirklichkeit nicht, besonders bei Wölbbögen nicht, die eine dem Halbkreise ähnliche Form haben. Die Hintermauerung solcher oberhalb des Bogenanfanges *N* im Raume *M* bindet bei Verwendung von Cement bald nach deren Herstellung, bei Benutzung gewöhnlichen Mörtels aber mit der Zeit dergestalt, dafs in der That die Hintermauerung mit dem Pfeilerkörper ein Ganzes werden mufs, wie Ruinen zur Genüge darthun; denn bei solchen finden wir nicht selten nahe bis zum Scheitel *B* hin gehende Bogenstücke *NFE* freistehend, also nur vom zugehörenden Pfeiler *MO* gehalten. Wenn sich aber schon ein Bogen durch die Bindung des hinter ihm liegenden Mauerwerks nahe bis zum Scheitel hin frei tragen kann, so scheint er im geschlossenen Zustande, für welchen das Bogengewicht und das der Hintermauerung die Zusammenhangsfestigkeit der letztern gar nicht in Anspruch nimmt, um so befähigter, eine im Puncte *A* befindliche Last *L* durch eben diesen Zusammenhang mit dem Pfeiler mittels des letztern allein tragen zu können. Indefs, der Zusammenhang der Hintermauerung eines Bogens mit dem Pfeiler ist nicht bei allen Constructionen von Brückenbögen über die ganze Bogentiefe weg vorhanden; ferner, wo sich eine solche vermöge der Construction finden könnte, wird sie in der erforderlichen Gröfse wenigstens nicht bei Brückenbögen zu Stande

kommen, so dafs die alleinige Stützung einer Last L im Puncte A durch den angrenzenden Pfeiler MO mittels des Zusammenhanges des Hintermauerungsmateriales selbst bei rasch aufsteigenden z. E. halbkreisförmigen Wölbbögen nur bis zu einer sehr geringen Entfernung vom Perpendikel durch die bei N gelegene Pfeilerfläche hin stattfinden kann. (M. s. im Anhange die Versuchsresultate über das Tragen von Lasten durch gewölbte Bögen.) Die Möglichkeit der alleinigen Stützung einer im Puncte A Fig. 51 befindlichen Last L durch den angrenzenden Pfeiler MO ist, aufser von einem Zusammenhange der Hintermauerung des Bogens mit dem Pfeiler, noch von der Möglichkeit einer, wenn auch nur geringen, Senkung des Bogens im Scheitel B abhängig. Bei einem im Schlusse stehenden Bogen kann diese Senkung nur sehr gering sein und überhaupt nur bei einer eintretenden Bogenbelastung zu Stande kommen, so dafs die Last L im Puncte A niemals allein vom Pfeiler zu stützen sein dürfte. Wir entnehmen hieraus, dafs die Bogenstützung einer Last, welche die Fig. 48 darstellt, durch den innigsten Zusammenhang der Hintermauerung mit dem Pfeiler bei einem unter Spannung stehenden Bogen eine nur sehr geringe Aenderung erfahren kann.

Obschon die auf Seite 147 angeführte und durch die Figur 48 dargestellte Stützungsweise einer Last durch einen materiellen Bogen, besonders wenn sich die letztere in der Nähe eines der Pfeiler befindet, eine geringe Aenderung durch den Zusammenhang der belasteten Hintermauerung mit dem anliegenden Pfeiler, bei gewissen Bogenconstructionen, erfährt, so werden wir doch hiervon absehen, und die Bogenstützung, welche die Fig. 48 zeigt, für die Bestimmung der Stützungsverhältnisse beibehalten müssen, weil sie uns die stärkste Beanspruchung der Bogenspannung lehrt, die eintreten kann, weil sie bei flachen Bögen durchaus besteht und weil die gedachte Abänderung nur bei einer mangelhaften Bogenerbauung, also unter nicht regelrechten Umständen, für eine Lage der Last in der Nähe des Pfeilers von einiger Erheblichkeit werden kann.

Wir wollen jetzt die entstehende Spannung eines gewölbten Brückenbogens durch auf ihm stehende Lasten für einen besondern Fall näherungsweise ermitteln und an die Ergebnisse einige einschlagende Bemerkungen knüpfen. Der Bogen sei ein Kreisstichbogen

NAN_1 Fig. 52, sein innerer Radius messe $37\frac{1}{2}$ Elle, seine lichte Spannweite sei $NN_1 = 63$ Ellen, die durchgängige Bogenhöhe sei $AB_1 = 2$ Ellen, folglich der Radius der mittlern Wölblinie $38\frac{1}{2}$ Elle, und ferner liege die horizontale Brückenbahn im Scheitel um $BC = 1$ Elle über der äufsern Wölbfläche des Bogens. Die Tragfähigkeit der Eisenbahnbrücken wird verhältnifsmäfsig in höherem Grade, als die der Landstrafsenbrücken beansprucht. Bei Eisenbahnbrücken kommt ferner die gröfste Belastung auf die kürzeste Länge, wenn zwei Locomotiven an ihren Kopf- oder Schornsteinseiten gekuppelt sind und die Tender hinter sich haben. Für den Bogen Fig. 52 wollen wir diese Belastungsform wählen, das Gewicht jeder Locomotive zu 426 Ctnr., das jedes Tenders zu 210 Ctnr. und den Stand der beiden Locomotiven vom Scheitel C in gleichen Entfernungen nehmen. Es seien J, H, G und J_1, H_1, G_1 die Räder der zwei Tender, ferner F, E, D und F_1, E_1, D_1 die Räder der zwei Locomotiven, die auf einem Schienenstrange stehen. Die Abstände dieser Räder sind

$CD = CD_1$	$= 3$	Ellen	16	Zoll,
$ED = E_1D_1$	$= 3$	„	—	„
$EF = E_1F_1$	$= 2$	„	20	„
$FG = F_1G_1$	$= 5$	„	6	„
$HG = H_1G_1$	$= 2$	„	$4\frac{1}{2}$	„
$HJ = H_1J_1$	$= 2$	„	$4\frac{1}{2}$	„

Das Gewicht jedes Locomotivs möge auf seine sechs Räder und ebenso das jedes Tenders auf seine sechs Räder gleichmäfsig vertheilt sein, so dafs jedes Locomotivrad 71 Ctnr. und jedes Tenderrad 35 Ctnr. stütze. Ziehen wir an die mittlere Wölblinie des Bogens von den belasteten Puncten J, H, G, F, E, D aus Tangenten und ferner noch Perpendikel durch die belasteten Puncte, so erhalten wir, in Beziehung auf die Figur 44,

für den Lastpunct J den Winkel $iJN = \alpha$ und Winkel $iJo = \beta$,
„ „ „ H „ „ $hHN = \alpha_1$ „ „ $hHo = \beta_1$ etc.

Durch Messung ergiebt sich für die sechs Puncte J, H, G, F, E, D Fig. 52.

$$\alpha = 34^0\,18'; \quad \beta = 84^0\,15'; \quad 180 - (\alpha + \beta) = 61^0\,27';$$
$$\alpha_1 = 39^0\,30'; \quad \beta_1 = 83^0\,34'; \quad 180 - (\alpha_1 + \beta_1) = 56^0\,56';$$
$$\alpha_2 = 44^0\,16'; \quad \beta_2 = 82^0\,31'; \quad 180 - (\alpha_2 + \beta_2) = 53^0\,13';$$

$\alpha_3 = 55^0\,40'$; $\beta_3 = 81^0\,36'$; $180 - (\alpha_3+\beta_3) = 42^0\,44'$;
$\alpha_4 = 62^0\,36'$; $\beta_4 = 81^0\;\;1'$; $180 - (\alpha_4+\beta_4) = 36^0\,23'$;
$\alpha_5 = 67^0\,10'$; $\beta_5 = 80^0\,54'$; $180 - (\alpha_5+\beta_5) = 31^0\,56'$.

In Beziehung auf die Figur 44 ist nach *VII.* Seite 138 der aus der Belastung L des Punctes A entspringende horizontale Druck im Scheitel H

$$c = \frac{L}{cotg\ \alpha + cotg\ \beta.}$$

Diese Formel auf die belasteten Puncte J, H, G, F, E, D Fig. 52 bezogen, giebt

den Scheiteldruck von J zu $c = \dfrac{35}{1{,}5666} = 22{,}34$ Ctnr.

" " " H " $c_1 = \dfrac{35}{1{,}3258} = 26{,}40$ "

" " " G " $c_2 = \dfrac{35}{1{,}1573} = 30{,}24$ "

" " " F " $c_3 = \dfrac{71}{0{,}8307} = 85{,}47$ "

" " " E " $c_4 = \dfrac{71}{0{,}6764} = 104{,}97$ "

" " " D " $c_5 = \dfrac{71}{0{,}5812} = 122{,}16$ "

391,58 Ctnr.

Die belasteten Puncte D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, J_1 müssen den nämlichen horizontalen Scheiteldruck geben, als die Puncte D, E, F, G, H, J, so daſs der aus der Last eines Schienenstranges entspringende Horizontaldruck ist

$$2 \times 391{,}58 \text{ Ctnr.} = 783{,}16 \text{ Ctnr.}$$

Der zweite Schienenstrang ist eben so, wie der erste, belastet, folglich entsteht aus der angenommenen Belastung eines Gleises ein horizontaler Scheiteldruck gegen den Bogen von

$$783{,}16 \times 2 = 1566{,}32 \text{ Ctnr.}$$

Es erleidet vom Bogen BC Fig. 48, über welchen sich die im Puncte A befindliche Last zunächst verbreitet, der Endpunct B ei-

nen Druck D, der Endpunct C einen Druck d, und es ist nach *VI.* Seite 138

$$D = \frac{L \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{L \sin \beta}{\sin(180-(\alpha+\beta))}; \quad d = \frac{L \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{L \sin \alpha}{\sin(180-(\alpha+\beta))}.$$

Hiernach erhält man auf einanderfolgend für die belasteten Puncte J, H, G, E, D Fig. 52

$D = 39{,}645$ Ctnr.; $d = 22{,}453$ Ctnr.;
$D_1 = 41{,}501$ „ $d_1 = 26{,}565$ „
$D_2 = 43{,}329$ „ $d_2 = 30{,}503$ „
$D_3 = 103{,}510$ „ $d_3 = 86{,}400$ „
$D_4 = 118{,}220$ „ $d_4 = 106{,}270$ „
$D_5 = 132{,}550$ „ $d_5 = 123{,}710$ „

Die Drücke d, d_1, d_2 finden sämmtlich in der Nähe des Punctes o statt, die Drücke D, D_1, D_2 aber innerhalb des Bogens Nq. Der auf den Bogen qN z.E. fallende Druck D_5 kann durch den Bogen bis zu N, unter Abscheidung von Horizontaldruck, fortgehen. Dort angelangt, ist er sicher kleiner, als in q; denn setzen wir den aus D_5 in q für N sich herausstellenden Druck gleich U, und bezeichnen ferner den Richtungswinkel der Tangente des Punctes q mit η_5, den Richtungswinkel der Tangente von N aber mit η, so ist

$$U = \frac{D_5 \sin \eta_5}{\sin \eta}$$

oder weil $\eta_5 = 90^0 - \alpha_5$ und $\eta = 90^0 - \alpha$ ist,

$$U = \frac{D_5 \cos \alpha_5}{\cos \alpha}.$$

Hierein die oben bestimmten Zahlenwerthe gesetzt, entwickelt

$$U = 62{,}264 \text{ Ctnr.}$$

Die Richtigkeit des für U angegebenen allgemeinen Ausdruckes wird durch die Bemerkung nachgewiesen sein, daſs der von q aus in der Richtung des Bogens fortgehende Druck D_5 bis zu N hin nur Horizontaldruck absetzen, sich folglich D_5 in einen Seitendruck U nach der Richtung der Tangente des Punctes N und in einen Horizontaldruck zerlegen soll.

Der Zahlenwerth, der sich für U ergeben hat, ist in der That kleiner als D_5, was wir oben behaupteten. Hieraus ziehen wir den Schluſs, daſs der gesammte, auf N übergehende Druck beträcht-

lich kleiner als die Summe der Drücke D, D_1, D_2 sein mufs, sowie dafs es einen Punct zwischen q und N geben kann, der nahe mit der Summe der eben angeführten Drücke belastet wird.

Die belasteten Puncte D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, J_1 müssen, gemäfs der gemachten Annahme, dieselben Drücke auf den Bogen NN_1 übertragen, als J, H, G, F, E, D, nur mit dem Unterschiede, dafs letztere die Bogenhälfte BN stärker als BN_1 spannen, während diefs von den erstern gerade entgegengesetzt geschieht. Jetzt entsteht die Frage: Welcher Punct der Bogenhälfte BN und ebenso, welcher der Bogenhälfte BN_1 erleidet durch die gewählte Belastung die stärkste Spannung oder den gröfsten Druck? Für den vorliegenden Fall läfst sich die gestellte Frage leicht beantworten. Jede Bogenhälfte mufs von dem einen belasteten Schienenstrang die halbe Belastung desselben tragen, weil sie vom Scheitel aus gleichmäfsig vertheilt ist, also das halbe Gewicht eines Locomotivs und eines Tenders oder überhaupt 318 Ctnr.

Alle die Drücke, welche tangential auf die Bogenhälfte BN_1 übergehen, können durch einen tangential zum Puncte t angelegten Gegendruck T gestützt werden. Aus T ergiebt sich ein Horizontaldruck

$$T \cos \psi$$

und ein Vertikaldruck

$$T \sin \psi,$$

wenn ψ den Richtungswinkel der Tangente des Punctes t bezeichnet. Nothwendig mufs

$$T \sin \psi$$

der Summe aller Vertikaldrücke, welche der Bogen BN_1 stützt, also

$$T \sin \psi = 318 \text{ Ctnr.}$$

und ferner

$$T \cos \psi$$

der Summe aller Horizontaldrücke gleich sein, die aus der Belastung entspringen, d. g.

$$T \cos \psi = 783{,}16 \text{ Ctnr.}$$

Aus den gefundenen Gleichungen folgt

$$tg\, \psi = \frac{318}{783{,}16}; \quad \psi = 22^0\, 6' \text{ und}$$

$$T = \frac{783,16}{\cos \psi} = 845,26 \text{ Ctnr.}$$

Durch den Winkel ψ ist der Punct t des mittlern Bogendruckes und durch T dieser Druck selbst gegeben, welcher von der Belastung eines Schienenstranges herrührt. Weil die mittlere Wölblinie des Bogens Fig. 52 ein Kreisbogen ist, so bezeichnet auch ψ den Abstand des Punctes t vom Scheitel B in Gradmafs. Der von der angenommenen Belastung eines Gleises entstehende mittlere Bogendruck ist nun

$$845,26 \times 2 = 1690,52 \text{ Ctnr.}$$

Eisenbahnbrücken haben gewöhnlich die für zwei Bahngleise erforderliche Breite, welche wir, um den ungünstigsten Fall hinsichtlich der Beanspruchung der Bogenfestigkeit zu erhalten, nur zu 12 Ellen annehmen wollen. Sobald eine Brücke zwei Gleise hat, kann auch die gewählte Belastung gleichzeitig doppelt eintreten oder die Brücke kann gleichzeitig 4 Locomotiven und 4 Tender in der Nähe ihres Scheitels zu tragen haben. Hierfür und nach dem obenstehenden ist

der gesammte Horizontaldruck im Scheitel

$$1566,32 \times 2 = 3132,64 \text{ Ctnr.}$$

und der gröfste Bogendruck, der in einem Abstande von $22^0 6'$ vom Scheitel auf jede Bogenhälfte kommt,

$$1690,52 \times 2 = 3381,04 \text{ Ctnr.}$$

Bei einer Verbreitung der Last über den Bogen weg, wie wir sie eben entwickelt haben, kommt, mit Zugrundelegung der Mafse für den Bogen Fig. 52, wie sie auf Seite 154 angeführt sind, auf 1 Quadratzoll Querschnittsfläche des Bogens im Scheitel ein Druck von

$$\frac{3132,64 \times 110}{12 \times 2 \times 24^2} = 24,9 \text{ Pfunden}$$

und auf 1 Quadratzoll der am stärksten belasteten Stelle in jeder Bogenhälfte ein Druck von

$$\frac{3381,04 \times 110}{12 \times 2 \times 24^2} = 26,9 \text{ Pfunden.}$$

Die Belastung sowohl, als auch die Bogendimensionen, die wir bei den vorstehenden Rechnungen zum Grunde legten, gehören zu den ungünstigsten, die in der Wirklichkeit vorkommen, und doch

folgt daraus, wie wir soeben fanden, eine nur geringe Beanspruchung der Bogenfestigkeit. Wie klein die letzte im Vergleich zu der des Wölbmaterials ist, ergiebt sich schon näherungsweise aus dem Umstande, dafs ein Ziegelsteinprisma von mittlerer Güte und 1 Quadratzoll Querschnittsfläche unter der Last von 1250 Pfd. zermalmt wird. Die Bogenbelastung, die wir wählten, nimmt also nahe $\frac{1}{100}$ dieser Festigkeit, wenn der Bogen aus Ziegelsteinen ist, und einen noch ungleich kleinern Theil in Anspruch, wenn ein noch härteres Material, als Ziegelsteine, zur Bogenherstellung verwendet worden sind.

Das Eigengewicht eines Bogens wirkt viel nachtheiliger auf die Festigkeit des Wölbmaterials ein, als die Belastung, die wir wählten, was die nachfolgenden Ermittelungen zeigen. Bei den angenommenen Dimensionen des Bogens Fig. 52 und wenn wir das Gewicht von 1 Kubikelle des Bogenmaterials zu 666 Pfd. annehmen, ist nach Seite 51 der Horizontaldruck gegen die Scheitelfuge AB

$$C = 38\tfrac{1}{2} \times 3 \times 666 \times 12 = 923076 \text{ Pfunde d. g.}$$

für einen Quadratzoll der Bogenfläche im Scheitel einen Druck von

$$\frac{923076}{12 \times 2 \times 24^2} = 66{,}77 \text{ Pfunden.}$$

Der Punct t der mittlern Wölblinie, der durch die Belastung des Bogens am stärksten gedrückt wird und der vom Scheitel um $22^0 6' = \psi$ absteht, erleidet auch durch das Gewicht W des Wölbmaterials vom Scheitel bis zu diesem Puncte hin einen Druck D_n nach der Richtung der Tangente, gemäfs II. Seite 40, von

$$D_n = \frac{W}{\sin \psi},$$

wenn die mittlere Wölblinie des gewölbten Bogens als eine vorgeschriebene Stützlinie mit nur horizontaler Hinterstützung genommen wird. Mit Hinsicht auf die Figur 52 ist, wenn man Winkel $uxw = \mu$ setzt, den das Perpendikel durch t an der innern Wölblinie bestimmt,

$$yt = wu = 38{,}5 \sin \psi = 37{,}5 \sin \mu \text{ oder}$$

$$\sin \mu = \frac{38{,}5}{37{,}5} \sin \psi; \quad \mu = 22^0 43';$$

$uw = yt = 38\frac{1}{2} \sin\psi = 14{,}48$ Ellen und

$wx = 37\frac{1}{2} \cos\mu = 34{,}59$ Ellen.

Das Gewicht W der zwischen den Perpendikeln durch B und t liegenden Wölbmasse ist

$$W = 666 \times 12 \{ wu \times Cw - Auw \} \text{ oder}$$

$$W = 666 \times 12 \{ 14{,}48(37{,}5 + 3 - 34{,}59) - (sect\, Aux - \triangle wux) \}$$

$$= 666 \times 12 \{ 85{,}57 - 270{,}58 + 250{,}52 \} = 523550 \text{ Pfund.}$$

Der aus dem Gewichte W für die Querschnittsfläche des Wölbbogens bei t entstehende Druck ist

$$D_n = \frac{523550}{\sin\psi} = 1391600 \text{ Pfd.}$$

und der auf 1 Quadratzoll der Querschnittsfläche des Wölbbogens bei t kommende Druck

$$\frac{1391600}{12 \times 2 \times 24^2} = 100{,}66 \text{ Pfd.}$$

Das Gewicht der Masse des Wölbbogens giebt einen Scheiteldruck von

66,77 Pfd. auf 1 Quadratzoll der Bogenquerschnittsfläche,

die gewählte Belastung aber einen Scheiteldruck von

24,9 Pfd. auf 1 Quadratzoll der Bogenquerschnittsfläche.

Das Bogengewicht drückt ferner in einem Abstande von $22^0 6'$ vom Scheitel 1 Quadratzoll der Bogenquerschnittsfläche mit

100,66 Pfd.,

die gewählte Belastung 1 Quadratzoll der Bogenquerschnittsfläche an eben dieser Stelle mit

26,9 Pfd.

Diese Zusammenstellung der Ergebnisse vorstehender Erörterungen rechtfertigt unsere oben aufgestellte Behauptung wenigstens für den gewählten Bogen Fig. 52 bei der angenommenen Belastung, nämlich die: das Eigengewicht eines Brückenbogens belaste den gewölbten Bogen desselben vom Scheitel nach seinen Anfängen hin mehr, als die wahrscheinlich gröfste Belastung. Ob ein ähnliches Verhältnifs auch bei weniger weit gespannten Bögen statt hat, bleibt noch darzuthun. Zu diesem Ende wollen wir für den halbkreisförmigen Brückenbogen Fig. 53 ähnliche Erörterungen anstellen, als wir sie für Fig. 52 geführt haben. Für Fig. 53 sei der Radius der innern

Wölbfläche des Bogens 6 Ellen, die durchgängig gleiche Bogenhöhe ¾ Ellen und der Abstand AB der horizontalen Brückenbahn vom Scheitel der innern Wölbfläche 1¾ Ellen. Bei den eben festgestellten Dimensionen des Brückenbogens Fig. 53 hat, bei einem Gleise, nur ein Locomotiv auf demselben Platz. Die auf einem Schienenstrange stehenden Räder eines solchen mögen A, B, C sein und das Mittelrad B über dem Scheitel des Bogens stehen. Von diesen Puncten Tangenten an die mittlere Wölblinie gezogen und die entstehenden Winkel α, β, α_1, β_1 gemessen, giebt näherungsweise

$$\alpha = 33^0\ 8'; \ \beta = 71^0 20';$$
$$\alpha_1 = 55^0 46'; \ \beta_1 = 55^0 46';$$
$$\alpha_2 = 70^0 44'; \ \beta_2 = 30^0 24'.$$

Aus diesen Winkeln und wenn, wie bereits oben angenommen wurde, das Gewicht des Locomotivs auf seine sechs Räder gleich vertheilt ist, jedes Rad also 71 Ctnr. stützt, ergiebt sich nach VII. Seite 138 der Horizontaldruck für den Scheitel

$$\text{vom Puncte } A \text{ zu } c = \frac{71}{cotg\ \alpha + cotg\ \beta} = 37{,}97 \text{ Ctnr.}$$
$$\text{,, ,, } B \text{ ,, } c_1 = \frac{71}{cotg\ \alpha_1 + cotg\ \beta_1} = 52{,}17 \text{ ,,}$$
$$\text{,, ,, } C \text{ ,, } c_2 = \frac{71}{cotg\ \alpha_2 + cotg\ \beta_2} = 34{,}56 \text{ ,,}$$

und von der ganzen Belastung zu 124,7 Ctnr.

Der Bogen ab, über welchen sich die Last des Punctes A vertheilt, empfängt nach VI. Seite 138 im Puncte a einen Druck von

$$D = \frac{L \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{71 \sin 71^0 20'}{\sin 75^0 31'} = 69{,}46 \text{ Ctnr.}$$

Ein diesem Drucke gleicher Gegendruck, tangential zum Puncte a gedacht, stützt von hier aus bis zum Scheitel hin, mit Hinsicht auf II. Seite 136, die Last

$$(s.\ V) = D \sin \eta = 69{,}46 \sin (qo - \alpha) = 58{,}17 \text{ Ctnr.}$$

und eben so viel von der in A befindlichen Last mufs der Bogen qD tragen; folglich kommen von der Last in A auf den Bogen Db

$$71 - 58{,}17 = 12{,}83 \text{ Ctnr.}$$

Von der Last über dem Bogenscheitel in *B* trägt jede Bogenhälfte die Hälfte oder 35,5 Ctnr.

Die vom Bogen *cd* gestützte Last des Punctes *C* übt gegen *c* den Druck

$$d = \frac{71 \sin \alpha_2}{\sin (\alpha_2 + \beta_2)}.$$

Ein diesem Drucke gleicher Gegendruck, tangential zu *c* angelegt gedacht, stützt bis zum Scheitel *D* hin den Vertikaldruck

$$(s.\ v) = d \sin (90 - \beta_2) = \frac{71 \sin \alpha_2 \cos \beta_2}{\sin (\alpha_2 + \beta_2)} = 58{,}92 \text{ Ctnr.}$$

und diefs mufs wieder der Theil von der Last in *C* sein, welche auf den Bogen *cD* übergeht, so dafs von der Last in *C* auf Bogen *dD* nur 71 — 58,92 = 12,08 Ctnr. kommen.

Von den Lasten in den Puncten *A*, *B*, *C* werden getragen

von der Bogenhälfte *FD*	58,17 Ctnr.
	35,50 „
	12,08 „
	105,75 Ctnr.
und von der Bogenhälfte *HD*	12,83 Ctnr.
	35,50 „
	58,92 „
	107,25 Ctnr.

In einem Puncte *t* ist ein Druck *T* unter dem Richtungswinkel ψ anzulegen, welcher die auf den Bogen *DF* kommende Last stützt und den von der Belastung herrührenden Horizontaldruck von

124,7 Ctnr.

im Scheitel hervorbringt. Mit Beziehung auf I. und II. Seite 136 ist

$$124{,}7 = T \cos \psi,$$

$$105{,}75 = T \sin \psi \text{ d. g.}$$

$$tg\, \psi = \frac{105{,}75}{124{,}7}\,; \quad \psi = 40^0\, 18' \text{ und}$$

$$T = \frac{105{,}75}{\sin \psi} = 163{,}5 \text{ Ctnr.}$$

Die soeben geführte Rechnung läfst sich in gleicher Beziehung für die Bogenhälfte *DH* machen und giebt

$$tg\,\psi_1 = \frac{107,25}{124,7};\quad \psi_1 = 40^0\,42';$$

$$T_1 = \frac{107,25}{sin\,\psi_1} = 164,47 \text{ Ctnr.}$$

Es mufs T der gröfste Druck der Belastung gegen die Bogenhälfte DF und ebenso T_1 der gröfste Druck der Belastung gegen die Bogenhälfte DH sein. Die Puncte t und t_1 selbst, in welchen die Drücke T und T_1 stattfinden, haben, weil die mittlere Wölblinie ein Kreisbogen ist, vom Scheitel D in Gradmafs die Abstände ψ und ψ_1.

Nehmen wir den Bogen einer Brücke Fig. 53 zu ebenfalls 12 Ellen Breite, ferner mit zwei Gleisen und auf jedem ein Locomotiv stehend an, dann giebt die Belastung der vier Schienenstränge

für den Scheitel den Druck von $124,7 \times 4 = 498,8$ Ctnr.
„ die Bogenstelle t den Druck von $163,5 \times 4 = 654$ „
„ „ „ t_1 „ „ „ $164,47 \times 4 = 657,88$ „

Bei der durchaus gleichen radialen Höhe des gewölbten Bogens von ¾ Ellen ist somit

1 Quadratzoll seiner Querschnittsfläche gedrückt

$$\text{im Scheitel mit } \frac{498,8 \times 110}{12 \times \frac{3}{4} \times 24^2} = 10,58 \text{ Pfd.}$$

$$\text{bei } t \text{ mit } \frac{654 \times 110}{12 \times \frac{3}{4} \times 24^2} = 13,88 \text{ „}$$

$$\text{„ } t_1 \text{ „ } \frac{657,88 \times 110}{12 \times \frac{3}{4} \times 24^2} = 13,96 \text{ „.}$$

Die vom gewölbten Bogen zu stützende Masse bedingt einen Horizontaldruck in seinem Scheitel von

$$C = 6\tfrac{3}{8} \times 1\tfrac{3}{4} \times 666 \times 12 \text{ Pfd.}$$

und hieraus folgt für 1 Quadratzoll der Bogenscheitelfläche ein Druck von

$$\frac{6\frac{3}{8} \times 1\frac{3}{4} \times 666 \times 12}{12 \times \frac{3}{4} \times 24^2} = 17,19 \text{ Pfd.}$$

Das Perpendikel durch t_1 schneidet an der innern Wölblinie den Bogen Eg ab, dem ein Winkel $EGg = \mu_1$ zugehört und für welchen ist

$te = gf$ oder $6 \sin \mu_1 = 6{,}375 \sin \psi_1$, also

$$\sin \mu = \frac{6{,}375}{6} \sin \psi\,;\ \mu_1 = 43^0 51'.$$

Ferner

$$gf = 6 \sin \mu_1 = 4{,}16 \text{ Ellen},$$
$$Gf = 6 \cos \mu_1 = 4{,}33 \quad ,,$$

Das Gewicht des Brückenbogens zwischen dem Scheitel D und dem Perpendikel durch t ergiebt sich zu

$$W = 666 \times 12 \{ gf \,.\, fB - gEf \} = 76483 \text{ Pfd.}$$

Der Druck im Puncte t der mittlern Wölblinie nach ihrer Richtung hin, der aus dem Gewichte der vom Bogen zu stützenden Masse entspringt, ist

$$d_\eta = \frac{W}{\sin \psi_1} = \frac{76483}{\sin 40^0 42'} = 117290 \text{ Pfd.}$$

und der auf einen Quadratzoll der Querschnittsfläche des Wölbbogens bei t_1 kommende Druck

$$\frac{d_\eta}{12 \times \tfrac{3}{4} \times 24^2} = 22{,}62 \text{ Pfd.}$$

Durch eine Rechnung, wie die vorstehende, erhält man den Druck gegen 1 Quadratzoll der Bogenquerschnittsfläche bei t, den das Gewicht der vom Scheitel bis zu t hin vom Bogen zu stützenden Masse hervorbringt, zu

22,25 Pfd.

Vergleichen wir die auf den Bogen Fig. 53 bezüglichen Entwickelungen mit den gleichnamigen für den Bogen Fig. 52, so erkennen wir sehr bald

dafs die wahrscheinlich gröfste Belastung gegen den kleinern Bogen Fig. 53 einen geringern Bogendruck übt, als die wahrscheinliche gröfste Belastung gegen den gröfsern, Fig. 52,

dafs ferner die Festigkeit des gröfsern Bogens, verglichen mit der, welche die zugehörende Masse fordert, durch die Belastung verhältnifsmäfsig weniger, als die Festigkeit des kleinern durch ebenfalls die gröfste zugehörende überschreitende Last in Anspruch genommen wird,

dafs selbst bei dem kleinen Bogen Fig. 53 die wahrscheinlich

gröfste Belastung den Wölbbogen immer noch weniger drückt, als die von ihm zu stützende Masse und

dafs eine Belastung eines Brückenbogens nicht wohl eintreten dürfte, welche den Bogen in demselben Maafse nach seiner Richtung hin drückt, als die Masse desselben.

Die namhaftesten Ergebnisse der geführten Untersuchungen über die Fähigkeit eines gewölbten Brückenbogens überschreitende Lasten zu tragen, lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen:

1) Bei jedem regelrechten Bogen oder bei einem solchen, der nach seiner Richtung hin stärker gespannt ist, als dessen Hintermauerung, kann die mittlere Wölblinie desselben als die stützende Linie für alle die Lasten angesehen werden, welche über den Bogen wegschreiten.

2) Soll die mittlere Wölblinie eines gewölbten Bogens, wie eben angegeben, über den letztern weggehende Lasten allein stützen und soll kein Bestreben zum Aufsteigen des Bogens durch die Belastungen herbeigeführt werden, dann mufs das zwischen der Brückenbahn und dem Bogen befindliche Material einen zusammenhängenden steifen Körper bilden.

3) Jede auf einem Bogen stehende Last verbreitet sich nach der ganzen Bogentiefe hin über einen Theil des erstern, der durch Tangenten zur mittlern Wölblinie begrenzt wird, die sich im Puncte der Belastung vereinigen. Läfst sich vom Lastpuncte bis zu dem einen Ende der mittlern Wölblinie hin keine Tangente an dieselbe ziehen, dann vertheilt sich die Last von diesem Bogenende aus in der ganzen Bogentiefe bis zu jener Linie der mittlern Wölbfläche hin, deren Tangente in den Belastungspunct trifft.

4) Bei mangelhafter Beschaffenheit eines gewölbten Bogens und bei einem innigen Zusammenhange der Hintermauerung desselben mit dem zugehörenden Pfeiler wird eine Last, bei ihrem Uebergange vom letztern nach dem Bogenscheitel hin, zum Theil, oft aber auch ganz, vom Pfeiler mittels der Hintermauerung getragen. Von dieser Stützungsweise mufs jedoch abgesehen werden, wenn es sich um die Bestimmung der ungünstigsten Beanspruchung der Bogenfestigkeit durch eine Last handelt.

5) Jeder gewölbte Bogen, der eine Last allein stützt, empfängt

durch diese einen Horizontaldruck im Scheitel, und eben so grofs als der letztere, ist der gesammte Horizontaldruck, den jede Bogenhälfte, in Folge der Belastung, auf ihren Pfeiler überträgt.

6) Der durch eine bestimmte Last herbeigeführte Bogendruck ist an den Enden der Bogenstrecke, über welche sich die letztere vertheilt, am gröfsten.

7) Eine Last verbreitet sich über eine um so gröfsere Strecke der mittlern Wölblinie in Graden (wenn nämlich diese als ein Kreisbogen gedacht wird) und erzeugt einen um so kleinern Bogendruck, je höher die horizontale Brückenbahn über dem Scheitel der mittlern Wölblinie liegt.

8) Je steiler oder je gewölbter ein Brückenbogen für eine bestimmte Spannweite ist, um so geringer ist auch der Druck, den derselbe durch eine bestimmte Last erfährt.

9) Je gröfser der Radius der innern Wölblinie eines halbkreisförmigen Brückenbogens, je gröfser folglich auch die wahrscheinliche Belastung ist, die er mit einem Male zu tragen bekommen kann, um so gröfser wird auch der aus der letztern hervorgehende gesammte Bogendruck; doch zeigt er sich, verglichen mit dem aus der Masse des Bogens hervorgehenden Bogendruck, um so kleiner als der letztere, je gröfser der Radius der mittlern Wölblinie ist.

Achtzehnter Abschnitt.

Ueber die Höhe gewölbter Bögen.

Unter Höhe eines gewölbten Bogens verstehen wir immer den Abstand der innern Wölbfläche eines solchen von der äufsern, winkelrecht zur innern oder mittlern Wölbfläche genommen, und unter Scheitelhöhe eben diesen Abstand im Scheitel.

Damit ein gewölbter Brückenbogen seiner Bestimmung genügen, nämlich sein eigenes Gewicht, das der Uebermauerung und

das überschreitender Lasten, stützen könne, mufs er eine gewisse Höhe haben, weil das zu seiner Herstellung verwendete Steinmaterial eine begrenzte Festigkeit besitzt. Demnach entsteht die Frage: Wie ist die Höhe für den gewölbten Theil eines Brückenbogens zu finden, die seine Bestimmung fordert?

Die Beantwortung dieser Frage hängt vor allem von der Feststellung der Stützungsrichtung des gewölbten Bogens ab. Bei regelrechter Beschaffenheit eines solchen tritt, wie wir bereits Seite 51 gesehen haben, dessen mittlere Wölblinie als vorgeschriebene Stützlinie für die zu stützenden Massen auf. Es bleibt noch festzustellen, ob eben diese als vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer, oder ob sie mit horizontaler Hinterstützung wirksam ist? Ist die mittlere Wölblinie eines Wölbbogens als Stützlinie mit nur tangentialer Hinterstützung thätig, dann ist zuverlässig der Bogendruck, der vom Scheitel nach den Bogenanfängen hin statt hat, gröfser, als wenn sie als vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung wirksam ist. Ob die eine, oder ob die andere Wirkungsweise eines gewölbten Bogens zu Stande kommt, das hängt von der Bauführung ab. Sicher wird man immer gehen die mittlere Wölblinie eines Bogens, dessen Höhe zu bestimmen ist, als Stützlinie mit nur horizontaler Hinterstützung anzunehmen, weil hieraus Bogenhöhen folgen, die einer regelrechten und natürlichen Stützung des Bogens entsprechen. Uebrigens kann nur diese Stützungsweise bei einem gewölbten Bogen eintreten, wenn wir die gewöhnliche Bestimmung eines solchen festhalten, nämlich die, das Gewicht der gesammten Bogenmasse, sowie überschreitende Lasten möglichst nach seiner Richtung hin allein zu stützen, ferner, wenn wir die übliche Bauform solcher und die Bauführung selbst in's Auge fassen.

Dem gewöhnlichen Bedürfnisse werden wir völlig genügen, wenn wir die Höhe eines gewölbten Bogens für den Fall bestimmen, dafs seine mittlere Wölblinie als vorgeschriebene Stützlinie mit nur horizontaler Hinterstützung wirkt; dessen ungeachtet wollen wir den zweiten möglichen Fall, nämlich die Wirkung der mittlern Wölblinie eines gewölbten Bogens als vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung, nicht ganz unbeachtet lassen.

Bei der Bestimmung der Höhe eines gewölbten Bogens ist die rückwirkende Festigkeit des Wölbmaterials eine zweite zu beach-

tende Gröfse. Die Versuchsresultate, welche als Anhang angeschlossen sind, weisen nach, dafs verschiedene Bausteine nicht dieselbe Fähigkeit besitzen, eine gewisse Last zu tragen, dafs vielmehr der Druck sehr ungleich ist, der zum Zerdrücken bestimmter Prismen aus verschiedenen Bausteinen erfordert wird.

Bis zur Grenze seiner Festigkeit hin darf ein Baustein in einem Bauwerke, das eine möglichst grofse Dauer bieten soll, nie belastet werden, was ganz besonders bei Brücken zu beachten ist. Der wievielste Theil der mittlern rückwirkenden Festigkeit des zur Verwendung kommenden Bausteins hier unbedenklich benutzt werden darf, ist im bereits oben genannten Anhange über die rückwirkende Festigkeit gleichfals entwickelt. Für die nachfolgenden Erörterungen wollen wir die rückwirkende Festigkeit eines Steinprisma, das 1 Quadratelle Querschnittsfläche hat, allgemein mit γ, die Festigkeit, die hiervon beansprucht werden kann, ohne eine Zerstörung befürchten zu müssen, mit $m\gamma$ und das Eigengewicht einer Kubikelle von demselben Steine mit w bezeichnen.

Wir gehen zunächst zur Bestimmung der Scheitelhöhe gewölbter Bögen über. Für einen Brückenbogen Fig. 54 sei $BC = \varrho$ der Krümmungshalbmesser im Scheitel B der mittlern Wölblinie, ferner $AB = a$ die Scheitelhöhe und $DE = b$ der Abstand der horizontalen Brückenbahn von der äufsern Wölbfläche im Scheitel. Hiernach und bei einer Breite der Brücke von B ist, mit Hinsicht auf Seite 47, der Horizontaldruck im Scheitel des angenommenen Bogens

$$C = B\varrho\ (a+b)\ w,$$

und die Festigkeit ebendaselbst, die beansprucht werden darf,

$$m\gamma\ .\ aB.$$

Allgemein muss also bestehen

$$m\gamma\ .\ aB \geqq B\varrho\ (a+b)\ w \text{ oder}$$

$$\text{I. } \left(\frac{m\gamma}{w}\right)\frac{a}{a+b} = \frac{m\gamma}{w}\left\{\frac{1}{1+\frac{b}{a}}\right\} \geqq \varrho.$$

Die Längeneinheit, auf welche sich a, b und ϱ beziehen, bedingt γ und w; werden a, b und ϱ in Ellen genommen, dann stellt w das Gewicht von 1 Kubikelle des Wölbmaterials und γ die rück-

wirkende Festigkeit eines Prisma des nämlichen Materials dar, das 1 Quadratelle Querschnittsfläche hat. Der Zahlenwerth des m ist von der eingeführten Längeneinheit völlig unabhängig. Die Formel I. bezieht sich auf eine massive Ueberfüllung oder Uebermauerung des Scheitels und setzt ferner voraus, es habe das Wölbmaterial mit dem des Wölbbogens gleiches Gewicht. Ist das letztere nicht der Fall und man setzt das Eigengewicht der kubischen Einheit des über dem Wölbbogen liegenden Materials gleich w_1, dann ergiebt sich

$$m\gamma \,.\, a\,B \geqq B\varrho\,(aw + bw_1)$$

und hieraus folgt

$$\text{II.}\quad \left(\frac{m\gamma}{w}\right) \cdot \frac{a}{a + \frac{bw_1}{w}} = \left(\frac{m\gamma}{w}\right) \cdot \left\{\frac{1}{1 + \frac{bw_1}{aw}}\right\} \geqq \varrho.$$

Nach dieser Formel hängt der gröfste zulässige Werth des mittlern Krümmungshalbmessers im Scheitel eines gewölbten Bogens von der zu beanspruchenden rückwirkenden Festigkeit $m\gamma$ des Wölbmaterials, von seinem Eigengewichte w und vom Eigengewichte w_1 des über dem gewölbten Bogen stehenden Materials ab. Es kann ϱ um so gröfser genommen werden, je gröfser $m\gamma$, je kleiner w und je kleiner $\frac{w_1}{w}$ ist. Der Werth des ϱ hängt aber auch von b und a ab und zwar wird ϱ um so gröfser zulässig, je kleiner $\frac{b}{a}$ ist. Die Ueberfüllungs- oder Uebermauerungshöhe b im Scheitel wirkt demnach vermindernd auf den zulässigen Krümmungshalbmesser ϱ im Scheitel ein, woraus denn folgt, dafs unter übrigens gleichen Umständen der zulässige Krümmungshalbmesser im Scheitel eines gewölbten Bogens für die geringste Ueberfüllungs- oder Uebermauerungshöhe am gröfsten wird. Es ist Gebrauch, Brückenbögen immer zu überfüllen, oft sogar im Scheitel zu übermauern. Die übliche Ueberfüllungshöhe der Brückenbögen im Scheitel ist mehr constant; sie liegt zwischen ¾ und 1½ Elle und als Mittelwerth kann 1 Elle angenommen werden.

Ein Wölbmaterial, das für ein bestimmtes a und b den gröfsten

Krümmungshalbmesser des Wölbbogens im Scheitel gestattet, ist sicher das beste. Diefs aber geschieht, wenn $\frac{\gamma}{w}$ möglichst grofs ist, d. h. ein Wölbmaterial ist um so besser, je kleiner sein Eigengewicht w und je gröfser dessen rückwirkende Festigkeit γ ist. Die befste Vergleichung zweier Wölbmaterialien bietet der Quotient

$$\frac{\gamma}{w};$$

ein Wölbmaterial ist um so besser, je gröfser dieser ihm zugehörende Quotient ist.

Die für die Scheitelhöhe bestimmten Formeln I. und II. beziehen sich noch nicht auf die Lasten, welche einen Brückenbogen möglicher Weise überschreiten können. Die desfallsigen Untersuchungen des vorhergehenden Abschnittes haben uns gelehrt, dafs die wahrscheinlich gröfsten Lasten, die einen Brückenbogen auf einmal überschreiten und wenn sie vom gewölbten Theile desselben allein getragen werden, einen Druck gegen den letztern hervorbringen, der geringer als jener ist, der aus der Bogenmasse entspringt. Wenn wir daher die Einwirkung der einen Brückenbogen auf einmal überschreitenden Lasten auf den gewölbten Theil des letztern jener gleich setzen, welche die Bogenmasse auf eben diesen hervorbringt, dann haben wir den Einflufs der zufälligen Lasten sicherlich gröfser veranschlagt, als sie wahrscheinlicher Weise zu Stande kommt. Diese Annahme gewährt uns den Vortheil für die Bestimmung der Bogenhöhe, dafs wir den Einflufs der zufälligen Belastungen mit durch den Sicherheitscoëfficienten m bemessen können, was geschieht, wenn wir denselben halb so grofs nehmen, als ihn die sichere Stützung der Bogenmasse erfordert. Aus der gemachten Annahme für die Einwirkung der einen Brückenbogen treffenden veränderlichen Belastungen ergiebt sich aber für Brückenbögen mit gröfsern Krümmungshalbmessern im Scheitel eine relativ gröfsere Sicherheit, als für solche mit kleinern Krümmungshalbmessern. Als einen Uebelstand von Erheblichkeit können wir diefs nicht ansehen, einmal, weil die zufälligen Belastungen mit Sicherheit im Voraus nicht zu bestimmen sind, ferner aber auch, weil die Höhen kleiner Wölbbögen wohl immer gröfser genommen werden dürften, als sie die Rechnung giebt und als sie wirklich zulässig sind.

Aus der Formel II. erhält man für die Scheitelhöhe eines gewölbten Bogens

$$\text{III.}\quad a = \frac{w_1}{w}\left\{\frac{b\varrho}{\frac{m\gamma}{w} - \varrho}\right\}.$$

Für die Praxis kann ohne Nachtheil $w = w_1$ gesetzt werden, besonders wenn w gröfser als w_1 ist, woraus folgt

$$\text{IV.}\quad a = \frac{b\varrho}{\frac{m\gamma}{w} - \varrho}.$$

Um mittels dieser Formel die einem mittlern Krümmungshalbmesser zugehörende Scheitelhöhe bestimmen zu können, mufs der Werth von

$$\frac{m\gamma}{w}$$

für das Wölbmaterial bekannt sein. Zu den weichsten pirnaischen Sandsteinen gehören die Cottaer. Von solchem wiegt ein Kubikzoll 0,05133 Zollpfund und ein Prisma von 1 Quadratzoll Querschnittsfläche wird von 2018,1 Zollpfund zerdrückt. Demnach ist für Cottaer Sandstein

$$\gamma = 2018{,}1 \times 24^2;\; w = 0{,}05133 \times 24^3.$$

Soll im belasteten Zustande eines Bogens nur etwa $1/_{15}$ der rückwirkenden Festigkeit des gewölbten Bogentheiles in Anspruch genommen werden, dann ist, mit Einrechnung der zufälligen Belastung, $m = 1/_{30}$ zu setzen, woraus sich für Cottaer Sandstein ergiebt

$$\frac{m\gamma}{w} = \frac{2018{,}1}{0{,}05133 \times 24 \times 30} = 54{,}6.$$

Demnach erhält man für einen aus Cottaer Sandstein herzustellenden Brückenbogen, dessen gewölbter Theil im Scheitel einen mittlern Krümmungshalbmesser von 40 Ellen erhalten und im Scheitel 1 Elle hoch überfüllt sein soll, die zugehörende Scheitelhöhe zu

$$a = \frac{40}{54{,}6 - 40} = 2{,}73 \text{ Ellen.}$$

Bei dem nämlichen Wölbmateriale und bei derselben Ueberfüllungshöhe im Scheitel ergiebt sich ferner für einen mittlern Krümmungshalbmesser von 20 Ellen ebendaselbst die zugehörende Scheitelhöhe zu

$$a = \frac{20}{54{,}6 - 20} = 0{,}56 \text{ Ellen.}$$

Gemäfs der Gleichung II.

$$\varrho = \frac{m\gamma}{w}\left\{\frac{1}{1+\frac{bw_1}{aw}}\right\}$$

mufs für einen zweiten Bogen aus demselben Materiale sein

$$\varrho_1 = \frac{m\gamma}{w}\left\{\frac{1}{1+\frac{b_1w_1}{a_1w}}\right\}.$$

Durch Division wird

$$\frac{\varrho}{\varrho^1} = \frac{1+\frac{b_1w_1}{a_1w_1}}{1+\frac{bw_1}{aw}}.$$

Für $w = w_1$ folgt hieraus

$$\text{V.} \quad a = \frac{b\varrho}{\varrho_1\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right) - \varrho}.$$

Diese Gleichung dient dazu, aus den bekannten Dimensionen eines Bogens die Scheitelhöhe eines zweiten zu bestimmen, der aus demselben Materiale hergestellt werden und der einen gewissen mittlern Krümmungshalbmesser ϱ im Scheitel erhalten soll. Angenommen, es sei die Scheitelhöhe eines ausgeführten und sich bewährten Brückenbogens $1\frac{1}{4}$ Elle, sein mittlerer Krümmungshalbmesser im Scheitel 25 Ellen und die Ueberfüllungshöhe daselbst $1\frac{2}{3}$ Elle. Für einen Brückenbogen aus demselben Materiale unter nahe gleicher Beanspruchung der rückwirkenden Festigkeit des gewölbten Bogens durch die gesammte Bogenmasse und durch zufällige Be-

lastung ergiebt sich nach V., wenn dessen mittlerer Krümmungshalbmesser im Scheitel 18 Ellen und die Ueberfüllungshöhe 1 Elle betragen soll, die entsprechende Scheitelhöhe zu

$$a = \frac{1.18}{25\left(1 + \frac{1\frac{2}{3}}{1\frac{1}{4}}\right) - 18} = 0{,}45 \text{ Ellen.}$$

So bequem auch die Formel V. ist, um aus den Dimensionen ausgeführter Brückenbögen die für zu bauende abzuleiten, so mufs man doch vorsichtig in der Benutzung ihrer Ergebnisse sein, weil die Scheitelhöhen ausgeführter Brücken gar nicht selten viel gröfser, oft aber auch erheblich kleiner sind, als sie, gemäfs der rückwirkenden Festigkeit des Wölbmaterials und der zufälligen Belastung des Bogens sein sollten.

Wir wissen, dafs der gewölbte Theil eines Brückenbogens weder durch die Bogenmasse, noch durch zufällige Belastung den gröfsten Druck im Scheitel erleidet, dafs vielmehr der aus der zufälligen Belastung entstehende gröfste Bogendruck den Bogenanfängen bald näher, bald entfernter liegt, je nach dem Stande der Last, und ferner, dafs stets der aus der Bogenmasse entstehende Bogendruck, wenn die mittlere Wölblinie des Bogens als vorgeschriebene Stützlinie mit nur horizontaler Hinterstützung wirkt, vom Scheitel nach den Bogenanfängen hin gröfser wird, also in den Bogenanfängen am gröfsten sein mufs. Die sparsamste Verwendung des Wölbmaterials erfordert demnach eine Zunahme der Höhe des gewölbten Bogens vom Scheitel nach seinen Anfängen hin. Von dieser Zunahme der Höhe gewölbter Bögen wird nicht selten Gebrauch gemacht, doch findet man auch viele Brücken mit durchaus gleich hohen Stützbögen, was oft nur geschieht, um die practische Ausführung zu erleichtern. Nächst der Scheitelhöhe eines Stützbogens mufs daher auch dessen Höhe in den Endpuncten bestimmt werden. Für Stützbögen, die durchaus gleiche Höhe haben sollen, wird diese nach dem Bogendrucke an dessen Enden zu bemessen sein.

Die Bestimmung des Bogendruckes, der am Ende eines Wölbbogens stattfindet, kann nur geschehen, wenn man die Form der innern oder mittlern Wölblinie des Stützbogens, die Massenanordnung und das Eigengewicht der letztern kennt. Es wird immer bes-

ser sein, die Höhen des Stützbogens von einem Brückenbogen etwas gröfser zu nehmen oder durch die Rechnung zu finden, als wie zu klein. Eben defshalb kann es nur räthlich sein, bei Bestimmung der Bogenhöhen das Material der Hinter- und Uebermauerung oder das der Hinter- und Ueberfüllung gleich schwer mit dem Wölbmateriale zu nehmen, obschon es in der Regel leichter als das letztere ist, sowie ferner für eben diesen Zweck die Hinter- und Uebermauerung als massiv in Rechnung zu stellen, selbst wenn sich bei der gewählten Construction sehr erhebliche Aussparungen vorfinden sollten. Das eben Angeführte mit Beachtung der oben näherungsweise festgestellten Einwirkung der Lasten, die einen Brückenbogen auf einmal überschreiten, auf den Stützbogen des letztern macht es uns leicht, die Höhe eines solchen in verschiedenen Entfernungen vom Scheitel allgemein festzustellen. In dieser Beziehung wollen wir zunächst einen kreisförmigen Stützbogen Fig. 54 in Betrachtung ziehen. Für diesen sei die innere Wölblinie *AGO* ein Kreisbogen mit dem Radius r und G ein Punct derselben, der vom Scheitel A um den Bogen μ für den Radius 1 absteht, so dafs auch Bogen μ das Mafs des Centrumwinkels *ACG* ist. Die Tiefe des Brückenbogens sei gleich B, die Scheitelhöhe *AD* des Stützbogens gleich a, die Höhe der Ueberfüllung oder Uebermauerung im Scheitel $DE = b$, das Eigengewicht des Wölbmaterials gleich w und $m\gamma$ die rückwirkende Festigkeit, welche beansprucht werden soll. Die Fläche des Wölbbogens, die zwischen den Perpendikeln durch A und G liegt, und ferner von der zugehörenden innern Wölblinie *AG* und von der horizontalen Brückenbahn durch E begrenzt wird, ist

$$F = r\,\{(a+b+r - \tfrac{1}{2}\,r\cos\mu)\sin\mu - \tfrac{1}{2}\,r\,\mu\},$$

also

$$W = Brw\,\{(a+b+r - \tfrac{1}{2}\,r\cos\mu)\sin\mu - \tfrac{1}{2}\,r\,\mu\}$$

das Gewicht jener Bogenmasse, welche Vertikalebenen begrenzen, die durch den Scheitel A und durch G gehen und die überdiefs auf der Stirnfläche des Bogens winkelrecht stehen. Das Perpendikel durch G schneidet die mittlere Wölblinie in F, und eben dieser Punct hat die Last W zu stützen. Der hieraus nach der Richtung der mittlern Stützlinie in F entspringende Druck ist nach Seite 40

$$D_n = \frac{W}{\sin\psi},$$

wenn ψ den Richtungswinkel der Tangente des Punctes F mit einer Horizontale oder den Abstand des Punctes F vom Scheitel B, als Bogen für den Radius 1, darstellt. Der Krümmungshalbmesser des Punctes F der mittlern Stützlinie sei ein Kreisbogen aus N mit dem Radius ϱ. Mit Hinsicht auf die Figur ist

$$\varrho \sin \psi = r \sin \mu \text{ d. g.}$$

$$\sin \psi = \frac{r}{\varrho} \sin \mu, \text{ also auch}$$

$$D_n = \frac{\varrho W}{r \sin \mu}.$$

Die Bogenhöhe des Punctes F mit a_1 bezeichnet, giebt

$$a_1 B \,(m\gamma) = \frac{\varrho W}{r \sin \mu}, \text{ oder}$$

$$(\;).\quad a_1 = \frac{\varrho}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right)} \left\{ a + b + r - \tfrac{1}{2} r \cos \mu - \tfrac{1}{2} r \frac{\mu}{\sin \mu} \right\}.$$

Die Höhe a_1 des Stützbogens soll eigentlich winkelrecht auf der Richtung der mittlern Wölblinie stehen; sie kann aber auch ohne beachtenswerthen Fehler winkelrecht zur innern Wölblinie genommen werden. Die mittels der eben gefundenen Formel dargestellte Bogenhöhe a_1 gehört dem Puncte F der mittlern Wölblinie an, der vertikal über G liegt, und ist vom Krümmungshalbmesser ϱ des Punctes F der mittlern Wölblinie abhängig. Die Differenz der Radien der Puncte G und F ist nur gering und ohne einen erheblichen Fehler in der Bestimmung der Bogenhöhe zu begehen, wird man

$$\varrho = r + \tfrac{1}{2} a_1$$

setzen können. Hiernach giebt die letzte Gleichung

$$a_1 = \frac{r + \tfrac{1}{2} a}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right)} \left\{ a + b + r - \tfrac{1}{2} r \cos \mu - \tfrac{1}{2} r \frac{\mu}{\sin \mu} \right\},$$

und daraus folgt

$$\text{VI. } a_1 = \frac{r\left\{a+b+r - \frac{1}{2}\, r \cos\mu - \frac{1}{2}\, r \frac{\mu}{\sin\mu}\right\}}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right) - \frac{1}{2}\left\{a+b+r - \frac{1}{2}\, r \cos\mu - \frac{1}{2}\, r \frac{\mu}{\sin\mu}\right\}}.$$

Gesetzt, es sei die für einen besondern Fall erhaltene Bogenhöhe $a_1 = cd$ Fig. 54. Um aus der Höhe a_1 den zugehörenden Punct d der äufsern Wölblinie des Stützbogens genügend genau zu erhalten, lege man cd dergestalt winkelrecht durch einen Punct der innern Wölblinie, dafs der Mittelpunct F von cd mit dem Perpendikel durch G zusammenfällt.

Ist die innere Wölblinie des Stützbogens Fig. 54 ein Halbkreis, also AO ein Viertelkreis, und rückt G bis zu O herab, dann geht

μ über in $\frac{\pi}{2}$; es wird

$\sin\mu = \sin\frac{\pi}{2} = 1;\ \cos\mu = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, und folglich

$$\text{VII. } a_1 = \frac{r\left\{a+b+r - \frac{1}{4}\, r\pi\right\}}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right) - \frac{1}{2}\left\{a+b+r - \frac{1}{4}\, r\pi\right\}}.$$

Die Höhe a_1 des Stützbogens geht in dessen Scheitelhöhe a über, wenn in VI. $\mu = o$ gesetzt wird. Man erhält so

$$\text{IIX. } a_1 = \frac{r\left\{a+b+r - \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} r\right\}}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right) - \frac{1}{2}\left\{a+b+r - \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} r\right\}} = \frac{r(a+b)}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right) - \frac{1}{2}(a+b)}.$$

In dieser Gleichung ist $a = a_1$ gleich der Scheitelhöhe des Stützbogens. Ein genäherter Werth ist

$$\text{IX. } a = \frac{br}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right) - r},$$

wie aus der Gleichung IV. folgt, wenn man daselbst ϱ mit r vertauscht. Setzt man für jeden besondern Fall den aus IX. für a sich ergebenden Werth statt a in IIX., den Werth, der sich für a_1 herausstellt, wiederum statt a in IIX. etc., so erhält man endlich einen genügend genauen Werth für die wahre Scheitelhöhe a_1. Mit dieser Auflösungsweise, die wir zur weitern Erhärtung auf einen besondern Fall anwenden wollen, umgehen wir mit Nutzen eine unvollständig quadratische Gleichung. Auf Seite 171 bestimmten wir die Scheitelhöhe eines Stützbogens von Cottaer Sandstein mit einem mittlern Krümmungshalbmesser von 40 Ellen und einer Ueberfüllungshöhe von 1 Elle. Wir erhielten für die Scheitelhöhe

$$a = 2{,}73 \text{ Ellen.}$$

Der Radius der innern Wölblinie dieses Bogens ergiebt sich, als Kreisbogen genommen, zu

$$40 - \frac{2{,}73}{2} = 38{,}635 \text{ Ellen.}$$

Für eben diese Bestimmung war

$$\left(\frac{m\gamma}{w}\right) = 54{,}6; \; b = 1 \text{ Elle.}$$

Als gegeben für einen kreisförmigen Stützbogen denken wir uns jetzt

$$r = 38{,}635; \; b = 1; \; \frac{m\gamma}{w} = 54{,}6$$

und als unbekannt dessen Scheitelhöhe. Für diese erhalten wir näherungsweise nach IX.

$$a = \frac{1 \times 38{,}635}{54{,}6 - 38{,}635} = 2{,}42 \text{ Ellen.}$$

Statt a diesen Werth in IIX. gesetzt, entwickelt

$$a_1 = 2{,}498 \text{ Ellen,}$$

wenn dieser Werth wieder statt a in IIX. genommen wird

$$a_1 = 2{,}557 \text{ Ellen}$$

und wenn wir diesen Werth nochmals für a in IIX. setzen,

$$a_1 = 2{,}602 \text{ Ellen u. s. f.}$$

Erst wenn die Scheitelhöhe a eines Stützbogens, etwa wie vorstehend, bestimmt ist, läfst sich die Höhe a_1 für einen beliebigen

Punct der innern Wölblinie nach der Formel VI. ermitteln. Setzen wir die zuletzt gefundene Scheitelhöhe in VII., so erhalten wir die Höhe des Stützbogens für einen Punct L der mittlern Wölblinie, die vertikal über dem Endpuncte O der innern liegt, zu

$$a_1 = \frac{38{,}635 \left\{3{,}602 + 38{,}635\ (1 - \tfrac{1}{4}\,\pi)\right\}}{54{,}6 - \tfrac{1}{2}\left\{3{,}602 + 38{,}635\ (1 - \tfrac{1}{4}\,\pi)\right\}} = 9{,}44 \text{ Ellen.}$$

Für einen Stützbogen, der durchaus gleiche Höhe haben soll, ist nicht die zu nehmen, die sich für den Scheitel herausstellt, sondern jene, die man für seinen Endpunct vertikal über dem Endpuncte der innern Wölblinie findet. In diesem Falle geht auch die Scheitelhöhe a in die Höhe für den Endpunct über. Für einen kreisförmigen Stützbogen, dessen innere Wölblinie bis zum Scheitel hin einen Bogen μ für den Radius 1 umfafst, ist die endliche Höhe nach VI.

$$\text{X.}\quad a_1 = \frac{r\left\{a + b + r - \tfrac{1}{2}\,r\cos\mu - \tfrac{1}{2}\,r\,\dfrac{\mu}{\sin\mu}\right\}}{\left(\dfrac{m\gamma}{w}\right) - \tfrac{1}{2}\left\{a + b + r - \tfrac{1}{2}\,r\cos\mu - \tfrac{1}{2}\,r\,\dfrac{\mu}{\sin\mu}\right\}},$$

worin $a = a_1$ sein mufs.

Einen genäherten Werth für a erhält man aus der Relation () Seite 175, wenn daselbst ϱ mit r verwechselt wird, zu

$$\text{XI.}\quad a = \frac{b + r - \tfrac{1}{2}\,r\cos\mu - \tfrac{1}{2}\,r\,\dfrac{\mu}{\sin\mu}}{\left(\dfrac{m\gamma}{w}\right) - r}.$$

Für einen besondern Fall sucht man den genäherten Werth für a_1 mittels der Gleichung XI., setzt diesen statt a in X., den sich ergebenden Werth für a_1 wieder statt a in X. u. s. f. Zur Anwendung der zuletzt aufgestellten Formeln nehmen wir die innere Wölblinie eines aus Cottaer Sandstein herzustellenden Stützbogens von durchaus gleicher Höhe als einen Kreisstichbogen an, der vom Scheitel bis zu jedem Endpuncte hin 30° umfafst, dessen Radius $r = 25$

Ellen sein und dessen Ueberfüllung oder Uebermauerung im Scheitel 1 Elle betragen soll. Der dem Winkel von 30^0 zugehörende Bogen für den Radius 1 ist

$$\mu = 0{,}5236$$

und nach oben ist für Cottaer Sandstein

$$\frac{m\gamma}{w} = 54{,}6.$$

Ein genäherter Werth für die durchaus gleiche Höhe des Stützbogens ist nach XI.

$$a = 1{,}76 \text{ Ellen.}$$

Diesen Werth statt a in X. gesetzt, entwickelt

$$a_1 = \frac{25 \times 3{,}845}{52{,}678} = 1{,}824 \text{ Ellen.}$$

Diesen Werth abermals statt a in X. eingesetzt, giebt

$$a_1 = \frac{25 \times 3{,}909}{52{,}646} = 1{,}856 \text{ Ellen,}$$

und diefs wird genügend genau die gesuchte durchaus gleiche Höhe des Wölbbogens sein.

Die vorstehenden Formeln für die Bestimmung der Höhe eines Stützbogens finden zuverlässig auch dann noch Anwendung, wenn die innere Wölblinie eines solchen aus mehreren kreisförmigen Stückbögen in der Absicht zusammengesetzt ist, um derselben eine der Ellipse oder einer andern krummen Linie ähnliche Gestalt zu verleihen. Die anders als einfach kreisförmig gekrümmten innern Wölblinien von Brückenbögen pflegt man aber immer aus Kreisstückbögen zusammenzusetzen, um elliptische, parabolische Formen zu erhalten, wodurch es überflüssig wird, für elliptische, parabolische und noch andere innere Wölblinien Formeln für die zugehörenden Bogenhöhen aufzusuchen.

Die bisherigen Bestimmungen über die Höhe der Wölbbögen beziehen sich sämmtlich auf Stützbögen, deren mittlere Wölblinien als vorgeschriebene Stützlinie mit nur horizontaler Hinterstützung wirksam sind. Obschon, wie bereits oben angeführt wurde, es nur angerathen werden kann, die Höhe der Stützbögen für eine blos horizontale Hinterstützung aufzusuchen, weil diese der Natur der Stützung eines Wölbbogens angemessen ist, so wollen wir doch

noch die Bestimmung der Höhe eines Stützbogens kurz anführen, dessen innere Wölblinie ein Kreisbogen ist und dessen mittlere Wölblinie als vorgeschriebene Stützlinie mit nur tangentialer Hinterstützung thätig sein soll. Bei der eben genannten Hinterstützung ist, gemäfs IV. Seite 29, für das Polygon Fig. 5

$$D_n = \frac{P_{n-1} \cos \alpha^n{}_{-1}}{\sin(\alpha_n - \alpha_{n-1})}.$$

Beziehen wir diese für unterbrochen an einander gereihte Gewichte geltende Formel auf die stetig an einander gereihten Massen eines Brückenbogens Fig. 55 zwischen der Vertikale durch den Scheitel *AL* und der Vertikale durch *BEF*, bezeichnen wir ferner das Gewicht der Masse innerhalb der eben genannten Vertikalen mit $B \,.\, W$, so dafs *B* die Tiefe des Brückenbogens und *W* das Gewicht der Fläche *ABFL* darstellt, und den Richtungswinkel des Punctes *E* der Stützlinie mit ψ, dann wird

$$d\,(B \,.\, W) = P_{n-1};$$

$$\psi = \alpha_{n-1};$$

$$\psi + d\,\psi = \alpha_n,\ \alpha_n - \alpha_{n-1} = d\,\psi,$$

also

$$D_n = \frac{B dW \cos \psi}{d\,\psi} = B \cos \psi \left(\frac{dW}{d\,\psi}\right).$$

Der Krümmungshalbmesser des Punctes *B* der innern Wölblinie sei r, die Bogenhöhe durch den Punct *E* der mittlern Wölblinie vertikal über *B* in winkelrechter Richtung gegen die innere Wölblinie a_1 und $\frac{m\gamma}{w}$ die rückwirkende Festigkeit, welche von der Einheit der Querschnittsfläche des Stützbogens beansprucht werden soll. Hiernach ist

$$B a_1 \left(\frac{m\gamma}{w}\right) = B \cos \psi \left(\frac{dW}{d\,\psi}\right) \text{ d. g.}$$

$$\text{XII. } a_1 = \frac{\cos \psi}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right)} \cdot \left(\frac{dW}{d\,\psi}\right).$$

Die Richtung der innern Wölblinie im Puncte B vertikal unter E werde durch den Winkel μ und der Krümmungshalbmesser des Punctes E durch ϱ bezeichnet.

Sind die innere und mittlere Wölblinie concentrische Kreisbögen, dann ist

$$\varrho \sin \psi = r \sin \mu,$$

$$\sin \psi = \frac{r}{\varrho} \sin \mu,$$

$$\cos^2 \psi = 1 - \left(\frac{r}{\varrho} \sin \mu\right)^2,$$

$$\cos \psi \, d\psi = \frac{r}{\varrho} \cos \mu \, d\mu \text{ und}$$

$$d\psi = \frac{r}{\varrho} \cdot \frac{\cos \mu}{\cos \psi} d\mu.$$

Durch vorstehende Werthe geht die Gleichung XII. über in

$$a_1 = \frac{\varrho}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right) r} \cdot \frac{\cos^2 \psi}{\cos \mu} \cdot \left(\frac{dW}{d\mu}\right) = \frac{\varrho \left(1 - \left(\frac{r}{\varrho} \sin \mu\right)^2\right)}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right) r \cos \mu} \cdot \left(\frac{dW}{d\mu}\right).$$

Der Richtungswinkel der Tangente des Punctes B der innern Wölblinie ist zu μ angenommen; folglich ist auch

$$\angle BCA = \mu.$$

Demnach wird, wenn man für den Punct B der innern Wölblinie den lothrechten Abstand vom Scheitel A mit

$$x = AH,$$

den vertikalen Abstand von eben diesem Puncte mit

$$y = BH,$$

die Höhe des Stützbogens im Scheitel mit a und die Höhe seiner Ueberfüllung oder Uebermauerung ebendaselbst mit b bezeichnet, nach Gründen der analytischen Geometrie,

$$dW = (x + a + b)\, dy \text{ oder,}$$

weil

$$y = r \sin \mu; \quad dy = r \cos \mu d\mu \text{ und}$$

$$x = r - r \cos \mu$$

ist,

$$\frac{dW}{d\mu} = (r - r \cos \mu + a + b)\, r \cos \mu,$$

also auch

$$a_1 = \frac{\varrho}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right) r \cos \mu} \left\{1 - \left(\frac{r}{\varrho} \sin \mu\right)^2\right\} \left\{r - r \cos \mu + a + b\right\} r \cos \mu,$$

$$\text{XIII. } a_1 = \frac{\varrho}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right)} \left\{1 - \left(\frac{r}{\varrho} \sin \mu\right)^2\right\} \left\{r - r \cos \mu + a + b\right\}.$$

Die bei Bestimmung der vorstehenden Gleichung gemachten Annahmen gelten, streng genommen, nur für Stützbögen von gleicher Höhe; es ist also

$$a = a_1 \text{ und } \varrho = r + \tfrac{1}{2} a_1,$$

wefshalb nur durch Versuchsrechnungen aus der vorstehenden Gleichung die Bogenhöhe a_1 zu bestimmen ist. Der erste genäherte Werth für a_1 wird aus der Gleichung XIII. zu

$$\text{XIV. } a_1 = \frac{r}{\left(\frac{m\gamma}{w}\right)} \cos^2 \mu \left\{r - r \cos \mu + b\right\}$$

erhalten, wenn man daselbst $\varrho = r$ setzt und a wegläfst. Diesen genäherten Werth für a_1 setzt man in den zweiten Theil der Gleichung XIII., den sich herausstellenden wieder in den zweiten Theil eben dieser Gleichung u. s. f. und man erhält recht bald einen genügend genauen Werth für a_1.

Für einen Stützbogen mit horizontaler Hinterstützung und von durchaus gleicher Höhe sei der Radius der innern Wölblinie $r = 25$ Ellen, $\mu = 30^0$, $\frac{m\gamma}{w} = 54{,}6$ und $b = 1$ Elle. Nach XIV. ist ein genäherter Werth für die Höhe dieses Bogens

$$a_1 = \frac{25}{54{,}6} \cos^2 30^0 \left\{25 \left(1 - \cos 30^0\right) + 1\right\} = 1{,}5 \text{ Ellen.}$$

Für die Gleichung XIII. ergiebt sich hieraus

$$\varrho = 25{,}75;\; a = 1{,}5, \text{ folglich}$$

$$a_1 = \frac{25{,}75}{54{,}6}\left\{1 - \left(\frac{25 \sin 30}{25{,}75}\right)^2\right\}\left\{25\,(1 - \cos 30^0) + 2{,}5\right\} = 2{,}1 \text{ Ellen.}$$

Diesen Werth nochmals für a in die Gleichung XIII. genommen, giebt

$$a = 2{,}1;\; \varrho = 26{,}05 \text{ und}$$

$$a_1 = \frac{26{,}05}{54{,}6}\left\{1 - \left(\frac{25}{26{,}05}\sin 30^0\right)^2\right\}\left\{25\,(1 - \cos 30^0) + 3{,}1\right\} = 2{,}37 \text{ Ell.},$$

welcher Werth genügend genau die durchaus gleiche Höhe eines Stützbogens unter den gestellten Bedingungen angiebt.

Die Dimensionen in der zuletzt gestellten und gelösten Aufgabe sind, mit Ausnahme der Richtung der Hinterstützung des Stützbogens, die nämlichen, welche wir auf Seite 179 bei Bestimmung der durchaus gleichen Höhe eines Stützbogens ebenfalls annahmen. Dort erhielten wir für die gesuchte Höhe des Stützbogens 1,856 Ellen, während wir jetzt 2,37 Ellen fanden. Diese Zusammenstellung zeigt uns,

> dafs ein Stützbogen, der in allen Puncten tangential hinterstützt ist, eine gröfsere Bogenhöhe als jener bedarf, dessen Hinterstützung horizontal wirkt.

Diese eben aufgestellte Folgerung hat ihren Grund darin, dafs eine Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung nach ihrer Richtung hin einen gröfsern Druck erleidet, als bei horizontaler Hinterstützung, was sich aus den allgemeinen Betrachtungen über vorgeschriebene Stützlinien, auf einen besondern Fall bezogen, leicht darthun läfst. Nehmen wir z. B. für Fig. 5

$$P_0 = 10 \text{ Pfd.};\quad \alpha_1 = 20^0,$$
$$P_1 = 15 \text{ ,, };\quad \alpha_2 = 25^0,$$
$$P_2 = 20 \text{ ,, };\quad \alpha_3 = 30^0,$$
$$P_3 = 25 \text{ ,, };\quad \alpha_4 = 35^0 \text{ etc.}$$

an, so erhält man für horizontale Hinterstützung nach Seite 40

$$D_1 = \frac{\tfrac{1}{2} P_0}{\sin \alpha_1} = \frac{5}{\sin 20^0} = 1{,}46 \text{ Pfd.},$$

$$D_2 = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1}{\sin \alpha_2} = \frac{20}{\sin 25^0} = 47{,}32 \text{ Pfd.};$$

$$D_3 = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2}{\sin \alpha_3} = \frac{40}{\sin 30^0} = 80 \text{ ,, };$$

$$D_4 = \frac{\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3}{\sin \alpha_4} = \frac{65}{\sin 35^0} = 113{,}32 \text{ Pfd.}$$

etc.

Dagegen bei tangentialer Hinterstützung nach Seite 29

$$D_1 = \frac{\frac{1}{2} P_0}{\sin \alpha_1} = \frac{5}{\sin 20^0} = 1{,}46 \text{ Pfd.}$$

$$D_2 = \frac{P_1 \cos \alpha_1}{\sin (\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{15 \cos 20^0}{\sin 5^0} = 161{,}72 \text{ Pfd.};$$

$$D_3 = \frac{P_2 \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_3 - \alpha_2)} = \frac{20 \cos 25^0}{\sin 5^0} = 207{,}97 \text{ ,, };$$

$$D_4 = \frac{P_3 \cos \alpha_3}{\sin (\alpha_4 - \alpha_3)} = \frac{25 \cos 30^0}{\sin 5^0} = 248{,}41 \text{ ,, };$$

etc.

Die zwei eben aufgeführten Entwickelungen weisen nach, dafs der in der Richtung einer Stützlinie sich herausstellende Druck bei tangentialer Hinterstützung sich unter Umständen erheblich gröfser gestaltet, als bei horizontaler Hinterstützung. Eben dieser Unterschied erklärt es, warum ein Stützbogen für tangentiale Hinterstützung beträchtlich höher werden mufs, als bei horizontaler Hinterstützung, wie wir auf Seite 179 und 183 fanden, und veranlafst uns, weil dieser Unterschied in den Bogenhöhen bei der Ausführung nicht unbeachtet gelassen werden kann, zu Stellung der Frage: Tritt die mittlere Wölblinie eines Stütz- oder Tragbogens als Stützlinie mit horizontaler, oder als Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung auf?

Als Vorbereitung zur Beantwortung der gestellten Frage wollen wir die innere Wölblinie *AB* des Bogens Fig. 55 als vorgeschriebene Stützlinie für die Massen betrachten, die zwischen ihr und der horizontalen Brückenbahn liegen; ferner wollen wir hierbei erst eine

horizontale und sodann eine tangentiale Hinterstützung voraussetzen. Die innere Wölblinie des Bogens Fig. 55 sei ein Kreisbogen mit dem Radius r, A ihr Scheitel, LC ein Perpendikel durch den Scheitel A, der zum Winkel ACB gehörende Bogen für den Radius 1 gleich μ, das Gewicht der Masse über der innern Wölblinie zwischen den Perpendikeln durch A und B gleich W, das Eigengewicht der Masse gleich w und die Höhe AL des Bogens im Scheitel

$$a+b=rh.$$

Für das von B auf LC gefällte Perpendikel sei

$$LH=x \text{ und } BH=y.$$

Es wird

$$y=r\sin\mu;\ x=a+b+r\,(1-\cos\mu)=r\,(1+h-\cos\mu).$$

Nach Gründen der analytischen Geometrie ist

$$(1)\quad dW=wxdy=wr^2\cos\mu d\mu\ \{h+1-\cos\mu\}.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$(2)\quad W=wr^2\ \{(1+h-\tfrac{1}{2}\cos\mu)\sin\mu-\tfrac{1}{2}\mu\}.$$

Der Horizontaldruck im Scheitel A der innern Wölblinie ist nach II. Seite 47

$$C=r\,.\,rh\,.\,w=r^2hw.$$

Findet die innere Wölblinie als Stützlinie horizontale Hinterstützung, dann ist:

der Druck im Puncte B derselben nach II. Seite 40

$$(3)\quad D_n=\frac{W}{\sin\mu}=wr^2\left\{1+h-\tfrac{1}{2}\cos\mu-\frac{\mu}{2\sin\mu}\right\}$$

und der vom Scheitel A bis zum Puncte B hin abgesetzte Horizontaldruck nach III. Seite 40

$$(4)\quad (s\,.\,h_{n-1})=C-W\cot g\,\mu=r^2w\left\{h-\cos\mu\left\{1+h-\tfrac{1}{2}\cos\mu-\frac{\mu}{2\sin\mu}\right\}\right\}.$$

In die Gleichungen (3) und (4) wollen wir auf einander folgend die zu 5, 10, 15... Grad gehörenden Bögen setzen, wodurch wir erhalten:

$$D_5=wr^2\ \{h+0{,}00127\};$$

$$D_{10}=wr^2\ \{h+0{,}00506\};$$

$$D_{15}=wr^2\ \{h+0{,}01128\};$$

etc.

$$(s.h_5) = wr^2 \{0{,}0038\,h - 0{,}001265\};$$
$$(s.h_{10}) = wr^2 \{0{,}0152\,h - 0{,}004983\};$$
$$(s.h_{15}) = wr^2 \{0{,}0341\,h - 0{,}010895\};$$
etc.

Die gesammte Höhe h eines Brückenbogens im Scheitel, für den gleich 1 gesetzten Radius der innern Wölblinie, ist immer ein ächter Bruch und nicht selten kleiner als $^1/_{10}$. Für $h = {}^1/_{10}$ werden die eben bestimmten Horizontaldrücke negativ, woraus folgt:

die kreisförmige Stützlinie eines Brückenbogens, für welchen der Raum zwischen der innern Wölblinie und der Brückenbahn durchaus mit Masse erfüllt ist, empfängt den Druck vom Scheitel A Fig. 56 aus bis zu gewissen Puncten B und B_1 auf beiden Seiten des Scheitels, der von der Hinterstützungsebene gegen die Stützlinie hin gerichtet ist.

Besteht kein Zusammenhang zwischen der Hinterstützungsebene und der Stützlinie, dann mufs aus der angegebenen Druckrichtung ein Oeffnen (Brechen) der letztern in den Puncten B und B_1 und gleichzeitig im Scheitel A erfolgen. Die Wahrheit dieser Folgerung wird in der Praxis gar häufig wahrgenommen und ist Veranlassung geworden, die Puncte B und B_1, in welchen sich der Bogen öffnet, die Brechungspuncte zu nennen.

Ist die Hinterstützungsebene mit der Stützlinie in feste Verbindung gesetzt, dann macht sich der zwischen A und B Fig. 56 bestehende Horizontaldruck gegen die Stützlinie nicht bemerkbar. Diese Voraussetzung kann jedoch für gewölbte Bögen im Allgemeinen nicht gemacht werden, wefshalb die Kenntnifs der Lage des Brechungspunctes B Fig. 56 zu bestimmen ist.

Der Brechungspunct B mufs um einen Bogen μ vom Scheitel abstehen, dafs, wenn man μ um sein Differenzial BD wachsen läfst, das hierdurch bedingte Differenzial der Bogenmasse innerhalb der Perpendikel durch B und D für den Punct B oder D einen Horizontaldruck oder Horizontalzug von o gegen die Hinterstützungsebene hervorbringt, d. h. es mufs nach (4) das Differenzial von s (h_{n-1}) gleich o sein d. g.

$$o = r^2 w\, d\mu \left\{(1+h)\, sin\,\mu - cos\,\mu\, sin\,\mu + {}^1/_2\, cotg\,\mu - \frac{\mu}{2\, sin\,\mu}\right\}, \text{ oder}$$

$$(5)\quad 1+h = \cos\mu + \frac{\mu}{2\sin^3\mu} = \frac{\cotg\mu}{2\sin\mu}.$$

Wird der zum Bogen μ gehörende Winkel zu 20^0 angenommen, so ergiebt sich

$$1+h = 1{,}2855 \text{ d. h.}$$

Der Brechungspunkt liegt 20 Grad vom Scheitel der Stützlinie, wenn die Massenhöhe im Scheitel 0,28 des Radius der innern Wölblinie beträgt.

Für die als Stützlinie angenommene innere Wölblinie des Bogens Fig. 55 möge nun tangentiale Hinterstützung bestehen. Wächst der Bogen μ um sein Differenzial, dann ist in Beziehung auf die Formeln Seite 29,

$$\mu = \alpha_{n-1},\ \mu + d\mu = \alpha_n;\ \alpha - \alpha_{n-1} = d\mu \text{ und}$$

P_{n-1} = dem Gewichte des Massenprisma zwischen den Perpendikeln durch B und G oder

$$P_{n-1} = wxdy = wr^2\cos\mu d\mu\,(1+h - \cos\mu)$$

zu setzen. Hiernach und in Beziehung auf Seite 29 ist:

der vom Scheitel A bis zum Puncte B hin abgesetzte Horizontaldruck

$$(6)\,(s.h_{n-1}) = C - \frac{wr^2\cos\mu d\mu(1+h-\cos\mu)\cos^2\mu}{d\mu} = r^2w\left\{h-(1+h-\cos\mu)\cos^3\mu\right\},$$

ferner die Last, welche die Hinterstützungsebene vom Scheitel A bis zum Puncte B hin trägt,

$$(7)\,(s.v_{n-1}) = W - \frac{wr^2\cos\mu d\mu\,(1+h-\cos\mu)\sin\mu\cos\mu}{d\mu} =$$

$$wr^2\left\{(1+h - \tfrac{1}{2}\cos\mu)\sin\mu - \tfrac{1}{2}\mu\right\} - wr^2\cos^2\mu\sin\mu\left\{1+h-\cos\mu\right\}$$

und der im Puncte B nach der Richtung der Stützlinie statthabende Druck

$$(8)\,D_n = \frac{wr^2\cos\mu d\mu\,(1+h-\cos\mu)\cos\mu}{d\mu} = wr^2\cos^2\mu\,(1+h-\cos\mu).$$

Auch in die Formeln (6) und (8) wollen wir auf einander folgend die 5, 10 und 15 Grad gehörenden Bögen setzen, wodurch sich ergiebt:

$$D_5 = wr^2 \{0{,}9924\,h + 0{,}003776\};$$
$$D_{10} = wr^2 \{0{,}96985\,h + 0{,}014734\};$$
$$D_{15} = wr^2 \{0{,}93301\,h + 0{,}031792\};$$
etc.

$$(s\,.\,h_5) = wr^2 \{0{,}01138\,h - 0{,}003762\};$$
$$(s\,.\,h_{10}) = wr^2 \{0{,}04489\,h - 0{,}014510\};$$
$$(s\,.\,h_{15}) = wr^2 \{0{,}09878\,h - 0{,}030708\};$$
etc.

Die Drücke D_5, D_{10}, D_{15} sind gröfser, als die für eine horizontale Hinterstützung unter übrigens gleichen Umständen bestimmten. Die Horizontaldrücke $(s\,.\,h_5)$, $(s\,.\,h_{10})$, $(s\,.\,h_{15})$ etc. werden, wie bei horizontaler Hinterstützung der Stützlinie, bis zu einer gewissen Entfernung vom Scheitel hin für gangbare Werthe von h gleichfalls negativ. Dieselben Horizontaldrücke sind ferner beträchtlich gröfser, als die einer horizontalen Hinterstützung entsprechenden; denn für $h = 0{,}1$ beträgt, bei horizontaler Hinterstützung, der Horizontaldruck

bis zu 5^0 vom Scheitel — $0{,}00078\,wr^2$;
„ „ 10^0 „ „ — $0{,}00346\,wr^2$;
„ „ 15^0 „ „ — $0{,}00748\,wr^2$;

ferner ist bei tangentialer Hinterstützung der Horizontaldruck

bis zu 5^0 vom Scheitel — $0{,}002624\,wr^2$;
„ „ 10^0 „ „ — $0{,}010021\,wr^2$;
„ „ 15^0 „ „ — $0{,}020830\,wr^2$.

Einer Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung müssen gleichfalls Brechungspuncte B und B_1 Fig. 56 zu beiden Seiten des Scheitels zugehören. Für diese ist, wie oben, von der Gleichung (6)

$$d\,(s\,.\,h_{n-1}) = 0.$$

Das Differenzial der Gleichung (6) gleich 0 gesetzt, entwickelt aber

$$(8)\quad 1 + h = \tfrac{4}{3}\cos\mu$$

als Bedingungsgleichung für den Brechungspunct bei tangentialer Hinterstützung. In diese Gleichung

$$1 + h = 1{,}2855$$

gesetzt, welcher Werth sich bei der horizontalen Hinterstützung der

Stützlinie unter der Voraussetzung ergab, der Brechungspunct liege 20^0 vom Scheitel entfernt, so erhält man

$$\tfrac{3}{4}\,(1{,}2855) = \cos\mu;\ \mu = 15^0 24'.$$

Hiernach liegt, unter übrigens gleichen Umständen, der Brechungspunct bei einer kreisförmigen Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung dem Scheitel näher, als bei horizontaler Hinterstützung, was schon daraus zu folgern gewesen wäre, dafs bei tangentialer Hinterstützung auf gleiche Bogenabstände vom Scheitel A nach dem Brechungspuncte B hin Fig. 56 ein gröfserer Horizontaldruck kommt, als bei horizontaler Hinterstützung und dafs der gesammte von A bis B hin gegen die Stützlinie geäufserte Horizontaldruck dem gleich sein mufs, der von B bis mit zum Endpuncte F von der Stützlinie gegen die Hinterstützungsebene, aufser dem Horizontaldruck im Scheitel, entsteht; denn der gesammte vom Scheitel A bis zum Endpuncte F von der Stützlinie an die Hinterstützungsebene abgesetzte Horizontaldruck ist bei horizontaler und tangentialer Hinterstützung der nämliche, was die Gleichungen VI. Seite 40 und VII. Seite 30 angeben.

Nicht immer hängt bei Brückenbögen das Material innig zusammen, das zwischen dem Stützbogen und der Brückenbahn liegt. Setzen wir diese Beschaffenheit voraus, oder nehmen wir von den Brechungspuncten B und B_1 Fig. 56 aus vertikale Risse BC und B_1C_1 in der Hintermauerung des Bogens an, dann wird der vom Scheitel A bis zu den Brechungspuncten B und B_1 hin gegen die Stützlinie bestehende Horizontaldruck wirksam, und es entsteht ein Bestreben, den Stützbogen im Scheitel und in den Brechungspuncten (wie bei B_1 und A angedeutet ist) zu öffnen.

Ebenfalls unter den gemachten Voraussetzungen mufs der im Scheitel bestehende Horizontaldruck C um den Druck vermehrt werden, der vom Brechungspuncte bis zum Scheitel hin gegen den Stützbogen statt hat, und eben so mufs der gesammte Horizontalschub, der von jedem Brechungspuncte aus bis mit zum Endpuncte des Stützbogens auf dessen Hinterstützung übergeht, dem horizontalen Druck C im Scheitel plus dem Horizontaldrucke gleich sein, der vom Brechungspuncte B bis zum Scheitel A hin auf die Stützlinie kommt.

Das Oeffnen eines materiellen Stützbogens in seinen Brechungs-

puncten und im Scheitel tritt um so leichter ein, je kleiner die Bogenhöhe B_1G im Vergleich mit der Bogenlänge AB_1 ist. Mit dem Oeffnen des Bogens ändert sich die Stützlinie ab; in den Brechungspuncten rückt sie gegen die äufsere Wölblinie, im Scheitel aber gegen die innere Wölblinie des Stützbogens hin, wodurch jene Vermehrung des Horizontalschubs entsteht, die zur freien Stützung der Massen zwischen dem Scheitel und den Brechungspuncten erforderlich ist. Diese freie Stützung der gesammten Bogenmasse innerhalb der Brechungspuncte tritt unter den ungünstigsten Verhältnissen ein, wenn nämlich die Hintermauerung oder Hinterfüllung des Stützbogens ein nicht zusammenhängendes Material ist, doch gehört noch eine Höhe des Stützbogens zwischen den Brechungspuncten zur freien Stützung, in welcher eine freie Stützlinie liegen kann; je höher folglich ein Stützbogen vom Scheitel bis zu seinen Brechungspuncten hin ist, um so zuverlässiger wird die freie Stützung erfolgen können. Um sicher zu gehen, müssen wir selbst dann die freie Stützung der Bogenmasse vom Scheitel bis zu den Brechungspuncten hin als bestehend voraussetzen, wenn das Hintermauerungsmaterial einen durchaus zusammenhängenden Körper bilden soll.

Nach diesen vorbereitenden Erörterungen für die auf Seite 184 gestellte Frage, hinsichtlich der Richtung der Hinterstützung eines vorgeschriebenen Stützbogens, verschreiten wir nun zu deren Beantwortung selbst und zwar wie folgend:

Erstens. Ein materieller Stützbogen mit Brechungspuncten oder ein solcher, der von der Hintermauerung oder Hinterfüllung aus Horizontaldruck bis zu gewissen Abständen vom Scheitel erleidet, hat immer das Bestreben, sein eignes Gewicht innerhalb seiner Brechungspuncte und das Gewicht der über ihm befindlichen Masse mittels einer freien Stützlinie zu stützen. Es wird diese Stützung und mit ihr Ruhe im Stützbogen innerhalb der Brechungspuncte eintreten, wenn nicht ein Zusammenhang in der Hinter- oder Uebermauerung besteht, welcher der Herstellung der neuen Stützung entgegenwirkt, was jedoch nur sehr ausnahmsweise statthaben dürfte, und ferner, wenn die zur freien Stützung erforderliche Bogenhöhe vorhanden ist.

Zweitens. Von den Brechungspuncten eines Stützbogens aus bis zu seinen Anfängen hin oder, dafern dem Stützbogen Brechungspuncte nicht zugehören, vom Scheitel bis zu den Bogenanfängen hin wird die mittlere Wölblinie desselben immer als vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung auftreten, wenn diefs die Hintermauerung nicht verhindert, weil hierbei die Massenstützung mit dem geringsten Drucke und, hinsichtlich der Hintermauerung, auf dem kürzesten Wege oder doch in einer Richtung erfolgt, in welcher die geringste Verkürzung eintritt.

Gemäfs dem Vorbemerkten ist bei Bestimmung der Höhe materieller Stützbögen von einer tangentialen Hinterstützung ganz abzusehen. Für einen Stützbogen, dem Brechungspuncte zukommen, wird die Bogenhöhe nach Mafsgabe des in der freien Stützlinie bestehenden Druckes zu ermitteln sein, in der sich die gesammte Bogenmasse innerhalb der Brechungspuncte stützt. Von den letztern bis zu den Bogenenden hin kann im Allgemeinen nur horizontale Hinterstützung eintreten, so dafs auch von den Brechungspuncten ab die Bogenhöhe nach Beschaffenheit des bei horizontaler Hinterstützung entstehenden Bogendruckes zu bestimmen ist. Im folgenden Abschnitte werden wir es noch näher begründen, dafs die oben gegebenen Formeln für die Höhe kreisförmiger Stützbögen bei vorausgesetzter horizontaler Hinterstützung unter gewissen Beschränkungen oder bei gewissen Anordnungen der Bogenmassen selbst immer Anwendung finden können.

Die hauptsächlichsten Ergebnisse der geführten Untersuchung behufs der Bestimmung der Höhe materieller Stützbögen sind folgende:

1) Ein Wölbmaterial ist um so besser, je gröfser der Quotient aus seiner rückwirkenden Festigkeit dividirt durch sein Eigengewicht ist.

2) Ein Stützbogen mufs vom Scheitel ab eine um so gröfsere Höhe haben, je höher dessen Uebermauerung oder Ueberfüllung im Scheitel ist.

3) Lasten, welche über einen Brückenbogen wegschreiten, nehmen die Tragfähigkeit des Stützbogens in einem um so geringern Grade in Anspruch, je mehr die mittlere Wölblinie im Scheitel

von der Brückenbahn absteht und je mehr sich jene nach den Bogenanfängen von der letztern entfernt.

4) Eine über einen Brückenbogen geführte Last wird nahe gleichmäfsig von der ganzen Bogentiefe gestützt und verbreitet sich direct über jenen Theil des Stützbogens, der vom Standpuncte der Last durch Tangenten zur mittlern Wölbfläche begrenzt wird. Die Last geht ferner direct auf jenen Bogen über, der einerseits durch Tangenten vom Puncte der Last, anderseits aber durch das Bogenende begrenzt wird, sobald das letztere höher liegt, als der Punct der verlängerten mittlern Wölblinie, dessen Tangente auf den belasteten Punct der Brückenbahn trifft. (M. s. Seite 139.)

5) Die gröfste Beanspruchung der Stütz- oder Tragfähigkeit eines Stützbogens durch die Lasten, die gleichzeitig auf einen Brückenbogen zu stehen kommen, ist im Mittel jener gleich zu setzen, die aus dem Gewichte des Bogenmaterials entspringt.

6) Weil der Druck, der vom Massengewichte eines Brückenbogens auf dessen mittlere Wölblinie kommt, vom Scheitel nach den Bogenenden hin zunimmt, und weil eine ähnliche Beanspruchung der Festigkeit des Stützbogens durch überschreitende Lasten bedingt wird, so müssen die Höhen des letztern vom Scheitel nach seinen Enden hin dieser Zunahme entsprechen oder es mufs, wenn die Höhe des Stützbogens durchaus dieselbe sein soll, diese den Druck am Ende des Stützbogens mit Sicherheit zu tragen vermögen.

7) Vom Scheitel bis zu den Brechungspuncten hin hat jeder Wölbbogen das Bestreben, sein eignes Gewicht und das über ihm befindlicher Massen in der Richtung einer freien Stützlinie zu stützen. Diefs geschieht auch für eine kreisförmige innere Wölblinie, wenn der Stützbogen zwischen den Brechungspuncten für die Aufnahme der freien Stützlinie hoch genug ist.

8) Bei einer kreisförmigen Gestalt der innern Wölblinie eines Brükkenbogens kann, für gewisse Anordnungen des letztern, eine ungleich gröfsere Höhe des Stützbogens innerhalb der Brechungspuncte erforderlich werden, als der zu stützende Druck, mit Hinsicht auf die Festigkeit des Wölbmaterials, vorschreibt.

9) Von den Brechungspuncten ab tritt die mittlere Wölblinie jedes Stützbogens als vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung auf, dafern diefs die Hinterfüllung oder Hintermauerung nicht unmöglich macht.

10) Für einen Brückenbogen mit horizontaler Brückenbahn und mit einer kreisförmigen innern Wölblinie kann die kreisförmige mittlere Wölblinie des Stützbogens nur dann vom Scheitel ab als vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung auftreten, wenn die Hintermauerung negativen Horizontalschub (m. s. Seite 188) in sich aufnimmt, der vom Scheitel bis zu den Brechungspuncten hin gegen den Stützbogen besteht.

Neunzehnter Abschnitt.

Bestimmung der freien Stützlinie gegebener Brückenbögen.

Die Betrachtungen des vorgehenden Abschnittes haben uns gelehrt, dafs sich gegebene Brückenbögen bis zu einer gewissen Entfernung vom Scheitel hin nicht immer in der Richtung der mittlern Wölblinie des Stützbogens, sondern oft in einer freien Stützlinie stützen, die, soll der Bogen bestehen können und soll überhaupt kein Bestreben zu einer Formänderung desselben thätig sein, innerhalb der stützungsfähigen Masse des Bogens liegen mufs. Zu einer vollständigen Erkennung der Stützungsrichtung eines gegebenen Brückenbogens, sowie zur Bestimmung der Höhe seines Stützbogens, ist daher die Kenntnifs der zugehörenden freien Stützlinie erforderlich. Zu diesem Ende wenden wir uns nun zur Ermittelung der Natur der freien Stützlinie für einen Brückenbogen überhaupt und stellen uns als Aufgabe zunächst die Aufsuchung der Gleichung der freien Stützlinie eines Brückenbogens Fig. 57, dessen Brückenbahn *BM* horizontal, dessen Hintermauerung oder Hinterfüllung massiv und dessen innere Wölblinie *ACG* ein Ellipsenbogen sein soll.

Für den letztern sei N der Durchschnittspunct der beiden Achsen; die halbe grofse Achse sei $NH = A$ und liege horizontal, die halbe kleine Achse sei $NS = B$ und stehe folglich vertikal; ferner sei der horizontale Abstand des Scheitels A der innern Wölblinie vom Durchschnittspuncte N der Achsen

$$NJ = A \,.\, t \text{ und}$$

die ganze Höhe des Brückenbogens im Scheitel

$$AB = B \,.\, h.$$

Aufser der Masse des Bogens zwischen der innern Wölblinie AG und der Brückenbahn BM, deren Eigengewicht wir mit w bezeichnen, denken wir uns über dem Scheitel AB noch eine besondere Last Q. Die freie Stützlinie, deren Gleichung wir bestimmen wollen, stellen wir uns unter TPO vor. Ihren Abstand vom Scheitel A der innern Wölblinie nehmen wir zu

$$AT = \xi \,.\, AB = \xi Bh,$$

ferner für einen Punct P eben dieser freien Stützlinie

die lothrechte Abscisse zu $TK = x$ und die zugehörende horizontale Ordinate zu $PK = y$ an.

Das durch P gefällte Perpendikel schneide die innere Wölblinie im Puncte C und für diesen Punct sei

der horizontale Abstand von N gleich $NE = A \,.\, u$ und
der vertikale Abstand von N „ CE.

Nach den Eigenschaften der Ellipse ist

$$EC = \frac{B}{A} \sqrt{\left\{A^2 - NE^2\right\}} = \frac{B}{A} \sqrt{\left\{A^2 - A^2u^2\right\}} = B\sqrt{(1 - u^2)};$$

$$JA = B\sqrt{(1 - t^2)}.$$

Ferner

$$CD = AB + JA - EC = Bh + B\sqrt{(1 - t^2)} - B\sqrt{(1 - u^2)}$$
$$= B\left\{h + \sqrt{(1 - t^2)} - \sqrt{(1 - u^2)}\right\};$$

$$LC = EJ = Au - At = A(u - t).$$

Die Fläche des Brückenbogens zwischen den Perpendikeln durch den Scheitel A und durch den Punct C sei f. Wächst LC um sein Differenzial, d. i. Adu, dann nimmt auch f um sein Differenzial zu und es wird

$$d \,.\, f = CD \times Adu = ABdu\left\{h + \sqrt{(1 - t^2)} - \sqrt{(1 - u^2)}\right\}.$$

Das Gewicht der Wölbmasse zwischen den Perpendikeln durch A und C für die Tiefe oder Breite 1 des Bogens mit W bezeichnet, giebt

$$d.W = ABwdu \{ h + \sqrt{(1-t^2)} - \sqrt{(1-u^2)} \} \text{ *)}.$$

Durch Integration erhält man hieraus

$$W = ABw \left\{ u \left(h + \sqrt{(1-t^2)} \right) - \frac{u}{2} \sqrt{(1-u^2)} - \right.$$

$$\left. \tfrac{1}{2} \, arc. \, (sin = u) + Const \right\}.$$

Für $u = t$ verwandelt sich W in o d. g.

$$(1) \quad W = ABw \{ h(u-t) + (u - \tfrac{1}{2} t) \sqrt{(1-t^2)} -$$

$$\tfrac{1}{2} u \sqrt{(1-u^2)} - \tfrac{1}{2} arc \, (sin = u) + \tfrac{1}{2} arc \, (sin = t) \}.$$

Die freie Stützlinie TPO ist nach dem vierten Abschnitte eine Kettenlinie. Bezeichnen wir deren Richtungswinkel bei P mit α_n und den ihr zukommenden Horizontaldruck mit C, dann ist nach II. Seite 15

$$(2) \quad tg \, \alpha_n = \frac{\tfrac{1}{2} Q + W}{C},$$

weil von der im Scheitel liegenden Last Q nur die Hälfte zu der Last zu rechnen ist, welche die freie Stützlinie zwischen ihrem Scheitel T und dem Puncte P zu stützen hat. Nach Gründen der analytischen Geometrie ist für die Coordinaten x und y des Punctes P auch

$$tg \, \alpha_n = \frac{dx}{dy} \text{ d. g.}$$

in Beziehung auf (2)

$$Cdx = (\tfrac{1}{2} Q + W) \, dy = (\tfrac{1}{2} Q + W) \, Adu.$$

Hierein den für W in (1) gefundenen Werth gesetzt und darauf integrirt, giebt

$$\frac{Cx}{A} = \tfrac{1}{2} Qu + ABw \left\{ \left(h + \sqrt{(1-t^2)} \right) (\tfrac{1}{2} u^2 - ut) - \frac{u^2+2}{6} \sqrt{(1-u^2)} \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{2} ut \sqrt{(1-t^2)} + \tfrac{1}{2} u \, . \, arc \, (sin = t) - \tfrac{1}{2} u \, . \, arc \, (sin = u) + Const \right\}.$$

*) J. A. Schubert, Differenzial- und Integral-Formeln S. 145 u. 89.

Für $u = t$ mufs x in o übergehen; folglich

$$o = \frac{1}{2} Qt + ABw \left\{ -\frac{1}{2} t \left(h + \sqrt{(1-t^2)} \right) - \left(\frac{1-t}{3} \right) \sqrt{(1-t^2)} + const \right\};$$

mithin:

$$\text{I. } \frac{Cx}{A} = \frac{1}{2} Q (u-t) + ABw \left\{ \frac{\left(h + \sqrt{(1-t^2)}\right)}{2} (u-t)^2 - \left(\frac{u^2+2}{6} \right) \sqrt{(1-u^2)} \right.$$
$$\left. + \left(\frac{3ut - 2t^2 + 2}{6} \right) \sqrt{(1-t^2)} + \frac{1}{2} u \left\{ arc\,(sin = t) - arc\,(sin = u) \right\} \right\}.$$

$$\text{II. } y = A\,(u - t).$$

Die Gleichungen I. und II. geben die freie Stützlinie eines Brückenbogens mit einer horizontalen Brückenbahn, dessen innere Wölblinie ein elliptischer Spitzbogen ist.

Für einen Brückenbogen, dessen innere Wölblinie ein elliptischer Rundbogen ist, erhält man die Coordinaten x und y aus I. und II., wenn man $t = o$ setzt zu

$$\text{III.} \begin{cases} \frac{Cx}{A} = \frac{1}{2} Qu + ABw \left\{ \left(\frac{1+h}{2} \right) u^2 - \left(\frac{2+u^2}{6} \right) \sqrt{(1-u^2)} \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} u \,.\, arc\,(sin = u) \right\}. \\ y = Au. \end{cases}$$

In der letzten Gleichung $A = B = r$ gesetzt, giebt die Coordinaten der freien Stützlinie eines Brückenbogens mit horizontaler Abgleichung, dessen innere Wölblinie ein Kreisbogen mit dem Radius r ist, zu

$$\text{IV.} \begin{cases} \frac{Cx}{r} = \frac{1}{2} Qu + wr^2 \left\{ \left(\frac{1+h}{2} \right) u^2 - \left(\frac{2+u^2}{6} \right) \sqrt{(1-u^2)} \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} u \,.\, arc\,(sin = u) \right\}. \\ y = ru. \end{cases}$$

Setzen wir in I. und II. $A = B = r$, dann erhalten wir für die freie Stützlinie eines Brückenbogens mit horizontaler Bahn, dessen innere Wölblinie ein Kreisspitzbogen ist,

$$\text{V.}\begin{cases}\dfrac{Cx}{r}=\tfrac{1}{2}Q(u-t)+wr^2\left\{\left(\dfrac{h+\sqrt{(1-t^2)}}{2}\right)(u-t)^2-\left(\dfrac{u^2+2}{2}\right)\sqrt{(1-u^2)}\right.\\ \left.\quad+\left(\dfrac{3ut-2t^2+2}{6}\right)\sqrt{(1-t^2)}+\tfrac{1}{2}u\left(arc(sin=t)-arc(sin=u)\right)\right\}.\\ y=r\,(u-t).\end{cases}$$

Die innere Wölblinie eines Spitzbogens umfafst in der Regel einen Bogen von 60^0 und ihre Richtung im Scheitel schliefst mit einer Horizontale einen Winkel von 30^0 ein. Nehmen wir die innere Wölblinie eines Brückenbogens mit horizontaler Bahn von der eben genannten Beschaffenheit an, dann wird, weil

$$t=sin\,30^0=0{,}5;\ \sqrt{(1-t^2)}=cos\,30^0=0{,}866025;$$
$$arc\,(sin=t)=\overset{\frown}{30^0}=0{,}523598 \text{ ist,}$$

$$\text{VI.}\begin{cases}\dfrac{Cx}{r}=\tfrac{1}{2}Q(u-0{,}5)+wr^2\left\{\left(\dfrac{h+0{,}866025}{2}\right)(u-0{,}5)^2-\left(\dfrac{u^2+2}{6}\right)\sqrt{(1-u^2)}\right.\\ \left.\quad+0{,}216506\,(u+1)-\tfrac{1}{2}u\,(arc\,(sin=u)-0{,}523598)\right\}.\\ y=r\,(u-0{,}5).\end{cases}$$

In allen entwickelten Gleichungen hängt der Werth der Abscisse der freien Stützlinie eines Brückenbogens vom Horizontaldruck C desselben ab. Die im Scheitel gedachte Last Q sei für einen Brükkenbogen mit einer elliptischen innern Wölblinie gleich o. Für diesen in der Regel bestehenden Fall ergiebt sich aus III.

$$(3)\begin{cases}x=\dfrac{A^2Bw}{C}\left\{\left(\dfrac{1+h}{2}\right)u^2-\left(\dfrac{2+u^2}{6}\right)\sqrt{(1-u^2)}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}u.arc(sin=u)\right\}.\\ y=Au.\end{cases}$$

Der Werth der Parenthese in der Gleichung für x ist unabhängig von C. Setzen wir

$$(4)\ N=\left(\frac{1+h}{2}\right)u^2-\left(\frac{2+u^2}{6}\right)\sqrt{(1-u^2)}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}u\,.\,arc\,(sin=u),$$

so wird

$$\begin{cases}x=\dfrac{A^2BwN}{C};\\ y=Au.\end{cases}$$

Mit dem C ändert sich die Abscisse x, und man erhält

$$x_1 = \frac{A^2BwN}{C_1}, \text{ also}$$

$$\text{VII. } x : x_1 = C_1 : C \text{ für}$$
$$y = Au \text{ d. h.}$$

Für dieselbe Ordinate $y' = PK$ der freien Stützlinie eines Brückenbogens Fig. 58 mit einer elliptischen innern Wölblinie ändert sich die zugehörende Abscisse $TK = x$ im umgekehrten Verhältnisse der Horizontaldrücke. Hieraus folgt, dafs, wenn TPO die freie Stützlinie des Brückenbogens Fig. 58 für irgend einen Horizontaldruck ist, daraus sehr leicht die freie Stützlinie desselben Bogens für einen m-mal so grofsen Horizontaldruck gefunden wird, wenn man für eine beliebige Ordinate PK die Abscisse Tk des über P liegenden Punctes p der zu bestimmenden freien Stützlinie als m^{ten} Theil von $TK = x$ nimmt. Eben so müssen alle die Linien

$Tbpo$, $Tdsv$ u. s. f.,

welche unterhalb der Horizontale durch T liegen, der Masse des Brückenbogens zugehörende freie Stützlinien sein, wenn in den Vertikalen durch a, q, U u. s. f.

$$(5)\quad \begin{cases} ab = m \,.\, ac;\; ad = n \,.\, ac; \\ qp = m \,.\, qP;\; qs = n \,.\, qP; \\ Uo = m \,.\, UO;\; Uv = n \,.\, UO \text{ etc. ist.} \end{cases}$$

Für den Endpunct O der freien Stützlinie TPO eines Brückenbogens Fig. 59 mit einer elliptischen innern Wölblinie sei die Abscisse

$$TU = X$$

gegeben und es gehe bei diesen Werthen die Parenthese in der Gleichung für x unter (3) über in M. Somit erhält man aus (3)

$$X = \frac{A^2BwM}{C}.$$

Durch Division mit dieser Gleichung in die für x unter (3) und durch Multiplication des Quotienten mit X wird

$$\text{VIII. } x = \frac{X}{M}\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)u^2 - \left(\frac{2+u^2}{6}\right)\sqrt{(1-u^2)} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\, u \,.\, arc\,(sin = u)\right\},$$

und es ist, wenn man die Ordinate des Endpunctes O der freien Stützlinie TPO

$$OU = Y = A \,.\, U \text{ setzt,}$$

$$(6)\; M = \left(\frac{1+h}{2}\right)U^2 - \left(\frac{2+U^2}{6}\right)\sqrt{(1-U^2)} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\, U \,.\, arc\,(sin = U).$$

Für den Horizontaldruck C der freien Stützlinie des Brückenbogens Fig. 60 in T und für den Bogen AB gleich $r\mu$, den das Perpendikel durch den Punct P der freien Stützlinie an der innern Wölblinie abschneidet, erhält man aus IV., wenn daselbst $Q = o$ gesetzt wird,

$$\text{X.}\quad x_\mu = \frac{wr^3}{C}\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)sin^2\mu - \left(\frac{2+sin^2\mu}{6}\right)cos\,\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\,\mu\, sin\,\mu\right\},$$

und ferner, wenn man auf einander folgend die zu 10, 20, 30 u. s. f. Grad gehörenden Bögen für den Radius 1 statt μ einsetzt:

$$x_{10} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}00003820 + 0{,}01507685\,h\right\};$$

$$x_{20} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0005769 + 0{,}05842889\,h\right\};$$

$$x_{30} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0026742 + 0{,}125\,h\right\};$$

$$x_{40} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0074461 + 0{,}2065880\,h\right\};$$

$$x_{50} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0153656 + 0{,}2934121\,h\right\};$$

$$x_{60} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0257168 + 0{,}375\,h\right\};$$

$$x_{70} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0364769 + 0{,}441511\,h\right\};$$

$$x_{80} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,0447796 + 0,4849232\,h\right\};$$

$$x_{90} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,0479351 + 0,5\,h\right\}.$$

Aus den vorstehenden Werthen bildet sich nachstehende Tabelle, wenn auf einander folgend 0,08; 0,09; 0,1; 0,11 etc., 0,25 statt h, d. i. die gesammte Höhe des Brückenbogens im Scheitel für den Radius 1 der innern Wölblinie, eingesetzt wird.

Am leichtesten erhält man die eben erwähnte Tabelle A, wenn man deren Vertikalspalten berechnet. Allgemein ist z. E. die Parenthese für x_{50}

$$0,0153656 + 0,2934121\,h,$$

woraus sich die mit x_{50} überschriebene Vertikalspalte so ableiten läſst:

	0,002934121 × 8
	0,023472968
	0,0153656
$h = 0,08$;	0,038838568
	0,002934121
$h = 0,09$;	0,041772689
$h = 0,1$;	0,044706810
	0,002934121
$h = 0,11$;	0,047640931
$h = 0,12$;	0,050575052
	0,002934121
$h = 0,13$;	0,053509173
$h = 0,14$;	0,056443294
	0,002934121
$h = 0,15$;	0,059377415
$h = 0,16$;	0,062311536
	0,002934121
$h = 0,17$;	0,065245657
$h = 0,18$;	0,068179778 etc.

Tabelle A. Werthe von $\frac{1}{2}(1+h)\sin^2\mu - \frac{1}{6}(2+\sin^2\mu)\cos\mu + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\mu\cos\mu$.

	x_{10}	x_{20}	x_{30}	x_{40}	x_{50}	x_{60}	x_{70}	x_{80}	x_{90}
$h=0,08$	0,0012443	0,0052512	0,0126742	0,0239731	0,0388388	0,0557168	0,0717978	0,0835734	0,0879351
$h=0,09$	0,0013951	0,0058355	0,0139242	0,0260390	0,0417727	0,0594668	0,0762129	0,0884227	0,0929351
$h=0,1$	0,0015459	0,0064198	0,0151742	0,0281049	0,0447068	0,0632168	0,0806280	0,0932719	0,0979351
$h=0,11$	0,0016966	0,0070041	0,0164242	0,0301708	0,0476409	0,0669668	0,0850431	0,0981212	0,1029351
$h=0,12$	0,0018474	0,0075884	0,0176742	0,0322367	0,0505750	0,0707168	0,0894582	0,1029704	0,1079351
$h=0,13$	0,0019982	0,0081726	0,0189242	0,0343025	0,0535092	0,0744668	0,0938733	0,1078196	0,1129351
$h=0,14$	0,0021489	0,0087569	0,0201742	0,0363684	0,0564433	0,0782168	0,0982884	0,1126688	0,1179351
$h=0,15$	0,0022997	0,0093412	0,0214242	0,0384343	0,0593774	0,0819668	0,1027035	0,1175181	0,1229351
$h=0,16$	0,0024505	0,0099255	0,0226742	0,0405002	0,0623115	0,0857168	0,1071187	0,1223673	0,1279351
$h=0,17$	0,0026013	0,0105098	0,0239242	0,0425661	0,0652456	0,0894668	0,1115338	0,1272165	0,1329351
$h=0,18$	0,0027520	0,0110941	0,0251742	0,0446319	0,0681798	0,0932168	0,1159489	0,1320658	0,1379351
$h=0,19$	0,0029028	0,0116784	0,0264242	0,0466978	0,0711139	0,0969668	0,1203640	0,1369150	0,1429351
$h=0,20$	0,0030536	0,0122627	0,0276742	0,0487637	0,0740480	0,1007168	0,1247791	0,1417642	0,1479351
$h=0,21$	0,0032043	0,0128469	0,0289242	0,0508296	0,0769821	0,1044668	0,1291942	0,1466135	0,1529351
$h=0,22$	0,0033551	0,0134312	0,0301742	0,0528955	0,0799163	0,1082168	0,1336093	0,1514627	0,1579351
$h=0,23$	0,0035058	0,0140155	0,0314242	0,0549613	0,0828504	0,1119668	0,1380244	0,1563119	0,1629351
$h=0,24$	0,0036566	0,0145998	0,0326742	0,0570272	0,0857845	0,1157168	0,1424395	0,1611612	0,1679351
$h=0,25$	0,0038074	0,0151841	0,0339242	0,0590931	0,0887186	0,1194668	0,1468546	0,1660104	0,1729351

Für die freie Stützlinie *TPO* eines Brückenbogens Fig. 60 mit horizontaler Brückenbahn, mit massiver Hintermauerung oder mit massiver Hinterfüllung und mit einer kreisförmigen innern Wölblinie *ABD* giebt uns die vorstehende Tabelle die Abscissen jener Puncte an, die in Perpendikeln *BN* durch Puncte *B* der innern Wölblinie liegen, deren Abstand *AB* vom Scheitel der innern Wölblinie auf einander folgend 10, 20, 30 ... 90 Grade beträgt. Diese Abscissen sind nach der vorstehenden Tabelle,

wenn die Scheitelhöhe $AM = rh = 0{,}08r$ beträgt,

$$x_{10} = 0{,}0012443 \frac{wr^3}{C}; \; x_{20} = 0{,}0052512 \frac{wr^3}{C}; \; x_{30} = 0{,}0126742 \frac{wr^3}{C} \text{ etc.,}$$

wenn die Scheitelhöhe $AM = rh = 0{,}1r$ beträgt,

$$x_{10} = 0{,}0015459 \frac{wr^3}{C}; \; x_{20} = 0{,}0064198 \frac{wr^3}{C}; \; x_{30} = 0{,}0151742 \frac{wr^3}{C} \text{ etc.,}$$

und, wenn die Scheitelhöhe $AM = rh = 0{,}25r$ ist,

$$x_{10} = 0{,}0038074 \frac{wr^3}{C}; \; x_{20} = 0{,}0151841 \frac{wr^3}{C}; \; x_{30} = 0{,}0339242 \frac{wr^3}{C} \text{ etc.}$$

Angenommmen, die freie Stützlinie habe im Scheitel *T* mit der innern Wölblinie des Bogens gleiche Krümmung, dann ist nach Seite 47

$$C = r \,.\, rh \,.\, w = r^2hw.$$

Die vorstehenden Werthe der Abscissen für die freie Stützlinie des Bogens Fig. 60 müssen folglich mit $0{,}08r^2w$, mit $0{,}1r^2w$, mit $0{,}25r^2w$ dividirt werden, wenn die Scheitelhöhe $0{,}08r$; $0{,}1r$; $0{,}25r$ beträgt. Hiernach wird

für eine Scheitelhöhe von $0{,}08r = rh$

$$x_{10} = 0{,}01555r; \; x_{20} = 0{,}06564r; \; x_{30} = 0{,}15842r;$$
$$x_{40} = 0{,}29966r; \; x_{50} = 0{,}48548r; \; x_{60} = 0{,}69646r;$$
$$x_{70} = 0{,}89747r; \; x_{80} = 1{,}04467r; \; x_{90} = 1{,}09919r;$$

für eine Scheitelhöhe von $0{,}1r = rh$

$$x_{10} = 0{,}015459r; \; x_{20} = 0{,}064198r; \; x_{30} = 0{,}151742r;$$
$$x_{40} = 0{,}281049r; \; x_{50} = 0{,}447068r; \; x_{60} = 0{,}632168r;$$
$$x_{70} = 0{,}806280r; \; x_{80} = 0{,}932719r; \; x_{90} = 0{,}979351r;$$

und für eine Scheitelhöhe von $0{,}25r = rh$

$x_{10} = 0,0152296r$; $x_{20} = 0,0607364r$; $x_{30} = 0,1356968r$;
$x_{40} = 0,2363724r$; $x_{50} = 0,3548744r$; $x_{60} = 0,4778672r$;
$x_{70} = 0,5874164r$; $x_{80} = 0,6640416r$; $x_{90} = 0,6917404r$.

Mittels der Abscissen der freien Stützlinie für einen Brückenbogen läfst sich diese selbst antragen. Um einen Fall zu erläutern, nehmen wir in Fig. 61 den Radius des Viertelkreises *AC* zu 1, *FA* = 0,08 an. Theilt man nun Bogen *AC* in 9 gleiche Theile, zieht durch alle Theilpuncte Perpendikel, trägt von einem Puncte *T* aus auf die Vertikale *TE* die Zahlenwerthe für x_{10}, x_{20}, x_{30} etc., führt ferner durch die so gefundenen Theilpuncte Horizontalen und durchschneidet damit auf einander folgend die vorher bestimmten Perpendikel: so müssen die gefundenen Durchschnittspuncte der gesuchten freien Stützlinie *TPO* des Brückenbogens Fig. 61 angehören. Aus der Verbindung dieser Puncte folgt offenbar eine mit der freien Stützlinie nahe zusammenfallende krumme Linie und mittels des nur gedachten Verfahrens muss sich die freie Stützlinie eines Brückenbogens für jede Scheitelhöhe aus den zugehörenden Abscissen genügend genau bestimmen lassen. In dieser Weise, und immer noch unter der Voraussetzung, die freie Stützlinie habe im Scheitel mit der innern Wölblinie gleiche Krümmung, erhält man für den Radius 1 der innern Wölblinie und für Scheitelhöhen von

0,8; 0,1; 0,12; 0,14; 0,16; 0,18; 0,2; 0,22; 0,24; 0,25

die zugehörenden freien Stützlinien so, wie sie die Figuren 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69 und 70 mit *TO* bezeichnet darstellen. Bei sämmtlichen Figuren liegt der Scheitel der freien Stützlinie 0,04 über dem Scheitel der innern Wölblinie.

In der Richtung der freien Stützlinie *TPO* Fig. 61 kann die Stüzzung der Wölbmasse deshalb nicht erfolgen, weil sie nicht durchgängig in der Masse des Stützbogens liegt; doch folgt hieraus noch keineswegs, dass die Stützung überhaupt nicht in einer freien Stützlinie statt haben könne, sondern nur, dass im vorliegenden Falle der Krümmungshalbmesser jener freien Stützlinie, die sich vom Scheitel ab innig an den Stützbogen anschmiegt, im Scheitel grösser sein müsse, als der Radius der innern Wölblinie.

Ziehen wir durch den Scheitel *T* Fig. 61 eine Horizontale *TR* und verlängern bis zu dieser hin die Perpendikel durch beliebige Puncte *S*, *P*, *O* der angetragenen freien Stützlinie *TSPO*, dann ist nach

Seite 198 neben dieser auch $TS_1P_1O_1$ eine der Massenanordnung des Brückenbogens zugehörende freie Stützlinie, wenn stattfindet

$$US : US_1 = QP : QP_1 = RO : RO_1 \text{ u. s. f.}$$

Diese Proportionalität ist durch Construction sehr leicht herzustellen, wenn man zwischen die Schenkel GEG_1 eines Winkels mit den Abscissen US, QP, RO etc. Kreisbögen beschreibt, und US_1, QP_1 etc. den Chorden HH_1, GG_1 etc. gleich macht; denn bekanntlich ist

$$EH : HH_1 = EG : GG_1 \text{ etc. d. g.}$$

$$US : US_1 = QP : QP_1 \text{ etc.}$$

Durch ein Verfahren, wie das eben angedeutete ist, lassen sich aus der freien Stützlinie eines Bogens, welche Krümmung man auch für dieselbe im Scheitel angenommen habe, beliebig viel andere für dieselbe Massenanordnung durch Construction aufsuchen; es wird folglich auch für einen Bogen wie Fig. 61 eine freie Stützlinie $TS_1P_1O_1$ zu bestimmen sein, die noch am innigsten mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens vom Scheitel ab zusammenfällt. In der Richtung dieser freien Stützlinie nun wird die Masse des Gewölbes durchgängig, oder doch vom Scheitel ab bis zu einem gewissen Puncte hin erfolgen und von der Krümmung eben dieser freien Stützlinie im Scheitel wird der Horizontaldruck, sowie der von der Masse herrührende Bogendruck, abhängen. Gesetzt, es sei P_1 Fig. 61 ein Punct, z. E. in der mittlern Wölblinie, durch welchen die der Massenanordnung des ganzen Brückenbogens zugehörende freie Stützlinie gehen soll. Nach X. ist die Abscisse TW des Punctes P mit

$$x = \frac{wr^3}{C} N$$

und die Abscisse TV des vertikal über P liegenden Punctes P_1 einer zweiten freien Stützlinie mit

$$x_1 = \frac{wr^3}{C_1} N$$

darzustellen. Aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{x}{x_1} = \frac{C_1}{C}; \quad C_1 = \frac{Cx}{x_1}.$$

Für die freie Stützlinie $TSPO$ war die Scheitelkrümmung gleich der der innern Wölblinie angenommen und für diese ist deshalb

$$C = r\,.\,rhw,$$ also auch

$$\text{XI. } C = \frac{x}{x_1} r^2 hw.$$

Demnach kann für die freie Stützlinie eines Brückenbogens, die durch einen bestimmten Punct P_1 hindurchgehen soll, der zugehörende Horizontaldruck C_1 im Scheitel immer aus dem Krümmungshalbmesser einer vorläufig bestimmten Stützlinie, aus der Abscisse TW eines Punctes P der letztern, der vertikal unter oder über P_1 liegt, und aus der Abscisse TV des Punctes P_1 gefunden werden. Ueberdiess zeigt uns die Formel XI., dass der Horizontal- oder Scheiteldruck der freien Stützlinie eines Brückenbogens grösser oder kleiner wird, als der einer vorläufig bestimmten, je nachdem jene ober- oder unterhalb der letztern liegt. Aber auch ohne eine vorläufig ermittelte freie Stützlinie eines Brückenbogens lässt sich der Horizontaldruck der freien Stützlinie finden, die durch einen vorgeschriebenen Punct P_1 hindurchgehen soll. Denn bezeichnen wir die lothrechte Abscisse TV des gegebenen Punctes P_1 mit x_μ, den Radius der innern Wölblinie mit r und den Bogen der letztern für den Radius 1 mit μ, der zwischen dem Scheitel A und dem Perpendikel durch P_1 liegt, dann ist nach X.

$$\text{XII. } C = \frac{wr^3}{x_\mu}\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\mu\sin\mu\right\}.$$

Die in den Figuren 61, 62, 63, 64 etc. und 70 für die Scheitelhöhe 0,08; 0,1; 0,12; 0,14 etc. und 0,25 dargestellten freien Stützlinien, für welche sämmtlich der Krümmungshalbmesser im Scheitel dem Radius 1 der innern Wölblinie gleich ist, nähern sich dem durch den Scheitel T concentrisch zur innern Wölblinie gezogenen Kreisbogen mit der Zunahme der Scheitelhöhe rh. Die grösste Näherung findet, wie die Figuren 68, 69 und 70 zeigen, bei Scheitelhöhen von 0,22; 0,24 und 0,25 statt. Diese Beziehung lehrt uns,

dass die freie Stützlinie eines Brückenbogens mit einer kreisförmigen innern Wölblinie, welche sich einem der letztern concentrischen Kreisbögen möglichst nähern soll, von 0,08r bis zu etwa 0,24r Scheitelhöhe hin, im Scheitel einen Krümmunghalbmesser grösser als r, dagegen für Schei-

telhöhen grösser als 0,24r im Scheitel einen Krümmungshalbmesser kleiner als r hat.

Wenn aber mit der Zunahme der Scheitelhöhe eines Bogens der Krümmungshalbmesser ϱ der sich am innigsten an die mittlere Wölblinie anschliessenden freien Stützlinie abnimmt, der gesammte Horizontalschub aber mit der Höhe rh wächst, so wird aus

$$C = \varrho rhw$$

folgen, dass der Scheiteldruck oder Horizontalschub eines kreisförmigen Brückenbogens nicht im Verhältnisse der Höhe rh, sondern langsamer als diese wächst oder, was dasselbe ist, für den nämlichen Radius r der innern Wölblinie wird die doppelte, dreifache etc. Scheitelhöhe nicht auch einen doppelt, dreimal etc. so grossen Scheiteldruck C hervorbringen.

Für den Brückenbogen Fig. 71 mit massiver Hinter- und Uebermauerung sei die Grundform des Stützbogens kreisförmig, der Radius der innern Wölblinie r und die ganze Scheitelhöhe $rh = 0{,}22r$. Die der Massenanordnung zugehörende freie Stützlinie, wenn deren Krümmung im Scheitel mit der der innern Wölblinie gleich genommen wird, ergiebt sich, bei Anwendung des auf Seite 203 dargestellten Verfahrens, zu TO. Nehmen wir den concentrisch zu AB durch den Scheitel T der freien Stützlinie gezogenen Kreisbogen TC als mittlere Wölblinie an, dann läfst sich, nach Seite 204, aus der freien Stützlinie TO eine zweite TO_1 durch Construction finden, die vom Scheitel T ab bis zu einem Puncte R hin, über dem Kreisbogen TC liegend, sich diesem am meisten nähert. Die Zeichnung läfst es unentschieden, ob die eben genannte freie Stützlinie in P, Q oder in R mit der mittlern Wölblinie zusammenfällt, oder ob sich der eigentliche Berührungspunct mit der letztern innerhalb der Puncte P und R befindet. Gemäfs der Zeichnung liegt

der Punct P in dem Perpendikel durch einen Punct der innern Wölblinie, der vom Scheitel um 30^0 absteht, und die Abscisse eben dieses Punctes beträgt 0,12r;

ferner liegt der Punct Q in einem Perpendikel, das, auf der innern Wölblinie gemessen, von deren Scheitel um 40^0 entfernt liegt, und die ihm zugehörende Abscisse ist 0,22r. Der

Punct R endlich befindet sich in einem Perpendikel, das von der innern Wölblinie bis zum Scheitel hin einem Win-

kel von 50^0 zugehört. Die Abscisse eben dieses Punctes ist $0{,}333r$.

Für den Punct P Fig. 71 wird in XII.

μ = dem Bogen für den Radius 1, der zu 30^0 gehört,

$h = 0{,}22$ und $x_\mu = 0{,}12r$.

Die Parenthese der Gleichung XII. wird, wegen vorstehender Werthe nach der Tabelle A auf Seite 201 zu 0,0301742. Nach XII. ist somit der Horizontaldruck der freien Stützlinie des Bogens Fig. 71, die durch den Punct P hindurch geht,

$$C = \frac{wr^3 \,.\, 0{,}0301742}{0{,}12r} = 0{,}25145\, wr^2.$$

Wie eben angeführt, erhält man ferner für die freie Stützlinie des Brückenbogens Fig. 71, die durch den Punct Q geht,

$$C = \frac{wr^3\, 0{,}0528955}{0{,}22r} = 0{,}24043\, wr^2,$$

und für jene, die durch den Punct R geht,

$$C = \frac{wr^3 \,.\, 0{,}0799163}{0{,}333r} = 0{,}23975\, wr^2.$$

Gehörten die Puncte P, Q und R der nämlichen freien Stützlinie des Brückenbogens Fig. 71 an, dann müfsten die eben gefundenen Horizontaldrücke gleich sein. Sie sind aber ungleich, folglich liegen jene nicht in derselben freien Stützlinie. Der Unterschied, namentlich der der zwei letztgefundenen Horizontaldrücke ist nur gering, so dafs der wahre Punct des Zusammenfalles der freien Stützlinie mit dem Kreisbogen TC sich in der Nähe der Puncte Q und R befinden wird. Die gefundenen Abweichungen haben in der mit der graphischen Darstellung unzertrennlichen Unsicherheit jener freien Stützlinie ihren Grund, welche sich vom Scheitel ab der mittlern Wölblinie des Stützbogens am meisten nähert.

Eben die freie Stützlinie TO_1, die sich vom Scheitel T aus der mittlern Wölblinie des Stützbogens noch am meisten nähert, entfernt sich von der letztern von einem Puncte R aus ziemlich rasch. Angenommen, es sei TRO_1 jene freie Stützlinie des Brückenbogens Fig. 71, welche sich vom Scheitel T ab der mittlern Wölblinie des Stützbogens wahrhaft am meisten nähert und in R mit ihrer Richtung zusammenfällt. Dafs die Masse des Brückenbogens innerhalb der

Perpendikel durch R und A in der Richtung der freien Stützlinie $TPQR$ zu stützen ist, unterliegt keinem Zweifel, doch ist zu fragen: ob die Stützung nur in der Richtung dieser freien Stützlinie stattfinden kann? Im Allgemeinen müssen wir diefs verneinen; denn der Stützbogen kann so lange die Masse des Brückenbogens stützen, so lange die freie Stützlinie nicht über jenen hinausfällt.

Eine freie Stützlinie ist auch TR_1O_2, welche die innere Wölblinie bei R_1 tangentirt und nach ihrer Richtung hin kann noch Stützung stattfinden. Erfolgt die Stützung in der Richtung dieser innersten Wölblinie, dann wird auch der Horizontalschub kleiner sein, als der von jeder andern Stützlinie, weil deren Krümmungshalbmesser im Scheitel kleiner ist, als der von jeder andern möglichen Stützungsrichtung.

Zwischen der innersten Stützlinie TR_1O_2 und der Horizontale TU sind noch unendlich viel freie Stützlinien denkbar, die der Massenanordnung des Brückenbogens entsprechen. In der Richtung aller dieser ist die Stützung möglich, doch wächst der Horizontalschub und der Druck in der Richtung dieser möglichen Stützungsrichtungen um so mehr, je mehr sich die Linie der freien Stützung der Horizontale TU nähert.

Die Zahlenwerthe jeder Horizontalspalte der Tabelle A auf Seite 201 können sofort oder nach Multiplication mit irgend einem Factor als Abscissen der freien Stützlinie eines Brückenbogens genommen werden, der bei horizontaler Brückenbahn eine kreisförmige innere Wölblinie hat. Denn die allgemeine Gleichung für die Abscissen der freien Stützlinie eines Brückenbogens von genannter Beschaffenheit ist

$$x_\mu = \frac{wr^3}{C}\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\mu\cos\mu\right\},$$

aus welcher, weil C jeden beliebigen Werth annehmen kann, folglich für $r = 1$ auch

$$\frac{w}{C} = 1$$

werden kann, folgt

$$x_\mu = \left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\mu\cos\mu.$$

Für die graphische Darstellung der vorläufigen Stützlinie eines Brückenbogens mit einer kreisförmigen innern Wölblinie bei horizontaler Brückenbahn wird es immer bequem sein, die Werthe jeder Horizontalspalte der Tabelle auf Seite 201 mit 10 multiplicirt als Abscissen anzunehmen. Die Höhe des Brückenbogens Fig. 64 ist 0,14 des Radius der innern Wölblinie. Für eben diese Höhe enthält die Tabelle auf Seite 201 in der Horizontalspalte, welcher $h = 0,14$ vorsteht,

$$x_{10} = 0,0021489; \; x_{20} = 0,0087569; \; x_{30} = 0,0201741 \text{ etc.}$$

Sämmtliche Werthe mit 10 multiplicirt, so erhält man:

$$x_{10} = 0,021489; \; x_{20} = 0,087569; \; x_{30} = 0,201742 \text{ etc.}$$

Alle diese Werthe von T Fig. 64 aus auf das Perpendikel CD getragen, durch die Theilpuncte Horizontalen geführt, bis sie die zwischen A und B gelegenen Perpendikel, welche um je 10^0 auf der innern Wölblinie vom Scheitel A aus von einander abstehen, schneiden und die Durchschnittspuncte verbunden, giebt TQ als eine freie Stützlinie des Brückenbogens. Aus dieser kann jede andere freie Stützlinie nach der auf Seite 198 angegebenen Construction abgeleitet werden.

Man hat immer die Absicht, mittels eines Stützbogens die zugehörenden Lasten nur nach seiner Richtung hin zu stützen. Im Mittel wird diese Richtung durch die der mittlern Wölblinie vertreten, die beabsichtigte Stützung also erreicht, wenn die freie Stützlinie wenigstens vom Scheitel ab mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens möglichst nahe zusammenfällt. Tritt aber diese Stüzzungsrichtung in der Wirklichkeit ein oder, wie ist sie herbeizuführen? Ein Stützbogen fängt an zu stützen, wie wir wissen, mit dem Eintreiben der Schlufssteine. Auf Seite 79 haben wir ferner gesehen, dafs sich Massen nur in der Richtung stützen können, nach welcher hin die geringste Verkürzung vorkommt. Endlich haben wir auf Seite 188 die Ueberzeugung gewonnen, dafs sich jeder kreisförmige Stützbogen vom Scheitel AH Fig. 71 aus bis zu einem gewissen Puncte R hin nothwendig in der Richtung einer freien Stützlinie stützen mufs. Mit Beachtung aller dieser Umstände gelangen wir zu dem Schlusse:

dafs sich ein Brückenbogen mit massiver Hintermauerung und mit einer kreisförmigen innern Wölblinie wenigstens vom Schei-

tel aus bis zu einem gewissen Puncte R hin sehr nahe in der Richtung jener freien Stützlinie stützt, die am innigsten mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens zusammenfällt, dafern die Lagerflächen der Wölbsteine auf der letztern winkelrecht stehen.

Die eben erwähnte Stützung würde vollständig in der Richtung der am innigsten an die mittlere Wölblinie des Stützbogens sich anschliefsenden freien Stützlinie geschehen, wäre es möglich, die Lagerflächen der Wölbsteine genau winkelrecht zur freien Stützlinie zu richten. Indem man sie winkelrecht gegen die mittlere Wölblinie des Stützbogens stellt, entsteht allerdings eine Abweichung, die indefs für die Praxis ohne alle Beachtung ist.

Der Punct R in der freien Stützlinie $TPQRO_1$ Fig. 71, bis zu welchem hin vom Scheitel ab die Massenstützung zuverlässig unter den angegebenen Umständen geschieht, kann kein anderer als der sein, in welchem die freie Stützlinie die mittlere Wölblinie des Stützbogens tangirt. Ob von hier ab die fernere Stützung in der Richtung RO_1 der freien Stützlinie, oder in der Richtung der mittlern Wölblinie RC erfolgt, das hängt von Umständen ab. Stehen die Lagerflächen der Wölbsteine winkelrecht auf der mittlern Wölblinie und ist überdiefs der Wölbbogen dichter gemauert, als dessen Hintermauerung: dann geschieht die Stützung von R aus in der Richtung RC der mittlern Wölblinie unter Absetzung von Horizontaldruck. Soll aber die Stützung auch von R aus in der Richtung der mittlern Wölblinie RO_1 statthaben, dann mufs der Stützbogen von R ab an Höhe zunehmen und es müssen überdiefs die Lagerflächen der Wölbsteine zwischen R und O_1 auf der Richtung der freien Stützlinie winkelrecht stehen. Für die Praxis wird es am bequemsten sein, den Stützbogen von R ab bis zu seinen Anfängen hin so zu gestalten, dafs seine mittlere Wölblinie als vorgeschriebene Stützlinie wirkt, also von R aus nach B hin Druck in ihrer Richtung fortpflanzt, d. h. nach ihrer Richtung hin, unter Abscheidung von Horizontaldruck, stützt.

Die Kenntnifs der Lage des Punctes R Fig. 71, in welchem die von T ausgehende freie Stützlinie $TPQRO_1$ den ebenfalls durch T gehenden und zur innern Wölblinie AFB concentrischen Kreis TRC tangirt, ist von Wichtigkeit. Es hängt von derselben die Beschaffenheit des Stützbogens zwischen R und T, der gesammte Horizon-

talschub, sowie das sichere Bestehen des ganzen Brückenbogens ab. Behufs der Bestimmung der Lage des Punctes *R* sei in Fig. 71 der Radius der innern Wölblinie des Brückenbogens gleich $AG = r$, der Radius des zum letztern concentrisch durch *T* gehenden Bogens $GT = \varrho$, ferner *R* der Punct im letztgenannten Bogen, in welchem die durch *T* gehende freie Stützlinie der Massenanordnung des Brückenbogens den zur innern Wölblinie concentrischen Bogen tangirt, überdiefs schneide das durch *P* gefällte Perpendikel an der innern Wölblinie den Bogen $AK = \mu$ und auf der mittlern Wölblinie des Stützbogens den Bogen ψ für den Radius 1 ab, und ferner endlich sei die Abscisse des Punctes *R* gleich $TX = x_\mu$.

Für die Scheitelhöhe *AF* des Brückenbogens gleich *rh* ist nach Seite 185 das Massengewicht zwischen den Perpendikeln durch *A* und *P*

$$W = wr^2 \left\{ (1+h) \sin\mu - \tfrac{1}{2} \sin\mu \cos\mu - \tfrac{1}{2} \mu \right\}.$$

Wenn in *P* die Richtung der freien Stützlinie mit der des Kreisbogens durch *T* zusammenfällt, dann ist nach II. Seite 15

$$tg\,\psi = \frac{W}{C} = \frac{wr^2}{C} \left\{ (1+h) \sin\mu - \tfrac{1}{2} \sin\mu \cos\mu - \tfrac{1}{2} \mu \right\}.$$

Nach X. Seite 199 ist

$$x_\mu = \frac{wr^3}{C} \left\{ \left(\frac{1+h}{2}\right) \sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right) \cos\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} \mu \sin\mu \right\}.$$

Mit Hinsicht auf die Figur und die gemachten Annahmen ist ferner

$$x_\mu = TG = \varrho - \varrho \cos\psi, \text{ also}$$

$$\varrho\,(1 - \cos\psi) = \frac{wr^3}{C} \left\{ \left(\frac{1+h}{2}\right) \sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right) \cos\mu \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} \mu \sin\mu \right\},$$

und wenn diese Gleichung durch $tg\,\psi$ dividirt wird

$$\text{XIII.} \quad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\varrho}{r}\left(\dfrac{1-\cos\psi}{tg\,\psi}\right) \\ = \dfrac{\varrho}{r} tg(\tfrac{1}{2}\psi)\cos\psi \end{array}\right\} = \frac{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\mu\sin\mu}{(1+h)\sin\mu - \tfrac{1}{2}\sin\mu\cos\mu - \tfrac{1}{2}\mu}.$$

Aus der Gleichung für x_μ folgt

$$\text{XIV. } C = \frac{wr^3}{\varrho(1-\cos\psi)}\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\,\mu\sin\mu\right\},$$

Die Beziehung endlich, die zwischen μ und ψ besteht, ist dargestellt durch

$$r\sin\mu = \varrho\sin\psi = PG \text{ d. g.}$$

$$\sin\psi = \frac{r}{\varrho}\sin\mu,$$

Es ist durchaus nicht nothwendig, dafs der Kreisbogen, an welchen sich die freie Stützlinie durch T in R unter gleicher Richtung an jenen anschliefst, auch durch den Punct T gehe. Nehmen wir den Kreisbogen, den die freie Stützlinie in R tangirt, noch concentrisch zur innern Wölblinie an und bezeichnen AT mit ξr, dann wird

$$TX = {}^x\mu = r + r\xi - \varrho\cos\psi.$$

Hiernach verwandelt sich XIII. in

$$\text{XV. } \frac{r+\xi-\varrho\cos\psi}{r\,tg\psi} = \frac{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\,\mu\sin\mu}{(1+h)\sin\mu - \tfrac{3}{4}\sin\mu\cos\mu - \tfrac{1}{2}\,\mu},$$

ferner XIV. in

$$\text{XVI. } C = \frac{wr^3}{r+\xi r-\varrho\cos\psi}\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\mu\sin\mu\right\},$$

und für die zwei letzten Gleichungen besteht immer noch

$$\sin\psi = \frac{r}{\varrho}\sin\mu.$$

Für den Punct R_1 Fig. 71, in welchem die innere Wölblinie von einer durch T gelegten freien Stützlinie tangirt wird, ergiebt sich aus den zwei zuletzt gefundenen Gleichungen, weil in diesen für die gemachten Voraussetzungen $\psi = \mu$ und $\varrho = r$ werden mufs,

$$\text{XVII. } \frac{1+\xi-\cos\mu}{tg\mu} = \frac{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^3\mu}{6}\right)\cos\mu + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\mu\sin\mu}{(1+h)\sin\mu - \frac{1}{2}\sin\mu\cos\mu - \frac{1}{2}\mu}$$

$$\text{XIIX. } C = \frac{wr^2}{1+\xi-\cos\mu}\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\mu\sin\mu\right\}.$$

Es kann endlich der Endpunct R der freien Stützlinie eines Brückenbogens Fig. 71, nämlich das dem Puncte R zugehörende μ und der perpendikulare Abstand Z des R vom Mittelpuncte G der innern Wölblinie und der Winkel ψ gegeben sein, den die Richtung der freien Stützlinie bei R mit einer Horizontale einschliefsen soll. Aus den Werthen für x_μ und $tg\psi$, welche auf Seite 211 angegeben sind, folgt

$$\text{XIX. } x_\mu = r\,tg\psi\left\{\frac{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\mu\sin\mu}{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin\mu - \frac{1}{2}\sin\mu\cos\mu - \frac{1}{2}\mu}\right\}.$$

Es ist

$$x_\mu = TX,$$

also

$$GT = Z + x_\mu;\ r + \xi r = Z + x_\mu, \text{ d. g.}$$

$$\text{XX. } \xi r = Z + x_\mu - r.$$

Der Auflösung aller vorstehenden Gleichungen mufs die Werthbestimmung der Ausdrücke

$$\frac{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\mu\sin\mu}{(1+h)\sin\mu - \frac{1}{2}\sin\mu\cos\mu - \frac{1}{2}\mu} = \frac{N}{O},$$

und

$$\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin\mu}{6}\right)\cos\mu + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\mu\sin\mu = N$$

vorausgehen. Um deren Berechnung zu umgehen und um die Benutzung der vorstehenden Gleichungen zu erleichtern, schliefsen wir die nachfolgenden Tabellen in einer Ausdehnung hier an, wie sie die Anwendung fordern dürfte.

In der Gleichung für $\frac{M}{N}$ nach einander den zu Bogen μ gehörenden Winkel zu 34, 36, 38^0 u. s. f. genommen, giebt

Tabelle B.

$$\angle \widehat{\mu} = 34^0,\ \frac{M}{N} = \frac{0{,}00421 + 0{,}15635\,h}{0{,}03069 + 0{,}55919\,h};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 36^0,\ \frac{M}{N} = \frac{0{,}00517 + 0{,}17274\,h}{0{,}03586 + 0{,}58778\,h};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 38^0,\ \frac{M}{N} = \frac{0{,}00624 + 0{,}18952\,h}{0{,}04147 + 0{,}61566\,h};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 40^0,\ \frac{M}{N} = \frac{0{,}00744 + 0{,}20659\,h}{0{,}04752 + 0{,}64279\,h};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 42^0,\ \frac{M}{N} = \frac{0{,}00878 + 0{,}22387\,h}{0{,}05388 + 0{,}66913\,h};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 44^0,\ \frac{M}{N} = \frac{0{,}01025 + 0{,}24127\,h}{0{,}06084 + 0{,}69466\,h};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 46^0,\ \frac{M}{N} = \frac{0{,}01187 + 0{,}25875\,h}{0{,}06807 + 0{,}71934\,h};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 48^0,\ \frac{M}{N} = \frac{0{,}01355 + 0{,}27613\,h}{0{,}07566 + 0{,}74314\,h};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 50^0,\ \frac{M}{N} = \frac{0{,}01537 + 0{,}29341\,h}{0{,}08351 + 0{,}76604\,h};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 52^0, \quad \frac{M}{N} = \frac{0{,}01729 + 0{,}31048\,h}{0{,}09169 + 0{,}78801\,h};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 54^0, \quad \frac{M}{N} = \frac{0{,}01930 + 0{,}32725\,h}{0{,}10001 + 0{,}80902\,h};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 56^0, \quad \frac{M}{N} = \frac{0{,}02139 + 0{,}34365\,h}{0{,}10855 + 0{,}82904\,h};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 58^0, \quad \frac{M}{N} = \frac{0{,}02354 + 0{,}35959\,h}{0{,}11720 + 0{,}84805\,h};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 60^0, \quad \frac{M}{N} = \frac{0{,}02572 + 0{,}37500\,h}{0{,}12591 + 0{,}86602\,h};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 62^0, \quad \frac{M}{N} = \frac{0{,}02902 + 0{,}38980\,h}{0{,}13464 + 0{,}88295\,h};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 64^0, \quad \frac{M}{N} = \frac{0{,}03013 + 0{,}40391\,h}{0{,}14326 + 0{,}89879\,h};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 66^0, \quad \frac{M}{N} = \frac{0{,}03231 + 0{,}41728\,h}{0{,}15180 + 0{,}91354\,h};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 68^0, \quad \frac{M}{N} = \frac{0{,}03443 + 0{,}42983\,h}{0{,}16011 + 0{,}92718\,h}.$$

In die vorstehenden Entwickelungen auf einander folgend 0,08; 0,09; 0,10 etc. 0,25 statt h gesetzt, giebt die folgende für den Gebrauch bequemere Tabelle.

Tabelle

Werthe für $\frac{P}{N} =$

h	$\angle\widehat{\mu} = 34^0$	$\angle\widehat{\mu} = 36^0$	$\angle\widehat{\mu} = 38^0$	$\angle\widehat{\mu} = 40^0$	$\angle\widehat{\mu} = 42^0$	$\angle\widehat{\mu} = 44^0$	$\angle\widehat{\mu} = 46^0$	$\angle\widehat{\mu} = 48^0$	$\angle\widehat{\mu} = 50^0$
0,08	0,22165	0,22910	0,23589	0,24223	0,24848	0,25386	0,25929	0,26379	0,26827
0,09	0,22564	0,23340	0,24046	0,24706	0,25351	0,25912	0,26472	0,26941	0,27404
0,10	0,22913	0,23715	0,24449	0,25133	0,25802	0,26691	0,26961	0,27447	0,27926
0,11	0,23219	0,24047	0,24805	0,25514	0,26204	0,26805	0,27401	0,27905	0,28399
0,12	0,23490	0,24343	0,25125	0,25836	0,26565	0,27185	0,27800	0,28322	0,28830
0,13	0,23733	0,24608	0,25411	0,26164	0,26892	0,27471	0,28164	0,28703	0,29227
0,14	0,23948	0,24845	0,25670	0,26443	0,27190	0,27693	0,28491	0,29053	0,29591
0,15	0,24144	0,25060	0,25906	0,26698	0,27462	0,28139	0,28801	0,29375	0,29928
0,16	0,24323	0,25258	0,26120	0,26931	0,27712	0.28407	0,29084	0,29672	0,30239
0,17	0,24485	0,25436	0,26316	0,27145	0,27941	0,28652	0,29344	0,29967	0,30528
0,18	0,24633	0,25599	0,26497	0,27341	0,28153	0,28878	0,29585	0,30203	0,30797
0,19	0,24767	0,25751	0,26664	0,27523	0,28348	0,29090	0,29809	0,30441	0,31048
0,20	0,24892	0,25889	0,26817	0,27691	0,28527	0,29286	0,30019	0,30664	0,31283
0,21	0,25009	0,26019	0,26961	0,27847	0,28699	0,29469	0,30214	0,30873	0,31503
0,22	0,25117	0,26139	0,27094	0,27994	0,28858	0,29641	0,30397	0,31068	0,31709
0,23	0.25217	0,26251	0,27217	0,28130	0,29004	0,29800	0,30569	0,31252	0,31904
0,24	0,25308	0,26354	0,27335	0,28257	0,29145	0,29949	0,30730	0,31424	0,32088
0,25	0,25396	0,26451	0,27442	0,28377	0,29276	0,30093	0,30882	0,31587	0,32261

C.

$$\frac{\tfrac{1}{2}(1+h)\,sin^2\,\mu - \tfrac{1}{6}(2+sin^2\,\mu)\,cos\,\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\,\mu\,sin\,\mu.}{(1+h)\,sin\,\mu - \tfrac{1}{2}\,sin\,\mu\,cos\,\mu - \tfrac{1}{2}\,\mu.}$$

$L\widehat{\mu} = 52^0$	$L\widehat{\mu} = 54^0$	$L\widehat{\mu} = 56^0$	$L\widehat{\mu} = 58^0$	$L\widehat{\mu} = 60^0$	$L\widehat{\mu} = 62^0$	$L\widehat{\mu} = 64^0$	$L\widehat{\mu} = 66^0$	$L\widehat{\mu} = 68^0$
0,27226	0,27607	0,27953	0,28266	0,28547	0,29329	0,29022	0,29279	0,29374
0,27817	0,28209	0,28565	0,28886	0,29174	0,29940	0,29659	0,29855	0,30020
0,28352	0,28756	0,29123	0,29454	0,29749	0,30503	0,30119	0,30448	0,30619
0,28841	0,29257	0,29635	0,29975	0,30280	0,31022	0,30794	0,31001	0,31176
0,29288	0,29716	0,30105	0,30407	0,30771	0,31504	0,31300	0,31517	0,31695
0,29698	0,30139	0,30539	0,30902	0,31226	0,31952	0,31772	0,31992	0,32180
0,30062	0,30531	0,30949	0,31316	0,31649	0,32369	0,32211	0,32438	0,32633
0,30427	0,30964	0,31316	0,31700	0,32044	0,32758	0,32698	0,32857	0,33168
0,30751	0,31232	0,31664	0,32057	0,32412	0,33123	0,33008	0,33250	0,33457
0,31054	0,31544	0,31990	0,32395	0,32757	0,33464	0,33370	0,33699	0,33834
0,31335	0,31838	0,32294	0,32709	0,33081	0,33785	0,33710	0,33968	0,34190
0,31598	0,32112	0,32579	0,33005	0,33385	0,34087	0,34031	0,34296	0,34526
0,31854	0,32370	0,32847	0,33283	0,33672	0,34373	0,34335	0,34609	0,34844
0,32076	0,32594	0,33100	0,33545	0,33943	0,34644	0,34622	0,34902	0,35144
0,32294	0,32840	0,33338	0,33792	0,34199	0,34900	0,34898	0,35180	0,35431
0,32500	0,33055	0,33563	0,34026	0,34442	0,35139	0,35154	0,35444	0,35700
0,32693	0,33259	0,33777	0,34246	0,34672	0,35370	0,35399	0,35617	0,35959
0,32876	0,33451	0,33976	0,34457	0,34890	0,35588	0,35631	0,35937	0,36205

Tabelle

Werthe von $\left(\frac{1+h}{2}\right) sin^2 \mu$

h	$L\widehat{\mu} = 34^0$	$L\widehat{\mu} = 36^0$	$L\widehat{\mu} = 38^0$	$L\widehat{\mu} = 40^0$	$L\widehat{\mu} = 42^0$	$L\widehat{\mu} = 44^0$	$L\widehat{\mu} = 46^0$	$L\widehat{\mu} = 48^0$	$L\widehat{\mu} = 50^0$
0,08	0,00156	0,01899	0,02140	0,02397	0,02669	0,02955	0,03257	0,03564	0,03884
0,09	0,01828	0,02072	0,02330	0,02603	0,02893	0,03197	0,03516	0,03840	0,04178
0,10	0,01984	0,02244	0,02520	0,02810	0,03117	0,03438	0,03774	0,04116	0,04471
0,11	0,02141	0,02417	0,02709	0,03016	0,03341	0,03679	0,04033	0,04392	0,04765
0,12	0,02297	0,02590	0,02898	0,03223	0,03564	0,03920	0,04292	0,04669	0,05058
0,13	0,02453	0,02763	0,03088	0,03430	0,03788	0,04162	0,04551	0,04945	0.05351
0,14	0,02610	0,02935	0,03277	0,03636	0,04012	0,04403	0,04809	0,05221	0,05645
0,15	0,02766	0,03108	0,03467	0,03843	0,04236	0,04644	0,05068	0,05497	0,05938
0,16	0,02923	0,03281	0,03656	0,04049	0,04460	0,04885	0,05327	0,05773	0,06232
0,17	0,03079	0,03454	0,03846	0,04256	0,04684	0,05127	0,05586	0,06049	0,06525
0,18	0,03235	0,03626	0,04035	0,04463	0,04908	0,05368	0,05844	0,06325	0,06818
0,19	0,03392	0,03799	0,04225	0,04669	0,05131	0,05609	0,06103	0,06602	0,07112
0,20	0,03548	0,03972	0,04414	0,04876	0,05355	0,05851	0,06362	0,06878	0,07405
0,21	0,03704	0,04145	0,04604	0,05082	0,05579	0,06092	0,06621	0,07154	0,07699
0,22	0,03861	0,04312	0,04793	0,05289	0,05803	0,06333	0,06879	0,07430	0,07992
0,23	0,04017	0,04490	0,04983	0,05496	0,06027	0,06574	0,07138	0,07706	0,08286
0,24	0,04173	0,04663	0,05173	0,05702	0,06251	0,06816	0,07397	9,07982	0,08579
0,25	0,04330	0,04836	0,05362	0,05909	0,06475	0,07057	0,07656	0,08258	0,08872

D.

$$-\left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\,\mu\sin\mu.$$

$L\widehat{\mu} = 52^0$	$L\widehat{\mu} = 54^0$	$L\widehat{\mu} = 56^0$	$L\widehat{\mu} = 58^0$	$L\widehat{\mu} = 60^0$	$L\widehat{\mu} = 62^0$	$L\widehat{\mu} = 64^0$	$L\widehat{\mu} = 66^0$	$L\widehat{\mu} = 68^0$
0,04213	0,04548	0,04888	0,05231	0,05572	0,06020	0,06244	0,06569	0,06882
0,04523	0,04875	0,05232	0,05590	0,05947	0,06410	0,06648	0,06986	0.07312
0,04834	0,05203	0,05576	0,05950	0,06322	0,06800	0,07052	0,07404	0,07741
0,05144	0,05530	0,05919	0,06310	0,06697	0,07190	0,07456	0,07821	0,08171
0,05455	0,05857	0,06263	0,06669	0,07072	0,07579	0,07860	0,08238	0,08601
0,05765	0,06184	0,06607	0,07029	0,07447	0,07970	0,08264	0,08656	0,09031
0,06076	0,06512	0,06950	0,07388	0,07822	0,08359	0,08668	0,09073	0,09461
0,06386	0,06839	0,07294	0,07748	0,08197	0,08749	0,09072	0,09490	0,09891
0,06697	0,07166	0,07637	0,08108	0,08572	0,09139	0,09476	0,09908	0,10320
0,07007	0,07493	0,07981	0,08467	0,08947	0,09529	0,09879	0,10325	0,10750
0,07318	0,07821	0,08325	0,08827	0,09322	0,09918	0,10283	0,10742	0,11180
0,07628	0,08148	0,08668	0,09186	0,09697	0,10308	0,10687	0,11159	0,11610
0,07939	0,08475	0,09012	0,09546	0,10072	0,10698	0,11091	0,11577	0,12040
0,08249	0,08802	0,09356	0,09905	0,10447	0,11088	0,11495	0,11994	0,12470
0,08560	0,09130	0,09699	0,10265	0,10822	0,11477	0,11899	0,12411	0,12899
0,08870	0,09457	0,10043	0,10625	0,11197	0,11867	0,12303	0,12828	0,13329
0,09181	0,09784	0,10387	0,10984	0,11572	0,12257	0,12707	0,13246	0,13759
0,09491	0,10111	0,10730	0,11344	0,11947	0,12647	0,13111	0,13663	0,14189

Tabelle

Werthe für ψ in der Formel

ϱ	$L\widehat{\mu} = 34^0$	$L\widehat{\mu} = 36^0$	$L\widehat{\mu} = 38^0$	$L\widehat{\mu} = 40^0$	$L\widehat{\mu} = 42^0$	$L\widehat{\mu} = 44^0$	$L\widehat{\mu} = 46^0$	$L\widehat{\mu} = 48^0$	$L\widehat{\mu} = 50^0$
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1	34 0 0	36 0 0	38 0 0	40 0 0	42 0 0	44 0 0	46 0 0	48 0 0	50 0 0
1,01	33 37 6	35 35 20	37 33 29	39 31 32	41 29 28	43 27 17	45 24 56	47 22 25	49 19 43
1,02	33 14 44	35 11 16	37 7 39	39 3 26	40 59 47	42 55 29	44 50 55	46 46 1	48 40 45
1.03	33 52 51	34 47 48	36 42 27	38 36 49	40 30 52	42 24 34	44 17 52	46 10 42	48 3 1
1,04	32 31 43	34 24 52	36 17 52	38 10 29	40 2 43	41 54 30	43 45 45	45 36 26	47 26 27
1,05	32 10 44	34 2 30	35 53 53	37 44 50	39 35 18	41 25 14	43 14 32	45 3 10	46 51 0
1,06	33 50 22	33 40 38	35 30 28	37 19 48	39 8 34	40 56 43	42 44 10	44 30 50	46 16 35
1,07	31 30 21	33 19 16	35 7 36	36 55 21	38 42 3	40 28 56	42 14 36	43 59 23	45 43 10
1,08	31 10 56	32 58 23	34 45 15	36 31 30	38 17 4	40 1 52	41 45 48	43 28 47	45 10 49
1,09	30 51 55	32 37 58	34 23 25	36 8 12	37 52 14	39 35 27	41 17 44	42 59 0	44 39 5
1,10	30 33 16	32 17 59	34 2 4	35 45 26	37 28 0	39 9 41	40 50 23	42 29 59	44 8 21
1,11	30 15 1	31 58 27	33 41 12	35 23 11	37 4 20	38 44 32	40 23 42	42 1 42	43 38 26
1,12	29 57 8	31 39 19	33 20 47	35 1 26	36 41 12	38 19 59	39 57 40	41 34 8	43 9 16
1,13	29 39 38	31 20 36	33 0 48	34 40 9	36 18 35	37 55 59	39 32 15	41 7 15	42 40 51
1,14	29 22 29	31 2 16	32 41 14	34 19 21	35 56 28	37 32 33	39 7 26	40 41 1	42 13 9
1,15	29 5 41	30 44 18	32 22 6	33 58 58	35 34 52	37 9 38	38 43 11	40 15 24	41 46 7
1,16	28 49 13	30 26 42	32 3 20	33 39 2	35 13 42	36 47 14	38 19 30	39 50 23	41 19 45
1,17	28 33 4	30 9 27	31 44 58	33 19 31	34 53 0	36 25 18	37 50 10	39 25 56	40 53 59
1,18	28 17 14	29 52 33	31 26 58	33 0 24	34 32 44	36 3 52	37 33 40	39 2 3	40 28 50
1,19	28 1 42	29 35 58	31 9 20	32 41 40	34 12 53	35 42 52	37 11 31	38 38 42	40 4 15
1,20	27 46 28	29 19 44	30 52 2	32 23 18	33 53 26	35 22 19	36 49 50	38 15 51	39 40 13

E.

$$\frac{1}{\varrho} \sin \mu = \sin \psi.$$

$\angle \widehat{\mu} = 52^0$	$\angle \widehat{\mu} = 54^0$	$\angle \widehat{\mu} = 56^0$	$\angle \widehat{\mu} = 58^0$	$\angle \widehat{\mu} = 60^0$	$\angle \widehat{\mu} = 62^0$	$\angle \widehat{\mu} = 64^0$	$\angle \widehat{\mu} = 66^0$	$\angle \widehat{\mu} = 68^0$
° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
52 0 0	54 0 0	56 0 0	58 0 0	60 0 0	62 0 0	64 0 0	66 0 0	68 0 0
51 16 47	53 13 35	55 10 4	57 6 12	59 1 54	60 57 4	62 51 36	64 45 22	66 38 10
50 35 3	52 28 52	54 22 7	56 14 42	58 6 28	59 57 19	61 47 2	63 35 23	65 22 5
49 54 44	51 45 45	53 35 59	55 25 16	57 13 29	59 0 25	60 45 50	62 29 27	64 10 54
49 15 43	51 4 8	52 51 32	54 37 48	56 22 44	58 6 6	59 47 40	61 27 4	63 3 55
48 37 57	50 23 53	52 8 40	53 52 13	55 34 0	57 14 8	58 52 11	60 27 49	62 0 37
48 1 26	49 44 57	51 27 15	53 8 4	54 47 10	56 24 18	57 59 10	59 31 24	61 0 35
47 25 50	49 7 15	50 47 13	52 25 34	54 2 4	55 36 26	57 8 22	58 37 31	60 3 27
46 51 22	48 30 42	50 8 28	51 44 31	53 18 34	54 50 23	56 19 37	57 45 57	59 8 56
46 17 53	47 55 14	49 30 56	51 4 48	52 36 35	54 6 0	55 32 46	56 56 30	58 16 48
45 45 21	47 20 49	48 54 34	50 26 22	51 56 0	53 23 12	54 47 58	56 8 59	57 26 50
45 13 42	46 47 22	48 19 15	49 49 7	51 16 45	52 41 51	54 4 8	55 23 15	56 38 50
44 42 54	46 14 52	47 44 58	49 13 0	50 38 44	52 1 52	53 22 8	54 39 12	55 52 40
44 12 55	45 43 14	47 11 39	48 37 57	50 1 52	51 23 10	52 41 32	53 56 40	55 8 12
43 43 41	45 12 27	46 39 16	48 3 54	49 26 7	50 45 40	52 2 16	53 15 35	54 25 17
43 15 14	44 42 29	46 7 44	47 39 28	48 51 24	50 9 18	51 24 13	52 35 51	53 43 51
42 47 26	43 13 16	45 37 3	46 58 36	48 17 40	49 34 0	50 47 20	51 57 22	53 3 40
42 20 20	43 44 47	45 7 9	46 27 16	47 44 52	48 59 43	50 11 33	51 20 5	52 24 59
41 53 52	43 17 0	44 38 2	45 56 46	47 12 58	48 26 24	49 36 48	50 43 54	51 47 24
41 28 3	42 49 54	44 9 38	45 27 2	46 41 54	47 53 59	49 3 2	50 8 47	51 10 57
41 2 48	42 23 26	43 41 54	44 58 3	46 11 38	47 22 26	48 30 12	49 34 40	50 35 34

Tabelle

Werthe der Formel $\varrho \; tg \; \frac{1}{2} \psi \; cos \; \psi$,

ϱ	$\angle\widehat{\mu} = 34^0$	$\angle\widehat{\mu} = 36^0$	$\angle\widehat{\mu} = 38^0$	$\angle\widehat{\mu} = 40^0$	$\angle\widehat{\mu} = 42^0$	$\angle\widehat{\mu} = 44^0$	$\angle\widehat{\mu} = 46^0$	$\angle\widehat{\mu} = 48^0$	$\angle\widehat{\mu} = 50^0$
1	0,25346	0,26287	0,27133	0,27882	0,28527	0,29063	0,29486	0,29792	0,29974
1,01	0,25408	0,26362	0,27224	0,27991	0,28656	0,29217	0,29669	0,30006	0,30226
1,02	0,25468	0,26434	0,27311	0,28092	0,28783	0,29364	0,29842	0,30211	0,30465
1,03	0,25525	0,26504	0,27395	0,28195	0,28899	0,29509	0,30008	0,30404	0,30692
1,04	0,25582	0,26570	0,27475	0,28292	0,29013	0,29639	0,30165	0,30589	0,30907
1,05	0,25633	0,26635	0,27553	0,28383	0,29123	0,29758	0,30317	0,30765	0,31112
1,06	0,25685	0,26697	0,27627	0,28472	0,29228	0,29892	0,30460	0,30934	0,31308
1,07	0,25734	0,26757	0,27699	0,28557	0,29326	0,30010	0,30600	0,31095	0,31495
1,08	0,25782	0,26815	0,27754	0,28640	0,29426	0,30124	0,30732	0,31249	0,31673
1,09	0,25829	0,26871	0,27835	0,28719	0,29519	0,30233	0,30860	0,31397	0,31843
1,10	0,25874	0,26925	0,27899	0,28795	0,29602	0,30338	0,30982	0,31538	0,32006
1,11	0,25916	0,26977	0,27962	0,28869	0,29695	0,30439	0,31099	0,31674	0,32162
1,12	0,25959	0,27027	0,28022	0,28940	0,29779	0,30537	0,31212	0,31804	0,32312
1,13	0,25999	0,27076	0,28080	0,29008	0,29859	0,30630	0,31321	0,31928	0,32456
1,14	0,26039	0,27123	0,28136	0,29075	0,29937	0,30721	0,31426	0,32050	0,32594
1,15	0,26077	0,27169	0,28190	0,29138	0,30007	0,30808	0,31526	0,32166	0,32726
1,16	0,26114	0,27203	0,28243	0,29200	0,30084	0,30892	0,31624	0,32278	0,32854
1,17	0,26150	0,27251	0,28284	0,29260	0,30154	0,30973	0,31717	0,32385	0,32976
1,18	0,26184	0,27297	0,28343	0,29318	0,30222	0,31052	0,31808	0,32489	0,33095
1,19	0,26218	0,27338	0,28391	0,29374	0,30287	0,31118	0,31895	0,32589	0,33209
1,20	0,26251	0,27377	0,28437	0,29429	0,30351	0,31201	0,31980	0,32683	0,33318

F.

wenn $sin\,\psi = \frac{sin\,\mu}{\varrho}$.

$L\widehat{\mu} = 52^0$	$L\widehat{\mu} = 54^0$	$L\widehat{\mu} = 56^0$	$L\widehat{\mu} = 58^0$	$L\widehat{\mu} = 60^0$	$L\widehat{\mu} = 62^0$	$L\widehat{\mu} = 64^0$	$L\widehat{\mu} = 66^0$	$L\widehat{\mu} = 68^0$
0,30028	0,29949	0,29733	0,29374	0,28868	0,28209	0,27392	0,26414	0,25268
0,30324	0,30290	0,30138	0,29848	0,29423	0,28859	0,28156	0,27312	0,26328
0,30603	0,30622	0,30518	0,30291	0,29937	0,29458	0,28853	0,28124	0,27276
0,30867	0,30929	0,30875	0,30704	0,30416	0,30011	0,29493	0,28864	0,28129
0,31118	0,31220	0,31211	0,31092	0,30863	0,30526	0,30084	0,29541	0,28906
0,31356	0,31495	0,31528	0,31456	0,31281	0,31005	0,30631	0,30165	0,29615
0,31582	0,31755	0,31828	0,31800	0,31674	0,31496	0,31140	0,30742	0,30268
0,31797	0,32003	0,32111	0,32124	0,32043	0,31872	0,31614	0,31278	0,30870
0,32002	0,32238	0,32380	0,32431	0,32391	0,32265	0,32059	0,31758	0,31429
0,32198	0,32462	0,32636	0,32721	0,32720	0,32636	0,32474	0.32244	0,31950
0,32382	0,32679	0,32879	0,32996	0,33031	0,32986	0,32867	0,32682	0,32436
0,32564	0,32885	0,33110	0,33258	0,33326	0,33297	0,33238	0,33094	0,32892
0,32735	0,33075	0,33331	0,33507	0,33606	0,33631	0,33587	0,33481	0,33320
0,32899	0,33261	0,33513	0,33745	0,33872	0,33928	0,33918	0,33840	0,33723
0,33056	0,33439	0,33744	0,33972	0,34126	0,34211	0,34231	0,34193	0,34103
0,33207	0,33610	0,33936	0,34210	0,34368	0,34480	0,34529	0,34521	0,34463
0,33352	0,33774	0,34121	0,34395	0,34598	0,34736	0,34812	0,34833	0,34803
0,33492	0,33932	0,34298	0,34593	0,34819	0,34981	0,35082	0,35128	0,35126
0,33626	0,34083	0,34468	0,34782	0,35030	0.35214	0,35339	0,35410	0,35433
0,33755	0,34228	0,34631	0,34964	0,35232	0,35437	0,35584	0,35679	0,35726
0,33879	0,34368	0,34787	0,35139	0,35426	0,35651	0,35819	0.35935	0,36004

Mit Hilfe der vorstehenden Tabellen lassen sich die meisten Fragen, die auf die freie Stützlinie kreisförmiger Stützbögen mit massiver Hintermauerung und horizontaler Abgleichung Bezug haben, auflösen. Für den Brückenbogen Fig. 71 haben wir auf Seite 207 die mit der mittleren Wölblinie des Stützbogens am innigsten zusammenfallende freie Stützlinie der gesammten Massenanordnung durch Construction aufgesucht und den zugehörenden Horizontaldruck genähert bestimmt. Dieselbe Aufgabe können wir nun schärfer wie folgend durch Rechnung lösen. Für den Punct Q Fig. 71, in welchem die durch den Scheitel T der mittleren Wölblinie des Stützbogens hindurchgehende freie Stützlinie des ganzen Brückenbogens die mittlere Wölblinie tangirt, muss der erste Theil der Gleichung XIII. dem zweiten gleich sein. Den ersten Theil dieser Gleichung enthält die Tabelle F, den zweiten die Tabelle C. In Beziehung auf die Figur 71 ist

$$\varrho = 1{,}04\, r;\; h = 0{,}22.$$

Die Horizontalspalte für $\varrho = 1{,}04$ der Tabelle F und die Horizontalspalte für $h = 0{,}22$ der Tabelle C geben nun:

$\angle \widehat{\mu} = 38^0$;	$\angle \widehat{\mu} = 40^0$;	$\angle \widehat{\mu} = 42^0$,	$\angle \widehat{\mu} = 44^0$;
0,27475	0,28292	0,29013	0,29639
0,27094	0,27994	0,28858	0,29641

$\angle \widehat{\mu} = 46^0$
0,30165
0,30397 etc.

Diese Zusammenstellung zeigt, dass die Berührung der freien Stützlinie des Brückenbogens Fig. 71 mit der mittleren Wölblinie des Stützbogens s e h r n a h e in einem Perpendikel stattfindet, das vom Scheitel der inneren Wölblinie um 44^0 absteht. Der Stützbogen Fig. 71 wirkt demnach vom Scheitel bis zu einem Puncte Q als freier Stützbogen, welcher letztere in einem Perpendikel liegt, das vom Scheitel der inneren Wölblinie um 44^0 absteht, dagegen wird der übrige von Q nach B hin liegende Theil des Stützbogens in seiner Richtung unter Absetzung von Horizontaldruck, stützen.

Für die soeben näher bestimmte freie Stützlinie giebt die Formel XIV. den Scheitel- oder Horizontaldruck an. Dem Berührungs-

puncte Q der freien Stützlinie mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens entsprach nahezu

$\angle \widehat{\mu} = 44^0$. Ferner ist $\varrho = 1{,}04\, r$ und $h = 0{,}22$.

Bei diesen Werthen giebt uns die Tabelle D in der Kreuzung der Horizontalspalte 0,22 mit der Vertikalspalte $\angle \widehat{\mu} = 44^0$

$$\left(\frac{1+h}{2}\right) \sin \mu - \left(\frac{2+\sin^2 \mu}{6}\right) \cos \mu + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\, \mu \sin \mu = 0{,}06333$$

und überdiefs die Tabelle E in der Kreuzung der Horizontalspalte $\varrho = 1{,}04\, r$ mit der Vertikalspalte $\angle \widehat{\mu} = 44^0$.

$$\psi = 41^0\, 54'\, 30''.$$

Dem Brückenbogen Fig. 71, wenn dessen Stützung vom Scheitel ab bis zu Q hin in der mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens noch am innigsten zusammenfallenden freien Stützlinie erfolgt, entspricht nun nach XIV. ein Horizontalschub oder ein Scheiteldruck von

$$C = \frac{wr \times {}^3\, 0{,}06333}{1{,}04\, r\, (1 - \cos 41^0\, 54'\, 30'')} = 0{,}23807\, wr^2.$$

Die Differenz zwischen diesem Horizontalschub und jenem, den wir auf Seite 207 fanden, ist nur gering und weist nach, dass die dort gegebene Bestimmungsweise des Berührungspunctes der freien Stützlinie mit der mittlern Wölblinie eines Stützbogens für die Praxis genügend genau ist.

Durch den Scheitel T der mittlern Wölblinie vom Stützbogen des Brückenbogens Fig. 71 kann auch eine freie Stützlinie bestehen, welche die innere Wölblinie in einem Puncte R_1 tangirt. Für diesen Punct geht in der Gleichung XIII. ϱ in r, folglich auch

$$\frac{\varrho}{r}\, tg\, \tfrac{1}{2}\, \psi \cos \psi \text{ in } tg\, \tfrac{1}{2}\, \mu \cos \mu$$

über. Wie oben erhält man aus den Tabellen F und C für $\varrho = 1\, r$ und $h = 0{,}22$

$\angle \widehat{\mu} = 38^0$;	$\angle \widehat{\mu} = 40^0$;	$\angle \widehat{\mu} = 42^0$
0,27133	0,27882	0,28527
0,27094	0,27994	0,28858
0,00039;	— 0,00112;	— 0,00331.

Hiernach liegt der Berührungspunct einer freien Stützlinie des Brückenbogens Fig. 71 mit der innern Wölblinie in einem Perpendikel, das vom Scheitel der letztern um einen Winkel absteht, der zwischen 38^0 und 40^0, doch 38^0 näher als 40^0 liegt, und welcher zufolge der Differenz nahezu $38\frac{1}{2}^0$ beträgt.

Der nämliche Stützbogen mit einer kreisförmigen innern Wölblinie kann, bei horizontaler Richtung der Brückenbahn und bei massiver Hintermauerung und Ueberfüllung, im Scheitel verschieden hoch sein. Offenbar ändert sich mit der Höhe im Scheitel der Horizontaldruck, folglich der ganze Bogenschub, sowie die Entfernung vom Scheitel, innerhalb welcher der Stützbogen in der Richtung einer freien Stützlinie die Brückenbogenmasse stützt, welche sich der mittlern Wölblinie am innigsten anschliefst. Bei einem Verfahren, wie wir es oben zur Bestimmung des Berührungspunctes Q jener freien Stützlinie, die mit der mittleren Wölblinie des Stützbogens Fig. 71 am innigsten zusammenfällt, sowie zur Herleitung des zugehörenden Horizontaldruckes C, angewendet haben, erhalten wir, durchgängig $\varrho = 1{,}04\,r$ gesetzt, für

$h = 0{,}08$ den $\angle\widehat{\mu}$ zu nahe $66\frac{1}{2}^0$ und C zu nahe $0{,}12307\,wr^2$,
$h = 0{,}10$ „ $\angle\widehat{\mu}$ „ „ 63^0 „ C „ „ $0{,}13755\,wr^2$,
$h = 0{,}12$ „ $\angle\widehat{\mu}$ „ „ 60^0 „ C „ „ $0{,}15187\,wr^2$,
$h = 0{,}14$ „ $\angle\widehat{\mu}$ „ „ 57^0 „ C „ „ $0{,}16870\,wr^2$,
$h = 0{,}16$ „ $\angle\widehat{\mu}$ „ „ 54^0 „ C „ „ $0{,}18541\,wr^2$,
$h = 0{,}18$ „ $\angle\widehat{\mu}$ „ „ 51^0 „ C „ „ $0{,}20450\,wr^2$,
$h = 0{,}20$ „ $\angle\widehat{\mu}$ „ „ $47\frac{1}{2}^0$ „ C „ „ $0{,}22025\,wr^2$,
$h = 0{,}22$ „ $\angle\widehat{\mu}$ „ „ 44^0 „ C „ „ $0{,}23807\,wr^2$,
$h = 0{,}24$ „ $\angle\widehat{\mu}$ „ „ $40\frac{1}{2}^0$ „ C „ „ $0{,}25645\,wr^2$.

Nach der vorstehenden Zusammenstellung wächst der Scheiteldruck eines Brückenbogens mit der Zunahme der Scheitelhöhe, doch bedingt die doppelte Scheitelhöhe nicht einen doppelt so grossen, sondern kleinern Horizontalschub, dagegen nimmt der Abstand in Graden, bis zu welchem hin vom Scheitel eines Brückenbogens sich dessen Masse in der Richtung einer freien Stützlinie stützt, die sich am innigsten an die mittlere Wölblinie des Stützbogens anschliefst, mit der Zunahme der Scheitelhöhe ab.

Wir gehen nun zur Lösung einer Aufgabe über, für welche die

Formeln XIX. und XX. aufgestellt wurden. Der Brückenbogen, den die Figur 72 darstellt, habe eine kreisförmige innere Wölblinie, eine Scheitelhöhe $AH = 0,15$, eine horizontale Bahn und sei massiv hintermauert und überfüllt. Der Stützbogen soll vom Scheitel A aus bis zu einem Puncte R der mittlern Wölblinie, der in einem Perpendikel liegt, das vom Scheitel A der inneren Wölblinie um 30^0 absteht, in der Richtung einer freien Stützlinie die Masse des Brückenbogens stützen und in R die Richtung eines zur innern Wölblinie concentrischen Kreisbogens annehmen, dessen Radius $\varrho = 1,05\,r$ beträgt. Für die freie Stützlinie, die den eben gestellten Bedingungen entspricht, ist zunächst der Scheitel T aufzusuchen. Die eben angenommenen Werthe und die Bedeutung der Zeichen in den Formeln XIX. und XX. giebt

$$h = 0,15;\ \varrho = 1,05\,r;\ \angle\widehat{\mu} = 30^0;\ \sin\psi = \frac{r}{\varrho}\sin\mu;\ \psi = 28^0\,26'\,12'';$$

$Z = \varrho \cos\psi$. Ferner ist nach XIX.

$$30 = r\,tg\,\psi \frac{0,02142}{0,096695} = 0,11994\,r.$$

Nach XX. liegt der Scheitel T der freien Stützlinie

$$\xi = 1,05 \times \cos\psi + 0,11974 - 1 = 0,04325 = VT$$

über dem Scheitel A der innern Wölblinie, wenn deren Radius gleich 1 gesetzt wird.

Als Abscissen der freien Stützlinie eines Brückenbogens mit der Scheitelhöhe $h = 0,15$, die jedoch mit einem constanten Factor zu multipliciren sind, giebt uns die Tabelle A Seie 201

$$(1)\quad x_{10} = 0,0022997;\ x_{20} = 0,0093412;\ x_{30} = 0,0214242.$$

Die gestellten Bedingungen fordern für die Figur 72

$$x_{30} = 0,11994.$$

Die Werthe in (1) sind defshalb und nach Seite 198 mit einem Factor

$$\frac{0,11994}{0,0214242} = 5,5984$$

zu multipliciren. Geschieht diefs, so erhält man für die Figur 72

$$x_{10} = 0{,}012874;\ x_{20} = 0{,}052295;\ x_{30} = 0{,}11994.$$

Mit diesen Abscissen läfst sich die freie Stützlinie *TR* für den Brückenbogen Fig. 72 innerhalb der Perpendikel durch *A* und *R* antragen. Soll diese freie Stützlinie die mittlere Wölblinie des Stützbogens werden, dann ist dessen äussere Wölblinie *DE* so zu formen, dafs sie denselben Abstand von *TR* bekommt, den *AF* von der letztern hat.

Der Scheiteldruck *C* der freien Stützlinie *TR* Fig. 72 ist aus der allgemeinen Gleichung der freien Stützlinie eines Brückenbogens mit horizontaler Brückenbahn und mit massiver Hintermauerung und Ueberfüllung, nämlich aus der Gleichung X. Seite 199 abzuleiten, wenn daselbst

$$\angle \widehat{\mu} = 30^0;\ {}^{x}\mu = x_{30} = 0{,}11994 \text{ und } h = 0{,}15$$

gesetzt wird. Man erhält

$$C = \frac{wr^2}{0{,}11994}(0{,}02142) = 0{,}10713\, wr^2.$$

Wir gehen nun zur Bestimmung der freien Stützlinie von Brückenbögen über, die bei horizontaler Brückenbahn eine Ellipse zur innern Wölblinie haben und bei welcher der Raum innerhalb der genannten Begrenzung gleichmäfsig und mit gleichschwerem Materiale erfüllt ist. Für einen Brückenbogen, wie wir ihn eben bezeichneten, sei $HCAA_1$ Fig. 57 bis zum Scheitel A_1 hin die elliptische innere Wölblinie und *STPO* eine der Massenanreihung zwischen der letztern und der Brückenbahn *MDB* zugehörende freie Stützlinie. Der einem Puncte *P* dieser freien Stützlinie, welcher vertikal über dem Puncte C der inneren Wölblinie liegen soll, zugehörende lothrechte Abstand von ihrem Scheitel *S* sei $SK_1 = x$. Nach III. Seite 196 ist nun, wenn daselbst $Q = o$ gesetzt wird,

$$x = \frac{A^2Bw}{C}\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)u^2 - \left(\frac{2+u^2}{6}\right)\sqrt{(1-u^2)} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}u\,.\,arc\,sin = u)\right\};$$

in welcher Gleichung, gemäfs Seite 194, *uA* den horizontalen Ab-

stand PK_1 des Punctes P von der Vertikale durch den Scheitel S, B die halbe kleine Achse NA_1, A die halbe grosse Achse NH der elliptischen innern Wölblinie und C den Horizontaldruck der freien Stützlinie bezeichnet. Den aus N mit der halben grofsen Achse beschriebenen Vertikalkreis HU schneidet das durch C geführte Perpendikel in Q. Der horizontale Abstand QR dieses Punctes vom Scheitel S der freien Stützlinie mufs

$$PK_1 = CL_1$$

sein. Wird der Bogen QU für den Radius 1 mit μ dargestellt, dann ist aber

$$QR = NQ \sin \mu = A \sin \mu = CL_1 = Au \text{ d. g. } \sin \mu = u.$$

Hiernach verwandelt sich die obenstehende Gleichung in

$$\text{XXI.} \quad x\mu = \frac{A^2Bw}{C}\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \tfrac{1}{3} - \mu \sin\mu\right\}.$$

Diese Abscissengleichung der freien Stützlinie eines Brückenbogens mit einer elliptischen innern Wölblinie unterscheidet sich von der X. für eine kreisförmige innere Wölblinie Seite 199 nur durch den Coefficienten der Parenthese. Hier ist derselbe

$$\frac{A^2Bw}{C}, \text{ dort } \frac{r^3w}{C}.$$

Zufolge der Erörterungen auf Seite 198 giebt es auch für einen Brückenbogen mit einer elliptischen innern Wölblinie eine freie Stützlinie mit einem Horizontaldruck C, der den Factor

$$\frac{N^2Bw}{C}$$

der Gleichung XXI. in irgend eine Zahl, z. E. in 1, in ½ etc. verwandelt. Mit Bezugnahme hierauf erkennen wir nun, dafs ebenfalls mittels der Tabelle A. auf Seite 201 eine vorläufige Stützlinie eines Brückenbogens, der bei horizontaler Brückenbahn eine Ellipse zur innern Wölblinie hat, ebenso wie für einen Brückenbogen mit einer

kreisförmigen innern Wölblinie gefunden werden kann. Hierauf fufsend und zur Erläuterung des eben Angeführten gehen wir sofort zur Bestimmung der freien Stützlinie eines Brückenbogens Fig. 73. über, der einen Ellipsenbogen AB zur innern Wölblinie hat und für den der Raum zwischen dieser und der Brückenbahn FN gleichmäfsig mit gleich schwerem Materiale erfüllt ist. Die halbe grofse Achse der innern Wölblinie sei $CB = A = 1$, die halbe kleine Achse $CA = B = \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}$, die Scheitelhöhe $AF = 0{,}25\ B$, also $h = 0{,}25$. Ferner sei AD die Höhe des Stützbogens im Scheitel und $TP_1Q_1B_1$ dessen mittlere Wölblinie. Multipliciren wir die in der Horizontalspalte zu $h = 0{,}25$ gehörenden Zahlenwerthe der Tabelle A Seite 201 mit 5, tragen die sich ergebenden Producte von T aus auf die Vertikale nach G hin, ziehen durch die so bestimmten Puncte Horizontalen, bis sie sich mit den Perpendikeln 1, 2, 3, 4, 5 . . . kreuzen, und verbinden die Durchschnittspuncte durch eine krumme Linie $TPQO$, so hat man eine vorläufige freie Stützlinie des elliptischen Brückenbogens. Die Puncte 1, 2, 3, 4, 5 . . . stehen, vom Scheitel E des aus C mit der halben grofsen Achse CB beschriebenen Viertelkreises, um je 10^0 von einander ab. Nach Seite 198 ist TP_1Q_1O ebenfalls eine der Massenanordnung des Brückenbogens Fig. 73 zugehörende freie Stützlinie, wenn die perpendikularen Abstände vertikal über einander liegender Puncte P, P_1; Q, Q_1 u. s. f. beider Linien $TPQO$ und $TP_1Q_1O_1$ gleichmäfsige Abstände von der Horizontale $TYUH$ durch den Scheitel T haben, oder wenn stattfindet

$$PY : QU : OH = P_1Y : Q_1U : O_1H.$$

Die durch Zeichnung abgeleitete freie Stützlinie $TP_1Q_1O_1$ Fig. 73 fällt vom Scheitel ab mit der mittleren Wölblinie TB_1 des Stützbogens bis zu einem Puncte R hin nahe zusammen. In der Richtung dieser Linie TP_1R wird der Stützbogen, bei regelrechter Beschaffenheit, das Gewicht der Brückenbogenmasse zwischen den Perpendikeln durch A und R stützen. Von R aus hann die fernere Stützung in der Fortsetzung RQ_1O_1 der freien Stützlinie oder auch in der Richtung der mittlern Wölblinie RB_1, unter Absetzung von Horizontaldruck, geschehen. Die Stützung wird von R aus nach der Richtung der mittlern Wölblinie RB_1 erfolgen, wenn das Setzen in den Lagerflächen nach dieser Richtung hin geringer als nach der freien Stütz-

linie RQ_1O_1 ist, wozu mit gehört, dafs die Lagerflächen der Wölbsteine durchgängig auf der mittlern Wölblinie winkelrecht stehen. Dagegen wird auch von R aus die Stützung in der Richtung der freien Stützlinie erfolgen, wenn in dieser die geringste Zusammendrückung statthat, was unter übrigens geeigneten Umständen geschieht, sobald von R aus nach B_1 hin die Lagerflächen der Wölbsteine winkelrecht auf der freien Stützlinie RQ_1O_1 stehen.

Für den Horizontaldruck C, den die betrachtete Stützung herbeiführt, ist gemäfs der Entwickelungen in den Abschnitten 4, 5 und 6 nur die freie Stützlinie in Betrachtung zu ziehen. Für den Endpunct O_1 der durch Construction gefundenen freien Stützlinie in Fig. 73 ist die Abscisse $TX = 0{,}32\,BC = 0{,}32\,A$. Somit und mit Rücksicht auf die gemachten Annahmen wird in der Gleichung XXI.

$$x_\mu = 0{,}32\,A;\; B = \tfrac{1}{2}\,A;\; \angle\,\widehat{\mu} = 90^0;\; Bh = 0{,}25\,B.$$

Ferner ist der Werth der Parenthese der Gleichung XXI. nach Tabelle A Seite 201 gleich 0,1729351. Somit giebt die Gleichung XXI.

$$0{,}32\,A = \frac{A^2 \times \tfrac{1}{2}\,Aw}{C} \times 0{,}1729351,$$

also auch

$$C = \frac{A^2 \times 0{,}1729351\,w}{2 \times 0{,}32} = 0{,}27021\,A^2 w.$$

Aus der vorläufig bestimmten freien Stützlinie $APQO$ des Brückenbogens Fig. 73 läfst sich noch eine der Massenanordnung zugehörende freie Stützlinie TIO_2 finden, welche die innere Wölblinie des Stützbogens in I tangirt. Diese Stützlinie mufs als die am tiefsten gelegene angesehen werden, in welcher die Brückenbogenmasse möglicher Weise noch Stützung finden kann. Den lothrechten Abstand des Endpunctes O_2 eben dieser Stützlinie vom Scheitel T giebt die Zeichnung zu

$$TK = 0{,}422\,A = x_\mu,$$

welcher, durch Einführung in die Gleichung XXI., den Scheiteldruck so giebt:

$$0{,}422\,A = \frac{A^2 \times \frac{1}{2} A w}{C} \times 0{,}1729351,$$

$$C = \frac{0{,}1729351\; w A^2}{0{,}844} = 0{,}2049\; A^2 w.$$

Könnte die Stützung des Brückenbogens genau in der Richtung der mittlern Wölblinie des Stützbogens erfolgen, dann würde der Horizontal- oder Scheiteldruck, zufolge Seite 51 sein

$$C_1 = AF \times w \times \text{Krümmungshalbmesser } \varrho$$

des Stützbogens im Scheitel. In der Figur 73 ist

$$AF = 0{,}125\; A;\; AT = 0{,}04\; A.$$

Die durch T gelegte Ellipse, die von der innern Wölblinie nahe gleichweit absteht, hat zur halben kleinen Achse

$$B + 0{,}04\; A = 0{,}5\; A + 0{,}04\; A = 0{,}54\; \mathrm{A} = b$$

und zur halben grofsen Achse

$$A + 0{,}04\; A = 1{,}04\; A = a.$$

Der Krümmungshalbmesser im Durchschnittspuncte der Ellipse mit ihrer kleinen Achse ist

$$\varrho = \frac{a^2}{b}.$$

Im vorliegenden Falle wird

$$\varrho = \frac{1{,}04^2}{0{,}54} A,$$

mithin

$$C_1 = 0{,}125\, A \times w \times \frac{1{,}04^2}{0{,}54} A = 0{,}25037\; \mathrm{A}^2 w.$$

Der Unterschied zwischen diesem Horizontaldrucke und dem wahrhaft bestehenden mittlern ist an sich, nicht aber für den grofsen Grad von Sicherheit beachtenswerth, der in jenen Fällen bei Brückenbauten zu nehmen ist, in welchen C in Betracht kommt.

Das auf Seite 18 angegebene Gesetz der freien Stützlinie irgend wie aneinander gereihter Massen läfst sich immer und oft mit Vor-

theil für die Auffindung der freien Stützlinie eines Brückenbogens benutzen. Wenn die Masse, welche über der innern Wölblinie *AB* eines Brückenbogens Fig. 74 liegt, durch den Raum dargestellt wird, der zwischen dieser und der Linie *CD* liegt, wenn man den Scheitel der freien Stützlinie in *T* und wenn man einen Punct *O* der letztern in der Vertikale durch *B* nimmt, wenn man ferner den lothrechten Abstand *TU* des Punctes *O* gleich *Z*, wenn man den Horizontaldruck im Scheitel der freien Stützlinie gleich *C* und wenn man die Summe der statischen Momente aller zwischen dem Scheitel *A* und der Vertikale durch *B* gelegenen Massen, bezogen auf die letztere, gleich M_n setzt, dann ist das auf Seite 18 angegebene Gesetz ausgedrückt durch

$$Z = \frac{M_n}{C}.$$

Die Nutzbarmachung dieser Gleichung hängt zunächst von der Bestimmung der statischen Momente der Massen zwischen der Vertikale durch den Scheitel und durch *B*, bezogen auf die letztere, ab. Zwischen der Vertikale durch *A* und der durch B können wir uns noch beliebig viel Perpendikel und so nahe an einander gelegt denken, dafs die von denselben abgeschnittenen Flächen zwischen *AB* und *CD* ohne merklichen Fehler als Paralleltrapeze genommen werden können. Die Summe der statischen Momente der Massen des Brückenbogens Fig. 74 ist nach dieser Zerlegung der Summe der statischen Momente aller Trapezflächen, bezogen auf die Vertikale durch B, gleich.

Für ein Trapez *AE* Fig. 75, dessen zwei Seiten $AC = h$ und $EF = h_1$ vertikal sind und um u horizontal von einander abstehen, ist der horizontale Abstand λ des Schwerpunctes der Trapezfläche von der Vertikale $EF = h_1$

$$\lambda = \frac{u}{3}\left(\frac{h_1 + 2h}{h_1 + h}\right) = \frac{u}{3}\left(1 + \frac{h}{h_1 + h}\right).$$

Die Perpendikel von *A* bis zum Puncte *B* hin Fig. 74 zwischen der inneren Wölblinie und der Brückenbahn seien ihrer Länge nach auf einander folgend h, h_1, h_2, h_3 . . . h_7 und ihr horizontaler Abstand

durchaus gleich u. Der Flächeninhalt der Trapezfläche zwischen den Perpendikeln h und h_1 ist

$$f = \frac{u}{2}(h + h_1).$$

Der horizontale Abstand ihres Schwerpunctes von h_1 nach h hin gleich λ und von der Vertikale durch B

$$6u + \lambda,$$

mithin das statische Moment des Trapezes zwischen den Perpendikeln durch h und h_1 bezogen auf die Vertikale durch B in Fig. 74

$$m_1 = (6u + \lambda) f.$$

Allgemein sei nun der horizontale Abstand der Perpendikel durch A und B in Fig. 74 gleich L, die Anzahl der gleichen Theile, in welche L durch Perpendikel getheilt werde, gleich n, folglich der Abstand von je zwei an einander liegenden Vertikalen

$$u = \frac{L}{n}.$$

Demnach ist der horizontale Abstand der Vertikale h_1 von der durch B

$$\frac{n-1}{n} L$$

und das statische Moment der Masse des Brückenbogens innerhalb der Perpendikel h und h_1

$$m_1 = \left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)L + \lambda\right\} f = \left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)L + \frac{L}{3n}\left(1 + \frac{h}{h_1+h}\right)\right\}$$

$$\frac{L}{2n}\left(h_1 + h\right) = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \left\{\frac{n}{2}(h_1 + h) - \tfrac{1}{6}(2h_1 + h)\right\}.$$

Wie vorstehend findet man, bezogen auf das Perpendikel durch B, das statische Moment der Bogenmasse innerhalb der Vertikalen durch h_1 und h_2 zu

$$m_2 = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \left\{\frac{n}{2}(h_2 + h_1) - \tfrac{1}{6}(5h_2 + 4h_1)\right\},$$

das statische Moment der Bogenmasse innerhalb der Perpendikel h_3 und h_2 zu

$$m_3 = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \left\{\frac{n}{2}(h_3 + h_2) - \tfrac{1}{6}(8 h_3 + 7 h_2)\right\},$$

das statische Moment der Bogenmasse innerhalb der Perpendikel h_4 und h_3 zu

$$m_4 = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \left\{\frac{n}{2}(h_4 + h_3) - \tfrac{1}{6}(11 h_4 + 10 h_3)\right\}$$

u. s. f.

$$m_{n-1} = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \left\{\frac{n}{2}(h_{n-1} + h_{n-2}) - \tfrac{1}{6}\Big((3n - 4) h_{n-1} + (3n - 5) h_{n-2}\Big)\right\},$$

$$m_n = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \left\{\frac{n}{2}(h_n + h_{n-1}) - \tfrac{1}{6}\Big((3n - 1) h_n + (3n - 2) h_{n-1}\Big)\right\}.$$

Die Summe der statischen Momente

$$m_1 + m_2 + m_3 \ldots m_{n-1} + m_n = M$$

gesetzt, giebt

$$\text{XXII.} \quad M_n = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \left\{ n\left(\frac{h + h_n}{2} + h_1 + h_2 + h_3 \ldots h_{n-1}\right) - \left(\frac{h + (3n - 1) h_n}{6} + h_1 + 2 h_2 + 3 h_3 + 4 h_4 \ldots + (n - 1) h_{n-1}\right)\right\}.$$

In dieser Formel stellt $\left(\frac{L}{n}\right)$ den für einen Fall als unveränderlich angenommenen Abstand von je zwei Perpendikeln dar.

Der Punct P Fig. 74 liege im p^{ten} Perpendikel von A nach B hin und die Summe der statischen Momente aller Massentheile des

Brückenbogens zwischen den Perpendikeln durch A und P, bezogen auf das letztere, sei M_p. Nach XXII. wird nun

$$\text{XXIII. } M_p = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \left\{ p \left(\frac{h+h_p}{2} + h_1 + h_2 + h_3 \ldots + h_{p-1}\right) - \left(\frac{h + (3_{p-1})\, h_p}{6} + h_1 + 2h_2 + 3\,h_3 \ldots + (p-1)\, h_{p-1}\right)\right\}.$$

Nach der oben angenommenen Bezeichnung und nach Seite 18 ist der lothrechte Abstand $TU = Z_n$ des Endpunctes O der freien Stützlinie TPO der Masse des Brückenbogens Fig. 74

$$Z_n = \frac{M_n}{C}.$$

In gleicher Weise ergiebt sich für den Punct P der nämlichen freien Stützlinie, dessen vertikaler Abstand vom Scheitel T, d. i. TV, gleich Z_p sein soll,

$$Z_p = \frac{M_p}{C}.$$

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt

$$\text{XXIV. } Z_p = \frac{Z_n}{M_n} \cdot M_p.$$

Ferner endlich wird

$$\text{XXV. } C = \frac{M_n}{Z_n}.$$

Die Formeln XXIII., XXIV. und XXV. sind immer zur Bestimmung der Lage der freien Stützlinie eines Brückenbogens anwendbar, welche Gestalt auch die innere Wölblinie und die Brückenbahn habe. Diese Formeln sind ferner zur Aufsuchung der freien Stützlinie brauchbar, wenn auch der Raum zwischen dem Stützbogen und der Brückenbahn nicht durchgängig oder gleichmäfsig mit Material erfüllt ist, sowie dann, wenn letzteres specifisch leichter als das des Stützbogens ist. Endlich sind die genannten Formeln zur Herleitung der freien Stützlinie eines Brückenbogens an sich, nämlich ohne Hintermauerung und Ueberfüllung zu gebrauchen. Die Art und Weise der Be-

nutzung der mehrgenannten Formeln wollen wir jetzt durch einige Beispiele erläutern. Als nächste Aufgabe stellen wir uns die Bestimmung der freien Stützlinie eines Brückenbogens Fig. 76, dessen innere Wölblinie *AB* mit *A* als Scheitel und dessen Brückenbahn gleich *CD* sei. Den horizontalen Abstand des Scheitels *A* vom Endpuncte *B* der innern Wölblinie, d. i. *CD*, nehmen wir als 1 an, theilen ihn in 16 gleiche Theile (je mehr desto besser) und erhalten dadurch, in Beziehung auf die vorstehenden Formeln, $\frac{L}{n} = \frac{1}{16}$. Auf einem Mafsstabe gemessen, für welchen der horizontale Abstand des Scheitels *A* vom Endpuncte *B* der innern Wölblinie gleich 1 ist, erhalten wir die Höhen der Perpendikel von *C* nach *D* hin, welche zwischen der innern Wölblinie *AB* und der Brückenbahn *CD* liegen, wie folgend:

$h = 0{,}09$; $h_1 = 0{,}092$; $h_2 = 0{,}0965$; $h_3 = 0{,}106$; $h_4 = 0{,}12$; $h_5 = 0{,}1395$; $h_6 = 0{,}163$; $h_7 = 0{,}1895$; $h_8 = 0{,}2235$; $h_9 = 0{,}263$; $h_{10} = 0{,}308$; $h_{11} = 0{,}363$; $h_{12} = 0{,}426$; $h_{13} = 0{,}505$; $h_{14} = 0{,}604$; $h_{15} = 0{,}744$; $h_{16} = 1{,}09$.

Als Vorbereitung für die spätern Rechnungen, in Beziehung auf die Formeln XXII., erhält man:

$h_1 = 0{,}092$; $h_1 + h_2 = 0{,}1885$; $h_1 + h_2 + h_3 = 0{,}2945$; $h_1 + h_2 \ldots h_4 = 0{,}4145$; $h_1 + h_2 \ldots h_5 = 0{,}554$; $h_1 + h_2 \ldots h_6 = 0{,}717$; $h_1 + h_2 \ldots h_7 = 0{,}9065$; $h_1 + h_2 \ldots h_8 = 1{,}1300$; $h_1 + h_2 \ldots h_9 = 1{,}3930$; $h_1 + h_2 \ldots h_{10} = 1{,}7010$; $h_1 + h_2 \ldots h_{11} = 2{,}064$; $h_1 + h_2 \ldots h_{12} = 2{,}4900$; $h_1 + h_2 \ldots h_{13} = 2{,}9950$; $h_1 + h_2 \ldots h_{14} = 3{,}5990$; $h_1 + h_2 \ldots h_{15} = 4{,}3430$.

Ferner:

$1\,h_1 = 0{,}092$; $1\,h_1 + 2\,h_2 = 0{,}2850$; $1\,h_1 + 2\,h_2 + 3\,h_3 = 0{,}603$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 4\,h_4 = 1{,}083$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 5\,h_5 = 1{,}7805$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 6\,h_6 = 2{,}7585$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 7\,h_7 = 4{,}0850$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 8\,h_8 = 5{,}8730$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 9\,h_9 = 8{,}2400$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 10\,h_{10} = 11{,}3200$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 11\,h_{11} = 15{,}3130$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 12\,h_{12} = 20{,}4250$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 13\,h_{13} = 26{,}9900$; $1\,h_1\; 2\,h_2 \ldots 14\,h_{14} = 35{,}4460$; $1\,h_1 + 2\,h_2 \ldots 15\,h_{15} = 46{,}6060$.

Nach Formel XXII. wird nun

$$M_{16} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot \left\{78,928 - 55,1593\right\} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 . 23,7687.$$

$$M_{15} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 19,3230; \; M_{14} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 15,65567; \; M_{13} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 12,5992;$$

$$M_{12} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 10,051; \; M_{11} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 7,9315; \; M_{10} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 6,1778;$$

$$M_9 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 4,7309; \; M_8 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 3,5643; \; M_7 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 2,5921;$$

$$M_6 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 1,8255; \; M_5 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 1,2227; \; M_4 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 0,7600;$$

$$M_3 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 0,4182; \; M_2 = \left(\frac{1}{16}\right) 0,1831; \; M_1 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 \cdot 0,0453.$$

Nimmt man den Endpunct O der vorläufig zu bestimmenden freien Stützlinie auf dem 16. Perpendikel in dem vertikalen Abstande $OF = 1$ von ihrem Scheitel T und diesen in der halben Höhe AE des Stützbogens im Scheitel an, dann geht in der Formel XXIV. Z_n in $Z_{16} = 1$ und M_n in M_{16} über. Demnach ergiebt sich

$$Z_{15} = \frac{Z_{16}\left(\frac{1}{16}\right)^2 \times 19,323}{\left(\frac{1}{16}\right)^2 \times 23,7687} = \frac{19,323}{23,7687} = 0,81295.$$

Ebenso erhält man ferner:

$Z_{14} = 0,65867$; $Z_{13} = 0,53006$; $Z_{12} = 0,40326$;
$Z_{11} = 0,33369$; $Z_{10} = 0,25991$; $Z_9 = 0,19904$;
$Z_8 = 0,14995$; $Z_7 = 0,10905$; $Z_6 = 0,07680$;
$Z_5 = 0,05144$; $Z_4 = 0,03197$; $Z_3 = 0,01759$;
$Z_2 = 0,00770$; $Z_1 = 0,00191$.

Legt man nun durch den Scheitel T eine Horizontale TF, trägt von dieser aus auf die Perpendikel 16, 15, 14, 13 etc. die Zahlenwerthe 1; 0,81295; 0,65867; 0,53006; 0,40326 etc. und legt durch

die so gefundenen Endpuncte eine krumme Linie *TO*, so ist diese eine vorläufige Stützlinie der Massenanordnung des Brückenbogens Fig. 76. Durch Anwendung des Verfahrens ferner, das wir bereits auf Seite 198 aufstellten, läfst sich durch Construction aus der vorläufig bestimmten freien Stützlinie die TPO_1 bestimmen, die vom Scheitel ab mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens vom Scheitel ab am innigsten zusammenfällt, sowie jene TRO_2, welche die innere Wölblinie in *R* tangirt.

Die Folgerung, die man aus der Lage der mittlern freien Stützlinie des Brückenbogens Fig. 76 für die Höhe des zugehörenden Stützbogens und der Stützung zu ziehen hat, sind kürzlich folgende: Weil sich die mittlere freie Stützlinie, namentlich innerhalb der Perpendikel *H* und *I* über die mittlere Wölblinie erhebt, so wird es erforderlich, innerhalb derselben Perpendikel den Stützbogen zu erhöhen. Weil sich ferner die mittlere freie Stützlinie in *P* der Richtung der mittlern Wölblinie des Stützbogens anschliefst, so kann der zwischen *P* und *B* liegende Theil des Stützbogens als vorgeschriebene Stützlinie mit tangentialer Hinterstützung wirken.

Der Horizontaldruck oder Schub einer freien Stützlinie der Wölbmasse in Fig. 76 ist nach XXV.

$$C = \frac{M_{16}}{Z_{16}}$$

und für die Wölblinie, die vom Scheitel ab mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens am innigsten zusammenfällt,

$$C = \frac{M_{16}}{FO_1} = \frac{(1/16)^2 . 23,7687}{0,737} = 0,12598.$$

Es sind M_{16} und FO_1 für den horizontalen Abstand des Scheitels *A* vom Endpuncte *B* der innern Wölblinie gleich 1 dargestellt. Bezeichnen wir den wahren Werth dieses Abstandes mit *X*, dann wird

$$C = X^2 . 0,12598.$$

Für den Scheiteldruck, der entsteht, wenn sich die Brückenbogenmasse in der Richtung einer freien Stützlinie TRO_2 stützt, welche die innere Wölblinie des Stützbogens in *R* tangirt, erhält man ferner

$$C_1 = \frac{M_{16}}{FO_2} = \frac{(1/16)^2\,23{,}7687}{0{,}819}\,X^2 = 0{,}11336x^2.$$

Bisweilen werden die Stützbögen von Brückenbögen nur bis zu einer gewissen Höhe LK hintermauert und der übrige Theil mit Kiefs, Bauschutt etc. überfüllt. Sowohl hierbei, als auch bei einer bis zur Scheitelhöhe und noch höher reichenden Hintermauerung pflegt man den Stützbogen nach seinem Schlusse auszurüsten oder das Lehrgerüste zu entfernen. Wir können uns nun, in Beziehung auf den Stützbogen des Brückenbogens Fig. 76, die Frage stellen: Wird die Hintermauerung des Stützbogens bis zur Höhe LK genügen, um den Stützbogen nach seiner Vollendung ohne Gefahr ausrüsten zu können? Die Beantwortung dieser Frage hängt offenbar von der Lage der mittlern freien Stützlinie für den Stützbogen an sich, als auch von der Lage der freien Stützlinie mit der Hintermauerung bis zur Höhe LK ab. Für beide Fälle läfst sich die Lage einer vorläufigen freien Stützlinie wie oben bestimmen. Theilen wir in dieser Absicht den horizontalen Abstand $TG = 1$ des Scheitels A der innern Wölblinie von ihrem Endpuncte N in 16 gleiche Theile, fällen durch die Theilpuncte Perpendikel und bezeichnen die in diesen liegenden Höhen des Stützbogens, von A nach G hin gezählt, mit h, h_1, h_2, h_3 ... h_{16}, wobei h die Höhe des Stützbogens im Scheitel darstellt, so erhalten wir durch Messung

$h = 0{,}05$; $h_1 = 0{,}05$; $h_2 = 0{,}05$; $h_3 = 0{,}052$;
$h_4 = 0{,}053$; $h_5 = 0{,}054$; $h_6 = 0{,}055$; $h_7 = 0{,}056$;
$h_8 = 0{,}059$; $h_9 = 0{,}062$; $h_{10} = 0{,}065$; $h_{11} = 0{,}069$;
$h_{12} = 0{,}075$; $h_{13} = 0{,}0825$; $h_{14} = 0{,}0965$; $h_{15} = 0{,}126$; $h_{16} = 0{,}323$.

Hieraus folgt:

$h_1 = 0{,}05$; $h_1 + h_2 = 0{,}101$; $h_1 + h_2 \ldots h_3 = 0{,}153$;
$h_1 + h_2 \ldots h_4 = 0{,}206$; $h_1 + h_2 \ldots h_5 = 0{,}260$; $h_1 + h_2 \ldots h_6 = 0{,}3155$;
$h_1 + h_2 \ldots h_7 = 0{,}3715$; $h_1 + h_2 \ldots h_8 = 0{,}4305$; $h_1 + h_2 \ldots h_9 = 0{,}4925$;
$h_1 + h_2 \ldots h_{10} = 0{,}5575$; $h_1 + h_2 \ldots h_{11} = 0{,}6275$; $h_1 + h_2 \ldots h_{12} = 0{,}7025$;
$h_1 + h_2 \ldots h_{13} = 0{,}785$; $h_1 + h_2 \ldots h_{14} = 0{,}8815$; $h_1 + h_2 \ldots h_{15} = 0{,}0075$

Ferner:

$1h_1 = 0{,}05$; $1h_1 + 2h_2 = 0{,}152$; $1h_1 + 2h_2 + 3h_3 = 0{,}308$; $1h_1 + 2h_2 \ldots$
$4h_4 = 0{,}520$; $1h_1 + 2h_2 \ldots 5h_5 = 0{,}790$; $1h_1 + 2h_2 \ldots 6h_6 = 1{,}123$;

$1h_1+2h_2 \ldots 7h_7=1{,}515$; $1h_1 2h_2 \ldots 8h_8=1{,}987$; $1h_1+2h_2 \ldots 9h_9=2{,}545$; $1h_1+2h_2 \ldots 10h_{10}=3{,}195$; $1h_1+2h_2 \ldots 11h_{11}=3{,}954$; $1h_1+2h_2 \ldots 12h_{12}=4{,}854$; $1h_1+2h_2 \ldots 13h_{13}=5{,}9265$; $1h_1+2h_2 \ldots 14h_{14}=7{,}2775$; $1h_1+2h_2 \ldots 15h_{15}=9{,}1675$.

Nach XXII:

$M_{16}=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .7{,}398$; $M_{15}=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .6{,}3327$; $M_{14}=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .5{,}42125$;

$M_{13}=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .4{,}60892$; $M_{12}=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .3{,}88$; $M_{11}=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .3{,}21578$;

$M_{10}=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .2{,}6325$; $M_9=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .2{,}1225$; $M_8=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .1{,}6668$;

$M_7=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .1{,}2615$; $M_6=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .0{,}9209$; $M_5=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .0{,}64567$;

$M_4=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .0{,}39616$; $M_3=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .0{,}22633$; $M_2=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .0{,}10017$;

$M_1=\left(\frac{1}{16}\right)^2 .0{,}025.$

Endlich wird nach XXIV., wenn man $Z_{16}=GS=1=TG$ nimmt,

$$Z_{15}=\frac{Z_{16}\times\left(\frac{1}{16}\right)^2 .6{,}3327}{(1/16)^2 .7{,}398}=0{,}85600;$$

$Z_{14}=\frac{5{,}42125}{7{,}398}=0{,}73279$; $Z_{13}=0{,}62299$; $Z_{12}=\frac{3{,}88}{7{,}398}=0{,}52447$;

$Z_{11}=\frac{3{,}21578}{7{,}398}=0{,}43469$; $Z_{10}=\frac{2{,}6325}{7{,}398}=0{,}35584$; $Z_9=\frac{2{,}1225}{7{,}398}=0{,}28690$;

$Z_8=\frac{1{,}6668}{7{,}398}=0{,}22531$; $Z_7=\frac{1{,}2615}{7{,}398}=0{,}17052$; $Z_6=\frac{0{,}9209}{7{,}398}=0{,}12448$;

$$Z_5 = \frac{0,64567}{7,398} = 0,08723;\ Z_4 = \frac{0,39616}{7,398} = 0,05355;\ Z_3 = \frac{0,22633}{7,398}$$
$$= 0,03059;$$

$$Z_2 = \frac{0,10017}{7,398} = 0,01354;\ Z_1 = \frac{0,025}{7,398} = 0,00338.$$

Aus den vorstehenden Werthen ergiebt sich *TS* Fig. 76 als vorläufige freie Stützlinie des Stützbogens, aus der mittels eines Proportionalwinkels nach S. 198 jene freie Stützlinie *TV*, welche die innere Wölblinie tangirt, und jene, die vom Scheitel *T* aus mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens am innigsten zusammenfällt, nämlich *TU*, durch Construction abzuleiten ist. Bis zum Perpendikel h_{10} fällt die letztgenannte freie Stützlinie sehr nahe mit der mittlern Wölblinie zusammen, entfernt sich jedoch von hier ab so rasch von derselben, dafs sie schon zwischen den Perpendikeln h_{12} und h_{13} die äussere Wölblinie des Stützbogens überschreitet. Vom Durchschnittspuncte der Hintermauerungsoberfläche mit der mittlern freien Stützlinie kann der nach dem Bogenanfange *N* hin liegende Theil des Stützbogens, dafern die genügende horizontale Hinterstützung vorhanden ist, als vorgeschriebene Stützlinie nach seiner Richtung hin wirken. Insofern als hierbei die mittlere freie Stützlinie über der mittleren Wölblinie des Stützbogens liegt, wird von *b* ab nach *N* hin die oberhalb der mittlern Wölblinie des Stützbogens liegende Hälfte desselben mehr Druck tragen als die untere. Um die mittlere Druckrichtung von *b* nach *N* hin der mittlern Wölblinie näher zu rücken, wird die Höherführung der Hintermauerungsschicht erforderlich. Ungeachtet des letztern ist das Lehrgerüste des Stützbogens, nach dessen Schliefsung und nach Vollendung der Hintermauerung bis zur Höhe *LK*, ohne Bedenken zu entfernen, gleichviel ob die Hintermauerung massiv ist, oder ob sie nur aus einzelnen Gurten, parallel der Steinmauern, besteht. Von *L* aus nach dem Anfange *N* hin wird der Stützbogen freilich nur dann in seiner Richtung als vorgeschriebene Stützlinie aufzutreten vermögen, wenn die Hintermauerung dem sich absetzenden Horizontaldrucke widerstehen kann. Diese Fähigkeit erlangt die Hintermauerung zunächst durch die Stofsflächen der Mauersteine, sie kann aber auch

durch die Reibung oder Adhärirung in den Lagerflächen geboten werden. Gewährt die Hintermauerung keinen horizontalen Widerstand oder diesen nicht genügend, dann ist immer noch eine Stützung möglich, und zwar dann, wenn die durch die Hintermauerungsmasse abgeänderte Richtung der freien von T ausgehenden mittlern Stützlinie noch innerhalb des Stützbogens zu liegen kommt. Um hierüber in's Klare zu kommen, haben wir, ganz ähnlich wie oben, die Lage der freien Stützlinie unter Zurechnung der Masse der Hintermauerung aufzusuchen. Bis zum Perpendikel h_{11} bleibt auch bei dem Vorhandensein der Hintermauerung die mittlere freie Stützlinie ungeändert. Von hier ab aber werden die Massenhöhen grösser, als für den Stützbogen ohne Hintermauerung, die wir uns als massiv denken, woraus eine mehr niedersteigende Richtung der mittlern Stützlinie von b aus, verglichen mit der des bloſsen Stützbogens, folgt. Für die durch die Hintermauerung abgeänderte Richtung der mittlern Stützlinie, die erst von b aus ihren Anfang nimmt, giebt die Figur 76

$h_{12} = 0{,}132$; $h_{13} = 0{,}209$; $h_{14} = 0{,}305$; $h_{15} = 0{,}435$; $h_{16} = 0{,}802$;

woraus folgt:

$h_1 + h_2 \ldots h_{12} = 0{,}7585$; $h_1 + h_2 \ldots h_{13} = 0{,}9675$; $h_1 + h_2 \ldots h_{14} = 1{,}2725$; $h_1 = h_2 \ldots h_{15} = 1{,}7075$;

$1 h_1 + 2 h_2 \ldots 12 h_{12} = 5{,}538$; $1 h_1 + 2 h_2 \ldots 13 h_{13} = 8{,}255$; $1 h_1 + 2 h_2 \ldots 14 h_{14} = 12{,}525$; $1 h_1 + 2 h_2 \ldots 15 h_{15} = 19{,}05$;

ferner

$$M_{11} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 . 3{,}21578; \quad M_{12} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 . 3{,}87766; \quad M_{13} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 . 4{,}68233;$$

$$M_{14} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 . 5{,}68333; \quad M_{15} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 . 7{,}00166; \quad M_{16} = \left(\frac{1}{16}\right)^2 . 8{,}79533.$$

Der mittlern freien Stützlinie des Stützbogens Fig. 76 entspricht in dem Perpendikel h_{11}

$$Z_{11} = 0{,}254.$$

Setzen wir nun in der allgemeinen Gleichung XXIV, $Z_n = Z_{11}$, folglich auch $M_n = M_{11}$, dann erhalten wir

$$Z_{12} = \frac{Z_{11}\, M_{12}}{M_{11}} = \frac{0{,}254 \times 3{,}87766}{3{,}21578} = 0{,}30628;$$

16*

$$Z_{13} = \frac{Z_{11}\, M_{13}}{M_{11}} = \frac{0{,}254 \times 4{,}68233}{3{,}21578} = 0{,}36983;$$

$$Z_{14} = \frac{Z_{11}\, M_{14}}{M_{11}} = \frac{0{,}254 \times 5{,}68333}{3{,}21578} = 0{,}44889;$$

$$Z_{15} = \frac{Z_{11}\, M_{15}}{M_{11}} = \frac{0{,}254 \times 7{,}00166}{3{,}21578} = 0{,}55303;$$

$$Z_{16} = \frac{Z_{11}\, M_{16}}{M_{11}} = \frac{0{,}254 \times 8{,}79533}{3{,}21578} = 0{,}69469.$$

Diese Werthe von der horizontalen *TG* aus auf die Perpendikel h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15} und h_{16} aufgetragen, giebt *TbW* als freie Stützlinie des Stützbogens mit der massiven Hintermauerung bis zur Höhe *LK*. Die eben bestimmte freie Stützlinie liegt zwar noch innerhalb der Masse des Stützbogens, nähert sich indeſs der äuſsern Wölblinie des letztern mehr als der innern, so daſs, um sie der mittlern Wölblinie des Stützbogens näher zu rücken, eine Erhöhung der massiven Hintermauerung nöthig wird.

Wir können ferner fragen: Was wird geschehen, wenn der Stützbogen Fig. 76 ohne Hintermauerung ausgerüstet wird? Schon aus der Lage der freien Stützlinie durch den Mittelpunct *T* der Scheitelhöhe des Stützbogens, welche die innere Wölblinie tangirt, können wir entnehmen, daſs der Bogen niederbrechen muſs, dafern nicht ein Adhäriren der Wölbsteine in ihren Lagerflächen stattfindet. Von einem Zusammenhange der Wölbsteine, etwa durch Cement oder Kalkmörtel, ist im Allgemeinen abzusehen, was wir auch für den Bogen Fig. 76 thun wollen. Im Augenblicke des Bogenniederbruches stützt sich derselbe im Scheitel in dem höchsten Puncte *E* und überdieſs nothwendig in einer Richtung oder in einer seiner Massenordnung entsprechenden freien Stützlinie, die den geringsten Horizontaldruck oder Schub bedingt, d. h. in einer freien Stützlinie, welche vom äuſsern Scheitel *E* aus geht und die innere Wölblinie tangirt. Tragen wir nun die vorläufige freie Stützlinie *TS* des Stützbogens Fig. 76, deren Abscissen auf S. 241—242 berechnet wurden, in Fig. 77 vom Scheitel *E* der äuſsern Wölblinie aus als *ES* an und finden hieraus durch Construction jene freie Stützlinie *EXY*, welche die innere Wölblinie in *X* berührt. Diese nun lehrt

uns, dafs sich der Stützbogen nicht blofs im Scheitel öffnet, sondern gleichzeitig auch in Puncten X, X_1, Y, Y_1 und überdiefs in den Bogenanfängen Z und Z_1. Mit den Bogenhöhen mufs sich die Lage der Brechungsfugen ändern und es kann dahin kommen, dafs eine Oeffnung oder eine Brechungsfuge in den Bogenanfängen gar nicht eintritt. Die Brechungsfuge bei Z bildet sich nämlich nur dann, wenn das statische Moment des in Y statthabenden Druckes D nach der Richtung der freien Stützlinie, bezogen auf Z als Drehpunct, anfängt grösser zu werden, als das statische Moment der Masse von Y bis Z, ebenfalls bezogen auf Z als Drehpunct.

Wenn die innere Wölblinie eines Brückenbogens und die Massenanordnung über derselben gegeben ist, wird sich die zugehörende freie Stützlinie nur selten der mittlern Wölblinie des Stützbogens vollständig anschliefsen und noch seltener wird sie mit der innern Wölblinie zusammenfallen. Es ist aber ein Brückenbogen wie Fig. 78 denkbar, dessen innere Wölblinie ADO die freie Stützlinie der Massenanordnung ist, die sich zwischen ihr und der horizontalen Brückenbahn BEG befindet. Wir gehen nun zur Bestimmung dieser innern Wölblinie unter der Voraussetzung über, es sei der Raum zwischen ihr und der horizontalen Brückenbahn BE gleichmäfsig mit einem Materiale erfüllt, dem das Eigengewicht w entspricht. Die halbe lichte Spannweite des Brückenbogens Fig. 78 nehmen wir zu diesem Ende zu $OF = S$, die lichte Höhe zu $FA = H = nS$, die Scheitelhöhe zu $AB = h.nS$, ferner die verticale Abscisse eines Punctes D der innern Wölblinie zu $AC = x$, die zugehörende horizontale Ordinate zu $CD = y$ und vorläufig den Richtungswinkel der innern Wölblinie bei D mit der Ordinate DC zu μ an. Damit die Lösung eine allgemeinere werde, denken wir uns endlich im Scheitel B noch eine besondere Last Q.

Das Gewicht der Brückenbogenmasse zwischen der Vertikale durch den Scheitel A und durch D mit W bezeichnet giebt

$$dW = w(x + AB)\, dy = w(x + hnS)\, dy.$$

Der horizontale oder Scheiteldruck, den die mit der innern Wölblinie zusammenfallende freie Stützlinie im Scheitel A übt, mit C dargestellt, so muss nach II. Seite 15 sein

$$(1)\ \tfrac{1}{2} Q + W = C\, tg\, \mu = \frac{C dx}{dy}.$$

Durch Multiplication dieser Gleichung mit der vorhergehenden wird

$$\tfrac{1}{2} Q dW + W dW = wC(w + hnS)\, dx$$

und wenn man integrirt

$$\tfrac{1}{2} Q W + \tfrac{1}{2} W^2 = wC(\tfrac{1}{2} x^2 + hnwS) \text{ d. g.}$$

$$W + \tfrac{1}{2} Q = \sqrt{\left\{ wC(x^2 + 2hnxS) + \tfrac{1}{4} Q 2 \right\}}.$$

Aus dieser Gleichung und aus (1) erhält man nun

$$\frac{Cdx}{dy} = \sqrt{\left\{ wC(x^2 + 2hnxS) + \tfrac{1}{4} Q \right\}} \text{ d. g.}$$

$$dy = \frac{C}{w} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left\{ \tfrac{1}{4} \frac{Q^2}{w^2} + \frac{C}{w}(x^2 + 2hnSx) \right\}}} \; {}^{*)}$$

und durch Integration folgt hieraus:

$$y = \sqrt{\frac{C}{w}} \cdot lognt \left\{ \begin{array}{l} \frac{2Cx}{w} + \frac{2C}{w} hnS + \\ 2\sqrt{\left\{ \frac{C}{w}\left(\tfrac{1}{4} \frac{Q^2}{w^2} + \frac{C}{w}(x^2 + 2hnSx) \right) \right\}} \end{array} \right\} + Const$$

Für $x = o$ verwandelt sich auch y in o, d. g.

$$o = \sqrt{\frac{C}{w}} \cdot lognt \left\{ \frac{2ChnS}{w} + \frac{Q}{w} \sqrt{\frac{C}{w}} \right\} + Const,$$

somit

$$\text{XXVI.} \quad y = \sqrt{\frac{C}{w}} \cdot lognt \left\{ \frac{\frac{Cx}{w} + \frac{ChnS}{w} + \sqrt{\left\{ \frac{C}{w}\left(\tfrac{1}{4} \frac{Q^2}{w^2} + \frac{C}{w}(x^2 + 2hnSx) \right) \right\}}}{\frac{C}{w} hnS + \tfrac{1}{2} \frac{Q}{w} \sqrt{\frac{C}{w}}} \right\}.$$

Befindet sich über dem Scheitel A keine besondere Last oder ist $Q = o$, was in der Regel der Fall ist, dann geht die vorstehende Gleichung, wenn man überdiefs

*) M. s. J. A. Schubert's Sammlung von Differential- und Integralformeln Seite 95.

$$x = AC = u.AF = u.nS$$

setzt, über in

$$y = \sqrt{\frac{C}{w}} \cdot lognt \left\{ \frac{u + h + \sqrt{(u^2 + 2hu)}}{h} \right\} \text{ oder}$$

$$(2)\; y = \sqrt{\frac{C}{w}} \cdot 2{,}30258\; log. \left\{ \frac{u + h + \sqrt{(u + 2hu)}}{h} \right\}$$

Der grösste Werth, den das u in dieser Gleichung annehmen kann, ist 1 und für diesen geht y über in $OF = S$, wodurch man erhält

$$2{,}30252 \sqrt{\frac{C}{w}} = \frac{S}{log. \left\{ \frac{1 + h + \sqrt{(1 + 2h)}}{h} \right\}}, \text{ d. g.}$$

$$\text{XXVII. } C = w \left\{ \frac{S}{2{,}30252\; log. \left\{ \frac{1 + h + \sqrt{(1 + 2h)}}{h} \right\}} \right\}^2$$

und aus (2) wird

$$\text{XXVIII. } y = S \,.\, \frac{log. \left\{ \frac{u + h + \sqrt{(u^2 + 2hu)}}{h} \right\}}{log. \left\{ \frac{1 + h + \sqrt{(1 + 2h)}}{h} \right\}}.$$

Die Anwendung der letzten Gleichung zur Bestimmung der innern Wölblinie eines Brückenbogens, die zugleich eine freie Stützlinie der Massenanordnung ist, bietet keine Schwierigkeiten. Setzen wir $h = 0{,}2$, dann ergiebt sich der Nenner der Gleichung XXVIII zu

$$log. \left\{ \frac{1{,}2 + \sqrt{1{,}4}}{0{,}2} \right\} = log. \left\{ \frac{12 + \sqrt{140}}{2} \right\} = 1{,}0761305.$$

Setzen wir ferner auf einander folgend 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 etc. 0,9 für u, dann erhält man:

$$y_1 = S \,.\, \frac{0{,}4179696}{1{,}0761305} = 0{,}38841\; S;$$

$$y_2 = S . \frac{0,5719416}{2,0761305} = 0,53149\ S;$$

$$y_3 = S . \frac{0,6804534}{1,0761305} = 0,63233\ S;$$

$$y_4 = S . \frac{0,7655493}{1,0761305} = 0,71141\ S;$$

$$y_5 = S . \frac{0,8359504}{1,0761305} = 0,77683\ S;$$

$$y_6 = S . \frac{0,8961403}{1,0761305} = 0,83469\ S;$$

$$y_7 = S . \frac{0,9487796}{1,0761305} = 0,88168\ S;$$

$$y_8 = S . \frac{0,9955913}{1,0761305} = 0,92519\ S;$$

$$y_9 = S . \frac{1,0377451}{1,0761305} = 0,96431\ S;$$

$$y_{10} = S . \frac{1,0761305}{1,0761305} = S.$$

Der Brückenbogen Fig. 78, dem die vorstehenden Abscissen zugehören, hat eine Scheitelhöhe $AB = 0,2$ der lichten Stichhöhe AF oder es mufs für denselben $AB = 0,2\,AF$ sein. Die Ordinaten y_1, y_2, y_3 ... entsprechen ferner Abscissen Aa, Ab, Ac ..., die $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$... der ganzen Stichhöhe betragen. Die Construction der innern Wölblinie mittels der oben berechneten Ordinaten geschieht folglich so: Nachdem $\frac{2}{10}$ der lichten Höhe des herzustellenden Bogens von A als Scheitelhöhe AB aufgetragen sind, theilt man die lichte Höhe AF in 10 gleiche Theile, zieht durch alle Theilpuncte Horizontalen, trägt auf diese, von AF aus, auf einander folgend die für y_1, y_2, y_3, y_4 ... y_{10} gefundenen Werthe, wobei $S = OF = 1$ gesetzt werden kann, verbindet die gefundenen Puncte a_1, b_1, c_1 ... in der gehörigen Reihenfolge und man hat die gesuchte innere Wölblinie ADO.

Die wie vorstehend bestimmte innere Wölblinie des Brückenbogens Fig. 78 ist zwar eine der Massenanordnung derselben entsprechende freie Stützlinie, doch kann unmöglich die Bogenmasse von der innern Wölbfläche als solche, sondern sie kann nur von einem Stützbogen gestützt werden. Die gefundene freie Stützlinie können wir aber von T aus als TO_1 antragen und können auch zu dieser mittels des Proportimalwinkels (nach Mafsgabe der auf Seite 198 entwickelten Eigenschaften einer Kettenlinie) eine zweite freie Stützlinie TO_2 der Massenanordnung des Brückenbogens Fig. 78 aufsuchen und diese als äufsere Wölblinie des Stützbogens annehmen. Wenn aber die innere und die äufsere Wölblinie des Stützbogens der Massenanordnung des Brückenbogens zugehörende freie Stützlinien sind, dann wird zuverläfsig die Stützung durch den Stützbogen in freien Stützlinien erfolgen. Doch, welcher Horizontalschub oder Scheiteldruck entbindet sich hierbei? Erfolgte die Stützung allein durch die innere Wölblinie, dann wäre der Horizontaldruck nach XXVII

$$C = w \left\{ \frac{S}{2{,}30252 \, log. \left\{ \frac{1 + h + \sqrt{(1 + 2h)}}{h} \right\}} \right\}^2,$$

wenn $S = OF$ und $h = \frac{AB}{AF}$ ist. Fände dagegen die Stützung allein in der Richtung der äufsern Wölblinie statt, dann entstände der Horizontaldruck

$$C_1 = \frac{C \times AF}{TP_2},$$

weil sich, mit Hinsicht auf Seite 198, die Scheiteldrücke verschiedener Stützlinien für die nämliche Massenanordnung umgekehrt verhalten, wie deren Höhen. Der wahre Horizontaldruck endlich wird sich nahezu als das arithmetische Mittel von C und C_1, nämlich als

$$\frac{C + C_1}{2}$$

herausstellen, weil die Stützung innerhalb der innern und der äufsern Stützlinie des Stützbogens erfolgt.

Die Formel XXVIII oder die Ordinaten y der innern Wölblinie eines Brückenbogens, wie Fig. 78, welche eine der Massenanordnung zugehörende freie Stützlinie ist, sind völlig unabhängig von dem Verhältnisse der lichten Höhe zur halben lichten Spannweite, wefshalb die eben berechneten Abscissen in allen den Fällen dieselben bleiben, in welchen, für irgend eine lichte Höhe AF, die Scheitelhöhe 0,2 der letztern beträgt. In Fig. 79 sei die Scheitelhöhe AB gleich 0,2 der lichten Höhe AF; dann sind für Abscissen $Aa = {}^1/_{10} AF$; $Ab = {}^2/_{10} AF$; $Ac = {}^3/_{10} AF$ etc. auch die zugehörenden Ordinaten, wie auf S. 248, $aa_1 = 0{,}38841\, FO$; $bb_1 = 0{,}53149\, FO$; $cc_1 = 0{,}63233\, FO$ etc. Die halbe lichte Spannweite in Fig. 79 ist ferner gleich der lichten Höhe AP, und die so eben bestimmte innere Wölblinie ADO zeigt sich flacher, als ein zugehörender Viertelkreis AD_1O.

Das Gewicht der Wölbmasse zwischen den Perpendikeln DE und dem Scheitel A Fig. 78 fanden wir oben für die Tiefe 1 zu

$$dW = w\,(x = hnS)\,dy\,,$$

wenn $x = AC$, $y = DE$ und $hnS = AB$ genommen wird. Es ergab sich ferner, wenn die innere Wölblinie eine der Massenanordnung entsprechende freie Stützlinie werden soll und der Bogen in seinem Scheitel eine Last Q zu tragen habe,

$$dy = \frac{\frac{C}{w}\,dx}{\sqrt{\left\{\frac{1}{4}\,\frac{Q^2}{w^2} + \frac{C}{\mathrm{w}}\,(x^2 + 2hnS)\right\}}}\,,\ \text{also}$$

$$dW = w\,.\,\frac{\frac{C}{w}\,(w + hnS)\,dx}{\sqrt{\left\{\frac{1}{4}\,\frac{Q^2}{w^2} + \frac{C}{w}\,(x^2 + 2hnSx)\right\}}}\,.$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$W = w\sqrt{\left\{\frac{1}{4}\,\frac{Q^2}{w^2} + \frac{C}{w}\,(x^2 + 2hnSx)\right\}} + Const.$$

für $x = o$ geht auch W in o über, d. g.

$$o = w \,.\, \tfrac{1}{2} \frac{Q}{w} + Const,\ \text{also}$$

$$W = w \left\{ \sqrt{\left\{ + \frac{Q2}{w2} + \frac{C}{w}(x^2 + 2hnSx) \right\}} - \tfrac{1}{2} \frac{Q}{w} \right\}.$$

Hiernach wird der körperliche Inhalt des Brückenbogens, dessen innere Wölblinie eine der Massenanordnung entsprechende freie Stützlinie ist, dafern die Brückenbahn horizontal und der zwischen ihr und der letztern enthaltene Raum gleichmäfsig mit gleich schwerem Materiale erfüllt ist, und wenn ferner im Scheitel eine Last Q liegt, für die Tiefe 1 und für die Abscisse x.

$$\text{XXIX.}\quad K = \sqrt{\left\{ \tfrac{1}{4} \frac{Q2}{w2} + \frac{C}{w}(x^2 + 2hnSx) \right\}} - \tfrac{1}{2} \frac{Q}{w}$$

Befindet sich im Scheitel keine Last, dann erhält man:

$$K = \sqrt{\frac{C}{w}} \,.\, \sqrt{(x^2 + 2hnSx)},\ \text{und}$$

wenn man, wie oben, $w = unS$ setzt,

$$K = nS \,.\, \sqrt{\frac{C}{w}} \,.\, \sqrt{(u^2 + 2hu)}.$$

Der Inhalt des Bogens innerhalb der Perpendikel durch den Scheitel A und durch den Endpunct O wird aus dem vorstehenden Ausdrucke für $u = 1$ und zwar zu

$$K = nS \,.\, \sqrt{\frac{C}{w}} \,.\, \sqrt{(1 + 2h)}$$

erhalten. Es ist nS die ganze lichte Höhe gleich H. Diesen Werth und den für $\sqrt{\frac{C}{w}}$ unter XXVII eingesetzt, giebt endlich

$$\text{XXX.}\quad K = \frac{HS\sqrt{(1 + 2h)}}{2{,}30252\ log.\left\{ \frac{1 + h + \sqrt{(1 + 2h)}}{h} \right\}}.$$

Nicht gar selten, namentlich bei flachgespannten Brückenbogen, dient der ganze zwischen der innern Wölblinie und der horizontalen

Brückenbahn befindliche Raum als Stützbogen. Die Frage: Ist diese Einrichtung vortheilhafter als die üblichere, bei der sich der Stützbogen in einer durch die Festigkeit des Wölbmaterials gebotenen Höhe längs der Richtung der innern Wölblinie fortzieht? kann für die Praxis nicht ohne Wichtigkeit sein, wefshalb wir uns zu deren Beantwortung wenden. Die innere Wölblinie des Brückenbogens Fig. 80 sei eine seiner Massenanordnung entsprechende freie Stützlinie. Diese Annahme kann ohne erheblichen Fehler auch für jene Brückenbogen noch gelten, die bei einer nur geringen Stichhöhe einen Kreisbogen zur innern Wölblinie haben. Der Punct *F* der Scheitelhöhe sei der Mittelpunct des Druckes, der auf diese kommt. Aus dem Mittelpuncte des Druckes der stützenden Scheitelhöhe denken wir uns innerhalb der Horizontale *FI* durch *F* und dem Puncte *L*, dessen Abstand *LD* von *D* gleich *AF* ist, die der Massenanordnung entsprechenden freien Stützlinien *FL*, *FH*, *FG*, *FK*, *FI* gelegt. In der Richtung jeder von diesen Stützlinien wird die Stützung der Brückenbogenmasse allein geschehen können, wobei die Stützlinie *FL*, deren Endpunct *L* von ihrem Scheitel am entferntesten steht, den geringsten, dagegen die Horizontale *FI*, deren Endpunct *I* dem Scheitel *F* am nächsten liegt, den gröfsten, nämlich einen unendlich grofsen Horizontaldruck giebt. Die Stützung der Brückenbogenmasse kann aber auch gleichzeitig nach der Richtung aller der Stützlinien geschehen, die zwischen *L* und *I* enden und aus *F* entspringen. In der Wirklichkeit können zwar, wenn die Stützung der Bogenmasse gleichzeitig nach der Richtung mehrer freier Stützlinien vor sich geht, diese nicht von *F* aus gemeinschaftlich, sondern aus verschiedenen Puncten der Scheitelhöhe, nach Mafsgabe der Vertheilung des Druckes in dieser, entspringen, so dafs die tiefste freie Stützlinie *FL* vom Endpuncte *D* den Abstand $DL = AF$ haben mufs. Bei der fernern Untersuchung der Stützung der Bogenmasse innerhalb der Perpendikel *AB* und *DE* treten uns zunächst die Fragen entgegen: Welche Umstände wirken auf die Stützungsrichtung ein? Kann die Stützung nur in einer freien Stützlinie, oder kann sie gleichzeitig in der Richtung aller möglichen Stützlinien statthaben, die innerhalb *LI* liegen? Mit dem Eintritt einer Stützung der Bogenmasse zwischen *AB* und *DE* mufs eine Verkürzung des Wölbmaterials erfolgen, und von der Fähigkeit dieser

Verkürzung wird es abhängen, ob sich die Stützung selbst über die Höhen *AB* und *DE* vertheilt oder ob sie in der Richtung nur einer freien Stützlinie geschieht. Betrachten wir die wahrscheinlichen Fälle selbst.

Es ist denkbar, bei der Herstellung des Brückenbogens Fig. 80 zwischen *DE* und *AB* eine so dichte und gleichmäfsige Verbindung des Wölbmaterials zu erreichen, dafs sich bei dem Schliefsen desselben für gleiche Höhen der stützenden Scheitelhöhe gleicher Scheiteldruck herausstellt, und dafs sich dabei der Bogen selbst frei über das Lehrgerüste erhebt. Hierbei erfolgt die Stützung in freien zwischen *AB* und *DE* gelegten Stützlinien, wenn das Wölbmaterial in der Richtung dieser Stützlinien frei verschiebbar ist; aber dann kommt auch der gesammte zwischen *A* und *B* statthabende Scheiteldruck gleichmäfsig vertheilt als Horizontaldruck auf *DE*. Der Mittelpunct *G* aller dieser Horizontaldrücke mufs in der halben Höhe von *DE* liegen, so dafs die vertheilte Stützung die Wirkung jener vertritt, die in der Richtung einer durch *F* und *G* gelegten Stützlinie erfolgt. Insofern der Endpunct *L* der freien Stützlinie *LF* von ihrem Scheitel doppelt so entfernt liegt, als der der Stützlinie *GF*, wird auch (M. s. Seite 198) der Scheiteldruck, den die vorausgesetzte Stützungsweise bedingt, doppelt so grofs als wie dann sein, wenn die Stützuug in der Richtung der tiefsten Stützlinie *FL* statt hätte. Alle Stützlinien, die z. E. im ersten Drittel der Höhen *AB* und *DE* liegen, üben mit jenen, die sich im zweiten Drittel eben dieser Höhen befinden, gleichen Horizontaldruck. Die im ersten Drittel befindlichen Stützlinien müssen aber ungleich mehr von der Last des Brückenbogens stützen, als die im zweiten Drittel bestehenden, weil, für dieselbe zu stützende Masse, der Horizontaldruck einer freien Stützlinie im umgekehrten Verhältnisse ihrer Höhe steht, mithin für gleichen Horizontaldruck und bei gleichmäfsiger Anordnung der von zwei Stützlinien zu stützenden Massen die Massenantheile, welche gestützt werden, den Höhen proportional sein müssen. Somit giebt die vorausgesetzte Stützungsweise der Masse des Bogens Fig. 80 stets mehr Horizontaldruck, als die Stützung durch einen Stützbogen, der die innere Wölbfläche selbst bildet. Dasselbe mufs sich auch dann noch herausstellen, wenn, in Folge der Beschaffenheit

des Wölbmaterials oder seiner Zusammenstellung, nicht auf gleiche Höhen von *AB* oder von *DE* gleicher Horizontaldruck kommt.

Bei einem Brückenbogen, der, wie Fig. 81 zeigt, aus Steinen zusammengesetzt ist, die von der innern Wölblinie bis zur Brückenbahn reichen, kann nur eine Zusammendrückung in den Lagerflächen der Wölbsteine in Betracht kommen, weil, wenn man auch die Drückbarkeit des Steinmaterials nicht läugnen kann, diese doch so gering ist, dafs sie gegen die in den Lagerflächen verschwindet. Wir nehmen *T* als den Mittelpunct des Scheiteldruckes an und führen von hier aus verschieden hohe, der Massenanordnung zwischen *AB* und *DN* zugehörende, freie Stützlinien *TD*, *TG*, *TH*, *TI*. In mehr als einer dieser Stützlinien kann die Stützung des Wölbmaterials darum nicht vor sich gehen, weil der zwischen zwei Lagerflächen befindliche Wölbstein als ein starrer, nicht zusammendrückbarer Körper da steht, der mithin auch nur Druck nach einer Richtung hin auf den hinter oder unter ihm liegenden Stein zu üben fähig ist. Eine Folge der Brückenbogenconstruction Fig. 81 mufs die sein, dafs dessen Stützung in der Richtung nur einer freien Stützlinie, nicht aber gleichzeitig in der Richtung mehrer statthaben kann. In welcher Stützlinie erfolgt aber diese Stützung? Zuverläfsig nur in jener, in welcher die geringste Verkürzung eintreten kann. Doch wie finden wir diese? Der Pfeiler, gegen welchen sich die Brückenbogenmasse zwischen *AB* und *DN* Fig. 81 lehne, gestatte eine Zusammendrückung in den Lagerflächen bis zur Vertikale OO_1 hin. Der Druck, der im Scheitel *T* der Stützlinie *TH* stattfinde, in welcher wir die Stützung der Brückenbogenmasse als erfolgend voraussetzen, sei *C*, und der in ihrem Endpuncte nach ihrer Richtung daselbst *D*. Das arithmetische Mittel

$$p = \frac{C + D}{2}$$

zwischen beiden Drücken kann, ohne einen beachtenswerthen Fehler herbeizuführen, als jener angesehen werden, der im Mittel in der Richtung der Stützlinie vorhanden ist. Ebenfalls ohne Fehler können wir die Zusammendrückung in den Lagerflächen dem Drucke direct und der gedrückten Fläche indirect proportional, und die Zusammendrückung selbst für den Druck 1 und die Fläche 1 gleich *z* setzen.

Die Stützlinie TH, in deren Richtung wir vorläufig die Stützung angenommen haben, reicht als gekrümmte Linie nur bis H in der Vertikale durch den Endpunct D der innern Wölblinie; von H aus bis H_1 hin geht sie in der Richtung der Tangente des Punctes H fort. Wir betrachten jetzt den Uebergang des Druckes vom Wölbsteine dh_1 auf den hn_1. Es sollen die Wölbsteine durchaus starre Körper sein. Der Druck p, der im Puncte g vom Wölbsteine dh_1 auf hn_1 übergeht, mufs die Lagerfläche zwischen h_1 und h belasten. Die Form der Fugendrückung, die hieraus erwächst, sei AG Fig. 82 und zwar DG die dem Wölbsteine dh_1 und AF die dem Wölbsteine hn_1 zugehörende Fugenfläche vor der Zusammendrückung; ferner sei GF der innern Wölbfläche und AD der Brückenbahn zugekehrt. Wir nehmen AD parallel GF an, bezeichnen AD mit a, GF mit b, AF mit l, AB mit x, ziehen DH parallel AF, BIC parallel AD und setzen den Druck gleich P, der von D bis C hin auf die Wölbfuge komme. Zunächst ist

$$(2)\ CI = \frac{x(b-a)}{l},\ BC = a + \frac{x(b-a)}{l}.$$

Wächst x um sein Differenzial, dann nimmt auch P um sein Differenzial zu. Das Differenzial von P kommt als Belastung auf eine Fläche von der Länge dx und von der Tiefe 1 des Bogens; die Einheit dieser Fläche trägt

$$\frac{dP}{dx}$$

und bewirkt eine Zusammendrückung von

$$\frac{dP}{dx}.z$$

Diese Zusammendrückung ist aber nach der Figur gleich BC, d. g.

$$\frac{z.dP}{dx} = a + \frac{x(b-a)}{l}.$$

hieraus folgt

$$P = \frac{ax}{z} + \frac{x^2(b-a)}{2zl}.$$

Geht x in die ganze Fugenlänge über, dann mufs sich P in den gesammten Fugendruck p verwandeln, also sein

$$(3)\; p = \frac{al}{z} + \frac{l(b-a)}{2z} = \frac{l}{2z}(b+a).$$

Es sei EK die Richtung der Stützlinie und $EF = \lambda$ ihr Abstand von der innern Wölbfläche. Der Druck, den der Wölbstein von A bis E hin empfängt, ist

$$P_1 = \frac{a}{z}(l-\lambda) + \frac{(b-a)(l-\lambda)^2}{2zl},$$

mithin der Druck, der von der innern Wölbfläche aus bis zur Stützlinie auf den untern Wölbstein übergeht,

$$p - P_1 = P_2 \text{ oder}$$

$$(4)\; P_2 = \frac{l}{z}\left(\frac{b+a}{2}\right) - \frac{a}{z}(l-\lambda) - \frac{(b-a)(l-\lambda)^2}{2zl}.$$

Für die Drücke, die von A nach F hin auf AF kommen, ist der gesammte Fugendruck p, der in dem Abstande $EF = \lambda$ die innere Wölbfläche trifft, der Mitteldruck: es mufs folglich die Summe der statischen Momente aller Drücke gegen AF, bezogen auf einen beliebigen Punct A, gleich sein dem statischen Momente des Druckes p bezogen gleichfals auf A. Nun ist das Differenzial des Druckes bei B

$$dP = \frac{adx}{z} + \frac{(b-a)\,xdx}{lz},$$

der statische Moment dieses Druckes bezogen auf A

$$d.m = \frac{axdz}{z} + \frac{(b-a)\,x^2dx}{lz} \text{ d. g.}$$

$$m = \frac{ax^2}{2z} + \frac{(b-a)\,x^3}{3lz},$$

der statische Moment aller Drücke von A bis F hin

$$m = \frac{al^2}{2z} + \frac{(b-a)\,l^3}{3lz} = \frac{l^2}{6z}(a+2b).$$

Das statische Moment des Druckes p ist

$$p(l-\lambda)\text{, mithin}$$

$$p(l-\lambda = \frac{l2}{6z}(a+2b) \text{ d. g.}$$

$$(5)\ p = \frac{l^2(a+2b)}{6z(l-\lambda)}.$$

Mittels dieser Gleichung und der unter (3) lassen sich a und b bestimmen, und man erhält:

$$b = \frac{pz}{l^2}(4l-6\lambda),$$

$$a = \frac{pz}{l^2}(6\lambda-2l).$$

Nach (2) ist die Fugendrückung in EK, nämlich im Durchschnittspuncte der Stützlinie mit der Fuge, wenn man $EF = \lambda$ und ebenso in Fig. 81 $gh = \lambda$ setzt,

$$t_5 = a + \left(\frac{b-a}{l}\right)(l-\lambda),$$

$$(6)\ t_5 = \frac{4pz}{l^3}(l^2-3l\lambda+3\lambda^2).$$

Der winkelrecht gegen die Lagerfläche geübte Druck ist nicht p, sondern $p \sin\beta_5$, folglich die winkelrechte Zusammendrückung

$$t_5 \sin\beta_5,$$

woraus sich die Drückung in der Richtung der Stützlinie wieder zu

$$t_5 \sin\beta_5 \times \sec(90-\beta) = t_5$$

ergiebt.

Mit Hinsicht auf (6) und auf die gewählte Bezeichnung ist die gesammte Drückung oder Verkürzung in der Richtung der Stützlinie THH_1

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \ldots t_n = v$$

Für jede von T aus mögliche und der Massenanreihung zugehörende freie Stützlinie läfst sich die zugehörende Verkürzung v

Geht x in die ganze Fugenlänge über, dann mufs sich P in den gesammten Fugendruck p verwandeln, also sein

$$(3)\ p = \frac{al}{z} + \frac{l(b-a)}{2z} = \frac{l}{2z}(b+a).$$

Es sei EK die Richtung der Stützlinie und $EF = \lambda$ ihr Abstand von der innern Wölbfläche. Der Druck, den der Wölbstein von A bis E hin empfängt, ist

$$P_1 = \frac{a}{z}(l-\lambda) + \frac{(b-a)(l-\lambda)^2}{2zl},$$

mithin der Druck, der von der innern Wölbfläche aus bis zur Stützlinie auf den untern Wölbstein übergeht,

$$p - P_1 = P_2 \text{ oder}$$

$$(4)\ P_2 = \frac{l}{z}\left(\frac{b+a}{2}\right) - \frac{a}{z}(l-\lambda) - \frac{(b-a)(l-\lambda)^2}{2zl}.$$

Für die Drücke, die von A nach F hin auf AF kommen, ist der gesammte Fugendruck p, der in dem Abstande $EF = \lambda$ die innere Wölbfläche trifft, der Mitteldruck: es mufs folglich die Summe der statischen Momente aller Drücke gegen AF, bezogen auf einen beliebigen Punct A, gleich sein dem statischen Momente des Druckes p bezogen gleichfals auf A. Nun ist das Differenzial des Druckes bei B

$$dP = \frac{adx}{z} + \frac{(b-a)xdx}{lz},$$

der statische Moment dieses Druckes bezogen auf A

$$d.m = \frac{axdz}{z} + \frac{(b-a)x^2dx}{lz} \text{ d. g.}$$

$$m = \frac{ax^2}{2z} + \frac{(b-a)x^3}{3lz},$$

der statische Moment aller Drücke von A bis F hin

$$m = \frac{al^2}{2z} + \frac{(b-a)l^3}{3lz} = \frac{l^2}{6z}(a+2b).$$

Das statische Moment des Druckes p ist

$$p(l-\lambda),\text{ mithin}$$

$$p(l-\lambda = \frac{l2}{6z}(a+2b) \text{ d. g.}$$

$$(5)\ p = \frac{l^2(a+2b)}{6z(l-\lambda)}.$$

Mittels dieser Gleichung und der unter (3) lassen sich a und b bestimmen, und man erhält:

$$b = \frac{pz}{l^2}(4l-6\lambda),$$

$$a = \frac{pz}{l^2}(6\lambda-2l).$$

Nach (2) ist die Fugendrückung in EK, nämlich im Durchschnittspuncte der Stützlinie mit der Fuge, wenn man $EF = \lambda$ und ebenso in Fig. 81 $gh = \lambda$ setzt,

$$t_5 = a + \left(\frac{b-a}{l}\right)(l-\lambda),$$

$$(6)\ t_5 = \frac{4pz}{l^3}(l^2-3l\lambda+3\lambda^2).$$

Der winkelrecht gegen die Lagerfläche geübte Druck ist nicht p, sondern $p\,sin\,\beta_5$, folglich die winkelrechte Zusammendrückung

$$t_5\,sin\,\beta_5,$$

woraus sich die Drückung in der Richtung der Stützlinie wieder zu

$$t_5\,sin\,\beta_5 \times sec\,(90-\beta) = t_5$$

ergiebt.

Mit Hinsicht auf (6) und auf die gewählte Bezeichnung ist die gesammte Drückung oder Verkürzung in der Richtung der Stützlinie THH_1

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \ldots t_n = v$$

Für jede von T aus mögliche und der Massenanreihung zugehörende freie Stützlinie läfst sich die zugehörende Verkürzung v

finden. Von allen diesen Verkürzungen wird sich nur eine als die kleinste ergeben, und in der Richtung der zugehörenden freien Stützlinie mufs die Massenstützung vor sich gehen. Jeder besondere Fall, für welchen wir in vorbemerkter Weise die Richtung der Stützung aufsuchen, lehrt uns, dafs die der Brückenbahn zugekehrten Enden der Wölbsteine einen nur geringen Antheil an der Stüzzung nehmen und die ganze Form dazu beiträgt, den Horizontalschub des Bogens zu vergröfsern.

Werden die äufsern Enden der Wölbsteine, wie diefs in Fig. 81 durch punctirte Linien angedeutet ist, aus mehrern Stücken zusammengesetzt, dann hören sie auf, mit den innern Wölbsteinen gemeinschaftlich zu stützen, oder der Druck in der Richtung der Stützlinie geht auf diese nicht über, weil sie eine viel gröfsere Fugenzusammendrückung gestatten, als die innern Wölbsteine. Das eben Bemerkte gilt auch dann, wenn von einem Stützbogen aus Wölbsteine als Binder hervorragen und zwischen diese ein Material eingesetzt wird, das mehr Fugen giebt als der eigentliche Wölbbogen, d. h. die Ausmauerung der hervorragenden Wölbsteine kann nicht zum Stützbogen gerechnet werden.

Noch häufiger als die Anordnung der Wölbsteine in Fig. 81 ist die in Fig. 83 dargestellte angewendet. Die Wirkung einer solchen Zusammenstellung kann, in Beziehung auf Stützungsrichtung, eine verschiedene sein. Die Wölbsteine werden allein stützen und die Lage der Stützlinie wird wesentlich nur von der kürzesten Fuge *DC* abhängen, wenn der Schlufs des Bogens ohne Mitwirkung der Horizontalschichten *a*, *b*, *c* u. s. f. erfolgt, in welchem Falle auch die grofse Länge der Wölbsteine bei *EF* ohne Bedarf ist. Der Bogen wird sich unter Mitwirkung der Horizontalschichten stützen, wenn diese vor dem Bogenschlufs stark eingespannt wurden. Es ist möglich, durch eben diese Horizontalschichten die Stützlinie beträchtlich hoch empor zu ziehen, also die Wölbsteine gegen die innere Wölbfläche hin zu entlasten. Mit Vortheil wird es jedoch nur selten geschehen, denn je flacher die Stützlinie wird, um so mehr wächst der Horizontalschub und der Druck in der Richtung der Stützlinie selbst.

Fassen wir die Erörterungen über flache Brückenbögen zusammen, bei welchen auf eine gröfsere oder geringere Entfernung vom Scheitel die Wölbsteine von der innern Wölbfläche bis zur Brücken-

bahn hin reichen, so lehren sie uns, dafs die Vortheile, welche sie gewähren, nur höchst ausnahmsweise die Kosten rechtfertigen dürften, die die Beschaffung langer Wölbsteine veranlassen, ja dafs sie oft, und zwar ohne Erfordernifs, einen grofsen Horizontalschub herbeiführen, der nur nachtheilig auf das Bestehen des Brückenbogens einwirkt.

Es ist ein Brückenbogen denkbar, der, wie Fig. 84 einen solchen darstellt, durchaus gleiche lothrechte Höhe hat. Von welcher Beschaffenheit die freie Stützlinie eines derartigen Brückenbogens ist, wollen wir jetzt untersuchen. Zu diesem Ende sei die freie Stützlinie eines solchen *TBO* Fig. 84, *T* ihr Scheitel, für einen Punct *B* derselben die lothrechte Abscisse *TD* gleich x, die horizontale Ordinate *DB* gleich y, ihr Richtungswinkel gleich α_n und ferner die durchaus gleiche vertikale Bogenhöhe $EF = GH$ etc. gleich H. Bezeichnen wir das Gewicht des Bogens für die Tiefe 1, welches sich innerhalb der Perpendikel durch den Scheitel *T* und durch den Punct *B* befindet, mit W, und das Eigengewicht des Wölbmaterials mit w, dann ist:

$$dW = wHdy, \text{ d. g.}$$

$$W = wHy.$$

Ferner ist für den Scheiteldruck *C* der Stützlinie nach Seite 15

$$tg\alpha_n = \frac{W}{C} = \frac{wHy}{C}, \text{ sowie } tg\alpha_n = \frac{dx}{dy}, \text{ mithin}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{wHy}{C} \text{ d. g.}$$

$$dx = \frac{wH}{C} ydy,$$

$$x = \frac{wH}{C} y^2, \text{ also}$$

$$\text{XXXI.} \quad y = \sqrt{\frac{Cx}{wH}}.$$

Diese Gleichung ist übereinstimmend mit der Gleichung einer Parabel

$$y = \sqrt{px};$$

mithin ist die freie Stützlinie eines Brückenbogens, der durchaus gleiche vertikale Höhe hat, eine Parabel mit dem Parameter

$$p = \frac{C}{wH}.$$

Ein Brückenbogen, der durchaus gleiche Höhe hat, dem mufs eine gekrümmte Brückenbahn entsprechen, wenn die innere Wölblinie eine krumme sein soll; dagegen mufs die letztere eine gerade Linie werden, die Brücke also scheidrechte Bögen bekommen, wenn deren Bahn ebenfalls horizontal werden soll. Brückenbögen von durchaus gleichem rechtem Abstand der innern Wölbfläche von der Brückenbahn können wir nicht als Bedürfnifs anerkennen, wefshalb wir es unterlassen, hier auf eine nähere Erörterung ihrer Stützungsverhältnisse einzugehen.

Mehrmals haben wir es schon erwähnt, dafs es Gebrauch ist, die Tragbögen nach deren Schliefsung auszurüsten, bevor sie soweit hintermauert oder hinterfüllt sind, als diefs später geschehen soll. Die Ausrüstung wird offenbar ohne Benachtheiligung für die Standfähigkeit des Bogens nur dann geschehen können, wenn sich derselbe frei zu tragen vermag, d. h. wenn es eine freie Stützlinie für die Bogenmasse giebt, die innerhalb der innern und äufsern Wölblinie des Bogens zu liegen kommt. Das Verfahren, das wir auf Seite 233 als ein allgemeines zur Bestimmung der vorläufigen freien Stützlinie einer beliebigen Massenanordnung gegeben haben, ist auch zur Auffindung der freien Stützlinie eines Tragbogens an sich brauchbar, wie wir diefs durch ein Beispiel auf Seite 240 erläutert haben. Das dort angegebene Verfahren ist zwar für jede Form eines Tragbogens anwendbar, doch etwas umständlich. Es kürzt sich die auf Seite 233 durchgeführte Bestimmung der freien Stützlinie eines Tragbogens in besondern Fällen und ganz besonders dann ab, wenn dessen innere und äufsere Wölblinie Kreisbögen sind. Solche Bögen sind aber die allerüblichsten, wefshalb wir für die Bestimmung ihrer freien Stützlinie noch eine besondere Anleitung hier anschliefsen wollen. Der Stützbogen, dessen Stützlinie *TPO* wir vorerst im Allgemeinen bestimmen werden, sei *AK* Fig. 85, der $AC = r$ zum Radius der innern und *BD* gleich *R* zum Radius der äufsern Wölblinie habe. Für den Punct *P* der freien Stützlinie *TPO* des Stütz-

bogens sei der lothrechte Abstand von ihrem Scheitel T gleich x und der horizontale Abstand von eben diesem Puncte gleich y. Das durch P gefällte Perpendikel schneide von der äufsern Wölblinie den Bogen BG ab, der für den Radius 1 gleich ψ sein soll, und von der innern Wölblinie einen Bogen AE, der für den Radius 1 gleich μ sein mag. Gemäfs dieser Annahme ist die Länge des durch P gehenden Perpendikels von der innern bis zur äufsern Wölblinie

$$HF = HD - FD = R\cos\psi - r\cos\mu - rn,$$

wenn CD gleich rn gesetzt wird. Ferner ist der horizontale Abstand des Punctes P der freien Stützlinie von ihrem Scheitel

$$y = R\sin\psi = r\sin\mu.$$

Den Inhalt des Bogens innerhalb der Perpendikel AB und EG für die Tiefe 1 gleich wf gesetzt, wobei w das Eigengewicht des Wölbmaterials und f die vertikale Bogenfläche innerhalb der genannten Grenzen darstellt, giebt

$$w.df = w\,(R\cos\psi - r\cos\mu - rn)\,dy \text{ oder}$$

wenn für dy sein Werth

$$R\cos\psi\,d\psi = r\cos\mu\,d\mu$$

eingesetzt und hierauf integrirt wird

$$w.df = w\left\{R\cos\psi.R\cos\psi d\psi - r\cos\mu.r\cos\mu\,d\mu - rn.r\cos\mu\,d\mu\right\},$$

$$W = wf = w\left\{\frac{R2}{2}(\sin\psi\cos\psi + \psi) - \frac{r2}{2}(\sin\mu\cos\mu + \mu) - r^2 n\sin\mu\right\}.$$

Wenn die Richtung der freien Stützlinie bei P mit einer Horizontale den Winkel α_n einschliefst und wenn der horizontale oder Scheiteldruck mit C dargestellt wird, ist bekanntlich

$$\frac{W}{C} = tg\,\alpha_n = \frac{dx}{dy} \text{ d. g.}$$

$$dx = \frac{W}{C}\,dy.$$

Hierein die Werthe für dy und W eingesetzt und darauf integrirt, giebt

$$x = \frac{w}{2C}\left\{R^3\left(-\tfrac{1}{3}\cos^3\psi + \cos\psi + \psi\sin\psi\right) - r^3\left(-\tfrac{1}{3}\cos^3\mu + \cos\mu + \mu\sin\mu\right) - r^3 n \sin^2\mu + Const\right\};$$

Für $\psi = \mu = o$ mufs auch x in o übergehen, wornach wird

$$x = \frac{w}{2C}\left\{R^3\left(-\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}\cos^3\psi + \cos\psi + \psi\sin\psi\right) + r^3\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cos^3\psi - \cos\mu - \mu\sin\mu\right) - r^3 n \sin^2\mu\right\}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{w}{2C}\left\{r^3\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cos^3\mu - \cos\mu - \mu\sin\mu\right) - R^3\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cos^3\psi - \cos\psi - \psi\sin\psi\right) - r^3 n \sin^2\mu\right\}.$$

Es ist

$R = r(1+h+n)$; $rn = R - r(1+h)$; $r^2\sin^2\mu = R^2\sin^2\psi$, folglich
$r^3 n\sin^2\mu = rn \cdot r^2\sin^2\mu = \left(R - r(1+h)\right) R^2\sin^2\psi = R^3\sin^2\psi$;

$$-\cos\mu\left(1 - \tfrac{1}{3}(1 - \sin^2\mu)\right) = -\cos\mu\left(\frac{2+\sin^2\mu}{3}\right);$$

$$-r(1+h)R\sin^2\psi = R^3\sin^2\psi - r^3(1+h)\sin^2\mu,$$

wenn die Scheitelhöhe

$$AB = rh$$

gesetzt wird. Mit Berücksichtigung der eben gefundenen Werthe geht die letzte Gleichung für die Abscisse über in

$$\text{XXXII. } x = \frac{w}{2C}\left\{r^3\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu + \tfrac{1}{3} - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu - \tfrac{1}{2}\mu\sin\mu\right\} - R^3\left\{\tfrac{1}{3} - \left(\frac{2+\sin^2\psi}{6}\right)\cos\psi - \tfrac{1}{2}\psi\sin\psi + \tfrac{1}{2}\sin^2\psi\right\}\right\},$$

für welche Gleichung immer noch besteht

$$R\sin\psi = r\sin\mu.$$

Die Auflösung der vorstehenden Gleichung ist etwas umständlich, wefshalb wir deren Werthe innerhalb der am häufigsten vorkommenden Grenzen in nachstehender Tabelle G folgen lassen.

Wenn in die Formel XXXII unter S. 262, welche der Tabelle *G.* zum Grunde liegt, R als Vielfaches von r eingesetzt wird, erhält man, den Werth der Parenthese mit N_μ bezeichnet,

$$x_\mu = \frac{wr^3}{C} \cdot N_\mu.$$

Handelt es sich zunächst um die Bestimmung einer vorläufigen freien Stützlinie für die vorgeschriebene Massenanordnung, dann ist der Factor $\frac{w}{C}$ beliebig zu wählen und auch gleich 1 zu setzen. (M. s. Seite 198). Thun wir diefs, dann wird

$$x_\mu = r^3 N_\mu.$$

Für den Radius r der innern Wölblinie geht die letzte Gleichung über in

$$x_\mu = N_\mu.$$

Die Werthe für N_μ nun giebt die Tabelle *G* an, welche Werthe auch, behufs der bequemen bildlichen Darstellung einer vorläufigen freien Stützlinie der gegebenen Massenanordnung, zufolge S. 198, durchgängig mit einem beliebigen Factor multiplicirt werden können.

Die practische Regel, welche die Verwendung der Tabelle *G.* zur Bestimmung der freien Stützlinie eines Brückenbogens darstellt, dessen innere und dessen äufsere Wölblinie Kreisbögen sind, ist folgende:

Die Werthe jener Spalte aus der Tabelle *G.*, die dem Radius R der äufsern Wölblinie für den Radius r der innern Wölblinie zugehören, werden für die Höhe h des Wölbbogens im Scheitel, bezogen auf den Radius 1 der innern Wölblinie, entwickelt, mit irgend einem Factor multiplicirt und diese Zahlenwerthe als Abscissen jener Puncte einer vorläufigen freien Stützlinie angetragen, welche in Perpendikeln liegen, deren Abstand vom Scheitel A der innern Wölblinie auf einander folgend beträgt: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 90 Grad.

Aus einer so entwickelten freien Stützlinie der Massenanordnung eines Bogens ist leicht jene durch Construction abzuleiten, die vom Scheitel aus mit der mittlern Wölblinie noch am innigsten zusammenfällt etc.

$$x = \frac{w}{2C}\left\{R^3\left(-\tfrac{1}{3}\cos^3\psi + \cos\psi + \psi\sin\psi\right) - r^3\left(-\tfrac{1}{3}\cos^3\mu + \cos\mu + \mu\sin\mu\right) - r^3 n\sin^2\mu + Const\right\}.$$

Für $\psi = \mu = o$ muſs auch x in o übergehen, wornach wird

$$x = \frac{w}{2C}\left\{R^3\left(-\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}\cos^3\psi + \cos\psi + \psi\sin\psi\right) + r^3\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cos^3\psi - \cos\mu - \mu\sin\mu\right) - r^3 n\sin^2\mu\right\}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{w}{2C}\left\{r^3\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cos^3\mu - \cos\mu - \mu\sin\mu\right) - R^3\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\cos^3\psi - \cos\psi - \psi\sin\psi\right) - r^3 n\sin^2\mu\right\}.$$

Es ist

$R = r(1+h+n)$; $rn = R - r(1+h)$; $r^2\sin^2\mu = R^2\sin^2\psi$, folglich
$r^3 n\sin^2\mu = rn \,.\, r^2\sin^2\mu = \big(R - r(1+h)\big)\,R^2\sin^2\psi = R^3\sin^2\psi$;

$$-\cos\mu\left(1 - \tfrac{1}{3}(1 - \sin^2\mu)\right) = -\cos\mu\left(\frac{2+\sin^2\mu}{3}\right);$$

$$-\,r(1+h)\,R\sin^2\psi = R^3\sin^2\psi - r^3(1+h)\sin^2\mu,$$

wenn die Scheitelhöhe

$$AB = rh$$

gesetzt wird. Mit Berücksichtigung der eben gefundenen Werthe geht die letzte Gleichung für die Abscisse über in

$$\text{XXXII. } x = \frac{w}{2C}\left\{r^3\left\{\left(\frac{1+h}{2}\right)\sin^2\mu + \tfrac{1}{3} - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu - \tfrac{1}{2}\mu\sin\mu\right\} - R^3\left\{\tfrac{1}{3} - \left(\frac{2+\sin^2\psi}{6}\right)\cos\psi - \tfrac{1}{2}\psi\sin\psi + \tfrac{1}{2}\sin^2\psi\right\}\right\},$$

für welche Gleichung immer noch besteht

$$R\sin\psi = r\sin\mu.$$

Die Auflösung der vorstehenden Gl[illegible]
lich, weſshalb wir deren Werthe i[illegible]
kommenden Grenzen in nachsteh[illegible]

Wenn in die Formel XXXII unter S. 262, welche der Tabelle *G.* zum Grunde liegt, R als Vielfaches von r eingesetzt wird, erhält man, den Werth der Parenthese mit N_μ bezeichnet,

$$x_\mu = \frac{wr^3}{C} \cdot N_\mu.$$

Handelt es sich zunächst um die Bestimmung einer vorläufigen freien Stützlinie für die vorgeschriebene Massenanordnung, dann ist der Factor $\frac{w}{C}$ beliebig zu wählen und auch gleich 1 zu setzen. (M. s. Seite 198). Thun wir diefs, dann wird

$$x_\mu = r^3 N_\mu.$$

Für den Radius r der innern Wölblinie geht die letzte Gleichung über in

$$x_\mu = N_\mu.$$

Die Werthe für N_μ nun giebt die Tabelle *G* an, welche Werthe auch, behufs der bequemen bildlichen Darstellung einer vorläufigen freien Stützlinie der gegebenen Massenanordnung, zufolge S. 198, durchgängig mit einem beliebigen Factor multiplicirt werden können.

Die practische Regel, welche die Verwendung der Tabelle *G.* zur Bestimmung der freien Stützlinie eines Brückenbogens darstellt, dessen innere und dessen äufsere Wölblinie Kreisbögen sind, ist folgende:

Die Werthe jener Spalte aus der Tabelle *G.*, die dem Radius R der äufsern Wölblinie für den Radius r der innern Wölblinie zugehören, werden für die Höhe h des Wölbbogens im Scheitel, bezogen auf den Radius 1 der innern Wölblinie, entwickelt, mit irgend einem Factor multiplicirt und diese Zahlenwerthe als Abscissen jener Puncte einer vorläufigen freien Stützlinie angetragen, welche in Perpendikeln liegen, deren Abstand vom Scheitel A der innern Wölblinie auf einander folgend be[illegible]t: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80 Grad [illegible] der Massenanord[illegible] abzuleiten, die [illegible] einer so entwickelten freien Stützlinie [illegible] noch am innigsten zu[illegible] [illegible]s Bogens ist leicht jene durch Construction [illegible] der mittlern Wölblinie [illegible]

Tabelle

Werthe der Gleichung $x = \frac{w}{2C} \left\{ r^3 \left\{ \left(\frac{1+h}{2} \right) \sin^2\mu + \frac{1}{3} - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6} \right) \right. \right.$

	$R = 1{,}08r$	$R = 1{,}10r$	$R = 1{,}12r$
$x_5 =$	0,000000+0,003798 h	0,000000+0,003798 h	0,000000+0,003798 h
$x_{10} =$	0,000003+0,015077 h	0,000003+0,015077 h	0,000004+0,015077 h
$x_{15} =$	0,000014+0,033494 h	0,000017+0,033494 h	0,000021+0,033494 h
$x_{20} =$	0,000044+0,058489 h	0,000053+0,058489 h	0,000063+0,058489 h
$x_{25} =$	0,000103+0,089303 h	0,000127+0,089303 h	0,000150+0,089303 h
$x_{30} =$	0,000209+0,125 h	0,000255+0,125 h	0,000300+0,125 h
$x_{40} =$	0,000601+0,206588 h	0,000735+0,206588 h	0,000864+0,206588 h
$x_{50} =$	0,001299+0,293412 h	0,001587+0,293412 h	0,001863+0,293412 h
$x_{60} =$	0,002291+0,375 h	0,002793+0,375 h	0,003272+0,375 h
$x_{70} =$	0,003432+0,441511 h	0,004173+0,441511 h	0,004877+0,441511 h
$x_{80} =$	0,004416+0,484923 h	0,005353+0,484923 h	0,006239+0,484923 h
$x_{90} =$	0,004714+0,5 h	0,005837+0,5 h	0,006797+0,5 h

	$R = 1{,}20r$	$R = 1{,}22r$	$R = 1{,}24r$
$x_5 =$	0,000000+0,003798 h	0,000000+0,003798 h	0,000001+0,003798 h
$x_{10} =$	0,000006+0,015077 h	0,000007+0,015077 h	0,000007+0,015077 h
$x_{15} =$	0,000031+0,033494 h	0,000034+0,033494 h	0,000036+0,033494 h
$x_{20} =$	0,000098+0,058489 h	0,000106+0,058489 h	0,000114+0,058489 h
$x_{25} =$	0,000233+0,089303 h	0,000252+0,089303 h	0,000270+0,089303 h
$x_{30} =$	0,000463+0,125 h	0,000501+0,125 h	0,000538+0,125 h
$x_{40} =$	0,001329+0,206588 h	0,001434+0,206588 h	0,001536+0,206588 h
$x_{50} =$	0,002858+0,293412 h	0,003083+0,293412 h	0,003300+0,293412 h
$x_{60} =$	0,004990+0,375 h	0,005375+0,375 h	0,005745+0,375 h
$x_{70} =$	0,007376+0,441511 h	0,007934+0,441511 h	0,008468+0,441511 h
$x_{80} =$	0,009364+0,484923 h	0,010058+0,484923 h	0,010722+0,484923 h
$x_{90} =$	0,010166+0,5 h	0,010911+0,5 h	0,011621+0,5 h

G.

$$\cos\mu - \tfrac{1}{2}\mu\sin\mu\Big\} - R^3\Big\{\tfrac{1}{3} - \left(\frac{2+\sin^2\psi}{6}\right)\cos\psi - \tfrac{1}{2}\psi\sin\psi + \tfrac{1}{2}\sin^2\psi\Big\}\Big\}.$$

$R = 1{,}14\,r$	$R = 1{,}16\,r$	$R = 1{,}18\,r$
0,000000 + 0,003798 *h*	0,000000 + 0,003798 *h*	0,000000 + 0,003798 *h*
0,000005 + 0,015077 *h*	0,000005 + 0,015077 *h*	0,000006 + 0,015077 *h*
0,000024 + 0,033494 *h*	0,000027 + 0,033494 *h*	0,000029 + 0,033494 *h*
0,000072 + 0,058489 *h*	0,000081 + 0,058489 *h*	0,000090 + 0,058489 *h*
0,000172 + 0,089303 *h*	0,000193 + 0,089303 *h*	0,000213 + 0,089303 *h*
0,000343 + 0,125 *h*	0,000385 + 0,125 *h*	0,000425 + 0,125 *h*
0,000988 + 0,206588 *h*	0,001106 + 0,206588 *h*	0,001219 + 0,206588 *h*
0,002128 + 0,293412 *h*	0,002381 + 0,293412 *h*	0,002624 + 0,293412 *h*
0,003730 + 0,375 *h*	0,004168 + 0,375 *h*	0,004588 + 0,375 *h*
0,005547 + 0,441511 *h*	0,006185 + 0,441511 *h*	0,006793 + 0,441511 *h*
0,007080 + 0,484923 *h*	0,007879 + 0,484923 *h*	0,008639 + 0,484923 *h*
0,007704 + 0,5 *h*	0,008565 + 0,5 *h*	0,009385 + 0,5 *h*

$R = 1{,}26\,r$	$R = 1{,}28\,r$	$R = 1{,}30\,r$
0,000001 + 0,003798 *h*	0,000001 + 0,003798 *h*	0,000001 + 0,003798 *h*
0,000008 + 0,015077 *h*	0,000008 + 0,015077 *h*	0,000009 + 0,015077 *h*
0,000039 + 0,033494 *h*	0,000042 + 0,033494 *h*	0,000044 + 0,033494 *h*
0,000121 + 0,058489 *h*	0,000128 + 0,058489 *h*	0,000135 + 0,058489 *h*
0,000287 + 0,089303 *h*	0,000303 + 0,089303 *h*	0,000319 + 0,089303 *h*
0,000573 + 0,125 *h*	0,000607 + 0,125 *h*	0,000639 + 0,125 *h*
0,001637 + 0,206588 *h*	0,001737 + 0,206588 *h*	0,001835 + 0,206588 *h*
0,003509 + 0,293412 *h*	0,003711 + 0,293412 *h*	0,003906 + 0,293412 *h*
0,006100 + 0,375 *h*	0,006442 + 0,375 *h*	0,006772 + 0,375 *h*
0,008982 + 0,441511 *h*	0,009478 + 0,441511 *h*	0,009958 + 0,441511 *h*
0,011356 + 0,484923 *h*	0,011960 + 0,484923 *h*	0,012536 + 0,484923 *h*
0,012296 + 0,5 *h*	0,012937 + 0,5 *h*	0,013544 + 0,5 *h*

Um die Benutzung der Tabelle *G.* noch näher darzuthun, wollen wir mittels derselben die freie Stützlinie und die Brechungspuncte eines Bogens *AESB* Fig. 86 finden, dessen äufsere Wölblinie mit dem Radius $R = 1,2r$ mit der innern kreisförmigen Wölblinie concentrisch ist, dessen Scheitelhöhe *AB* folglich $0,2r$, also $h = 0,2$ beträgt. Die Werthe der Tabelle *G.* für $R = 1,2r$ geben, $h = 0,2$ gesetzt und mit 10 multiplicirt,

$$x_5 = 0,000000 + 0,003798\,h = 0,0008;\ 0,008;$$
$$x_{10} = 0,000006 + 0,015077\,h = 0,0030;\ 0,030;$$
$$x_{15} = 0,000031 + 0,033494\,h = 0,0067;\ 0,067;$$
$$x_{20} = 0,000098 + 0,058489\,h = 0,0118;\ 0,118;$$
$$x_{25} = 0,000233 + 0,089303\,h = 0,0181;\ 0,181;$$
$$x_{30} = 0,000463 + 0,125\,h = 0,0255;\ 0,255;$$
$$x_{40} = 0,001329 + 0,206588\,h = 0,0426;\ 0,426;$$
$$x_{50} = 0,002858 + 0,293412\,h = 0,0615;\ 0,615;$$
$$x_{60} = 0,004990 + 0,375\,h = 0,0800;\ 0,800;$$
$$x_{70} = 0,007376 + 0,441511\,h = 0,0957;\ 0,957;$$
$$x_{90} = 0,010166 + 0,5\,h = 0,1102;\ 0,102.$$

Trägt man diese Werthe auf einander folgend von der Horizontale *CI* aus auf die Perpendikel durch die Puncte *a*, *b*, *c*, *d* ... der innern Wölblinie, welche vom Scheitel der letztern um

$$\overset{\frown}{Aa} = 5^0,\ \overset{\frown}{Ab} = 10^0,\ \overset{\frown}{Ac} = 15^0 \text{ etc.}$$

abstehen, und verbindet die sich ergebenden Puncte a_2, b_2, c_2 ... *O*, so hat man die gesuchte vorläufige freie Stützlinie. Aus dieser nun läfst sich die geforderte freie Stützlinie, nämlich die, welche vom Scheitel ab mit der mittlern Wölblinie des Bogens durch *C* noch am innigsten zusammenfällt, herstellen, wenn man durch Versuchsconstructionen mittels eines Proportionalwinkels

$$g_1g_2 : f_1f_2 : d_1d_2 : \text{etc.} = g_1g_3 : f_1f_3 : d_1d_3 \text{ etc.}$$

macht. So ergiebt sich denn, dafs eine durch den Mittelpunct *C* der Scheitelhöhe *AB* gelegte freie Stützlinie des Bogens *AS* Fig. 85 vom Puncte *C* des Scheitels aus bis zu einem Perpendikel durch *H*, dessen Abstand vom Scheitel der innern Wölblinie gegen 40^0 beträgt, sehr nahe mit der mittlern Wölblinie *CHF* des Bogens zusammenfällt. Findet der Bogen *AS* vom Puncte *H* aus bis *S* hin horizontale Hinter-

stützung, was durch eine bis H emporgehende Hintermauerung erreicht wird, dann kann und mufs unter Umständen auch die Stützung des Bogens von H aus in der Richtung der mittlern Wölblinie HF, also in einer vorgeschriebenen Stützlinie, erfolgen.

Geschieht die Stützung der Masse des Wölbbogens Fig. 85 von der Scheitelhöhe AB in der Richtung der mittlern Wölblinie und zwar bis zu irgend einem Puncte H hin, dann bleibt der Horizontaldruck völlig ungeändert, gleichviel, ob von H aus die fernere Stützung in der Richtung HO_1 der freien Stützlinie oder wesentlich in der mittlern Wölblinie HF, also überhaupt in der Richtung einer vorgeschriebenen Stützlinie statt hat. (M. s. Seite 33 und 42.) Der durch Zeichnung gefundene Endpunct O_1 der freien Stützlinie, welche vom Scheitel aus mit der mittlern Wölblinie zusammenfällt, hat von der Horizontale durch C den vertikalen Abstand IO_1. Durch Messung erhält man

$$IO_1 = 0{,}531\,r.$$

Eben dieser Endpunct O_1 der freien Stützlinie liegt in einem Perpendikel, das vom Scheitel der innern Wölblinie um 90^0 absteht. Somit geht die Gleichung XXXII auf Seite 262, wenn in dieselbe der zu

$$\mu = 90^0,\ R = 1{,}2\,r \text{ und } h = 0{,}2$$

gehörende Werth der Tabelle G. eingesetzt wird, über in

$$0{,}531\,r = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}1102\right\}$$

und hieraus folgt der Horizontalschub, der entsteht, wenn die Stüzzung des Bogens Fig. 85 vom Scheitel aus in der oben bestimmten und mit der mittlern Wölblinie nahe zusammenfallenden freien Stützlinie geschieht, zu

$$C = wr^2 . \frac{0{,}1102}{0{,}531} = 0{,}2075\,wr^2.$$

In dem Augenblicke, wo der Bogen AS Fig. 85 mit dem ihm zugehörenden, hier aber nicht dargestellten, Gegenbogen durch Fugenöffnung wieder zu brechen beginnt, öffnet sich derselbe in A und stützt sich schliefslich noch bei B. Hiermit öffnet sich gleich-

zeitig, gemäfs der Erfahrung, in jeder Bogenhälfte eine Fuge nach aufsen, etwa von G aus und ferner eine tiefer liegende nach innen. Während diefs nun geschieht, mufs sich die Bogenmasse in einer freien Stützlinie, deren Scheitel in B liegt und die zugleich durch den Brechungspunct G hindurchgeht, stützen. Der Brechungspunct G kann kein anderer als der sein, in welchem die durch B gelegte freie Stützlinie die innere Wölblinie tangirt, und diese mufs zugleich durch ihre fernere Richtung die Lage des folgenden Brechungspunctes bestimmen. Der Punct G wird sich ergeben, wenn wir die bereits oben bestimmte vorläufige freie Stützlinie Cg_2O der Massenanordnung des Bogens von B aus als BO_3 antragen und zu dieser mittels eines Proportionalwinkels durch Versuchsconstructionen jene von B ausgehende freie Stützlinie bestimmen, welche die innere Wölblinie tangirt. Die Zeichnung giebt diese Linie als BGO_2 und den Berührungs- oder innersten Brechungspunct als G, der vom Scheitel der innern Wölblinie um nahe 60^0, auf der innern Wölblinie gemessen, absteht.

Die in eben bemerkter Weise gefundene freie Stützlinie durchschneidet bei O_2 das durch den Anfangspunct E der innern Wölblinie gefällte Perpendikel und die Messung ergiebt den lothrechten Abstand dieses Punctes von B zu

$$O_2K = 0{,}969.$$

Wie vorstehend finden wir hieraus den Horizontaldruck, den die Stützung in der Richtung BGO_2 bedingt, zu

$$C_1 = wr^2 . \frac{0{,}1102}{0{,}969} = 0{,}1137\ wr^2.$$

Die äufsere Wölblinie des gewölbten Bogens AS Fig. 85 umfasst vom Scheitel bis zur Vertikale durch den Anfangspunct E der innern Wölblinie nahe $56^0\ 27'$; demzufolge ergiebt sich das Gewicht der Bogenmasse zwischen den Vertikalen durch A und E für die Tiefe 1 zu

$$W = 0{,}2556\ wr^2.$$

Nach Seite 15 ist die Tangente des Richtungswinkels der freien Stützlinie BO_2 in O_2

$$tg\alpha_{u} = \frac{W}{C}, \text{ also } tg\mu = \frac{C}{W} = \frac{0{,}1137\,wr^2}{0{,}2556\,wr^2} = 0{,}444.$$

Machen wir $O_2U = 1$, ferner das durch U gehende Perpendikel UV gleich 0,444 und ziehen VO_2X, so mufs diese Linie die von O_2 ausgehende Richtung des Bogendruckes im Augenblicke des Bruches darstellen. Es liegt diese Richtung innerhalb der Höhe ES des Bogenanfanges. Stützt sich der Bogen bei ES gegen eine unverrückbare Unterlage und ist ebenso die andere Bogenhälfte gestützt: dann kann ein Bruch des Bogens Fig. 85 nur dann zu Stande kommen, wenn der Bogen auf ES von E nach S rutscht. Steht dagegen der Bogenanfang ES auf einem Schafte oder Pfeiler Sm, dann wird nicht die in der Nähe des Durchschnittspunctes R der Richtung O_2X mit der äufsern Seite Sn liegende Fuge, sondern eine Fuge nm die zu G gehörende zweite Brechungsfuge abgeben, für deren Endpunct n das statische Moment der über nm liegenden Masse des Körpers $nmEqSn$ gleich oder etwas kleiner sein mufs, als das statische Moment des in der Richtung O_2X bestehenden Bogendruckes für den nämlichen Kantungspunct n ist. Diese Bedingung ist dargestellt durch

$$D \times pn \geqq M \times nl,$$

wenn D den Bogendruck in der Richtung O_2X, pn den rechtwinkligen Abstand desselben vom Kantungspuncte n, ferner M die Pfeilermasse $nmEqSn$ und nl den horizontalen Abstand ihres Schwerpunctes vom Kantungspuncte darstellt.

Der Schaft oder Pfeiler Sm Fig. 86 stehe so fest, dafs er vom Bogenschub nicht umgeworfen werden kann. Es liegen innerhalb der Anfänge, die dem Bogen SB und seinem Gegenbogen zugehören, nur drei Brechungspuncte, nämlich einer im Scheitel B, einer bei G und einer in der Bogenhälfte, die in der Figur nicht dargestellt ist und welcher sich mit dem letztern in gleicher Lage befindet, wenn der Gegenbogen wie Bogen SA gestaltet ist. Bei schwachem Materiale kann wohl eine Zermalmung desselben in den genannten Puncten eintreten und aus der hiermit in Verbindung stehenden Bogenverkürzung ein Niederbruch, nicht aber ein Einsturz durch Kantung entspringen. Eben defshalb wird bei angemessen festem Materiale und bei einem sichern Stande des Pfeilers Sm für den Bogenschub, das Lehrgerüste, über welchem der Bogen aufgeführt

und geschlossen wurde, wegzunehmen sein, bevor man jenen mit einer Hintermauerung versieht, ohne dafs ein Niederbruch des Bogens folgt. Eine andere Frage aber ist die: Ob die Ausrüstung des Bogens ohne Hintermauerung, mit Hinsicht auf dessen Bestimmung, räthlich genannt werden kann? Diese Frage können wir nur mit Nein beantworten. Der Bogen soll und mufs, wenigstens vom Scheitel ab, alle Massen nahezu in der Richtung seiner mittlern Wölblinie stützen, um das Material des gewölbten Bogens gleichmäfsig zu belasten und um den gröfsten Grad von Steifigkeit für seine Höhe zu erlangen. Dieser Zweck aber wird sehr genähert erreicht, wenn der Bogen vor seiner Ausrüstung wenigstens bis zur Höhe des Punctes *H* der mittlern Wölblinie hintermauert wird, in welcher jene freie Stützlinie der Massenanordnung letztere tangirt, die vom Mittelpuncte *C* der Scheitelhöhe ausgehend mit der mittlern Wölblinie möglichst innig zusammenfällt. Ist die Hintermauerung in der eben genannten Beschaffenheit ausgeführt, bevor man das Lehrgerüste entfernt, dann mufs auch die Stützung sehr nahe zwischen *D* und *H* in der Richtung der mittlern Wölblinie erfolgen und es wird durch die nachfolgende Uebermauerung oder Ueberschüttung wohl eine Zunahme des Bogendruckes, aber keine wesentliche Aenderung in der Stützungsrichtung eintreten.

Die Tabelle *G.* wollen wir ferner zur Bestimmung der freien Stützlinie eines Wölbbogens Fig. 87 verwenden, für welchen der Radius der innern Wölblinie r, der der äufsern $R = 1{,}2\,r$ und für welchen die Scheitelhöhe $AC = 0{,}1\,r$, also $h = 0{,}1$ ist. — Mit Hinsicht auf die Lösung der vorstehenden Aufgabe werden wir die der gegenwärtigen kürzer fassen können. Wir haben wieder die Werthe der Tabelle *G* für $R = 1{,}2$ zu nehmen und dieselben für $h = 0{,}1$ zu entwickeln. Die bildliche Darstellung der vorläufigen freien Stützlinie wird erleichtert, wenn wir eben diese Werthe mit 20 multipliciren. Vollziehen wir diefs Alles, dann ergiebt sich

$$x_5 = 0{,}0004;\ 0{,}008;\ x_{10} = 0{,}0015;\ 0{,}030;$$
$$x_{15} = 0{,}0034;\ 0{,}068;\ x_{30} = 0{,}0059;\ 0{,}118;$$
$$x_{25} = 0{,}0092;\ 0{,}184;\ x_{30} = 0{,}0130;\ 0{,}260;$$
$$x_{40} = 0{,}0220;\ 0{,}440;\ x_{50} = 0{,}0322;\ 0{,}644;$$
$$x_{60} = 0{,}0425;\ 0{,}850;\ x_{70} = 0{,}0515;\ 1{,}030;$$
$$x_{90} = 0{,}0602;\ 1{,}204.$$

Mittels dieser Werthe bestimmen wir, wie oben auf Seite 266 angegeben ist, vom Mittelpuncte D der Scheitelhöhe AC aus eine vorläufige freie Stützlinie Do der Bogenmasse und leiten hieraus, gleichfalls in oben bemerkter Weise, die freie Stützlinie Do_1 ab, welche vom Scheitel D aus am innigsten mit der mittlern Wölblinie DN zusammenfällt. Diesen innigsten Zusammenfall giebt uns die Zeichnung vom Scheitel D aus bis nahe zu einem Puncte R der mittlern Wölblinie, welcher in einem Perpendikel liegt, das vom Scheitel der innern Wölblinie um nahe 50^0 absteht. Der Bogen $CMLA$ wird sich demgemäfs unter übrigens günstigen Umständen von D bis R hin sehr nahe in der Richtung seiner mittlern Wölblinie stützen, aber auch die fernere Stützung von R aus bis N hin kann in der Richtung der mittlern Wölblinie und zwar dann fortgehen, wenn der Bogen von R aus mittels einer Hintermauerung horizontale Hinterstützung erhält.

Der lothrechte Abstand des Endpunctes o_1 der freien Stützlinie von ihrem Scheitel, welche vom Mittel der Scheitelhöhe des Bogens aus mit der mittlern Wölblinie des letztern auf eine längere Strecke am innigsten zusammenfällt, ergiebt sich zu

$$Po_1 = 0{,}568\,r$$

Diesen Werth für x in die Gleichung XXXII und ferner den Werth der Parenthese ihres zweiten Theiles für $\mu = 90^0$ eingesetzt, giebt

$$0{,}568\,r = \frac{wr^3}{C} \times 0{,}0602$$

und hieraus folgt

$$C = \frac{0{,}0602}{0{,}568}\,wr^2 = 0{,}106\,wr^2.$$

Tragen wir endlich die vorläufig bestimmte freie Stützlinie Do des Bogens CL Fig. 87 vom Scheitel C der äufsern Wölblinie aus als Co_3 an und leiten hieraus jene freie Stützlinie CGo_2 ab, welche die innere Wölblinie in G tangirt, so haben wir mit diesem Puncte G den zweiten Brechungspunct des Bogens oder jenen, welcher dem Brechungspuncte im Scheitel zunächst liegt. Weil die tangentiale Richtung der Stützlinie CGo_2 von o_2 aus in die Basis LM des Bogenanfanges fällt, so wird die Kantung nicht erfolgen, wenn sich LM

gegen eine unverrückbare Unterlage stützt und wenn der Bogen selbst auf dieser nicht gleiten kann. Eine dritte Brechungsfuge wird unter den oben auf Seite 269 angegebenen Umständen eintreten, wenn sich der Bogen beiderseits gegen einen frei stehenden Pfeiler stützt.

Der Berührungspunct G der durch den Scheitel C der äufsern Wölblinie gehenden und die innere Wölblinie berührenden freien Stützlinie liegt zwischen zwei Perpendikeln, welche vom Scheitel der innern Wölblinie um 50^0 und 60^0 abstehen. Die lothrechte Entfernung des Endpunctes o_2 eben dieser freien Stützlinie von ihrem Scheitel C ist, gemäfs der Zeichnung,

$$Qo_2 = 0{,}846\,r.$$

Mit diesem Werthe für x_{90} giebt die Gleichung XXXII auf Seite 261, wenn für die Parenthese ihres zweiten Theiles der zu $\mu = 90^0$ gehörende Zahlenwerth 0,0602 eingesetzt wird,

$$9{,}546\,r = \frac{wr^3}{C_1} \,.\, 0{,}0602$$

und hieraus folgt der Scheiteldruck der freien Stützlinie CGo_2 zu

$$C_1 = \frac{0{,}0602}{0{,}846}\,wr^2 = 0{,}0711\,wr^2.$$

Eine dritte Aufgabe, durch deren Lösung wir die Verwendung der Tabelle G auf Seite 264 und 265 nachweisen wollen, bestehe in der Bestimmung der freien Stützlinie eines gewölbten Bogens $ABCD$ Figur 88. Der Radius der kreisförmigen innern Wölblinie AB dieses Bogens sei r, der der äufsern kreisförmigen Wölblinie DC $R = 1{,}13\,r$ und die Scheitelhöhe $AB = 0{,}25\,r$, also $h = 0{,}25$. Mit Hinsicht auf die Lösung der zwei vorgehenden Aufgaben haben wir die zu $R = 1{,}13$r gehörende Spalte der Tabelle G aufzusuchen und für $h = 0{,}25$ zu entwickeln. Für $R = 1{,}13$r finden wir aber keine Spalte in der Tabelle G, es liegen aber die erforderlichen Werthe zwischen jenen für $R = 1{,}12\,r$ und $R = 1{,}14$r. Genügend genau erhalten wir die Spalte für $R = 1{,}13$, wenn wir das arithmetische Mittel der Spalten für $R = 1{,}12\,r$ und $R = 1{,}14$r aufsuchen d. g.

$$
\begin{aligned}
&0{,}000000 + 0{,}003798\,h \text{ für } \mu = 5^0,\\
&0{,}000005 + 0{,}015077\,h \;\;\text{„}\;\; \mu = 10^0,\\
&0{,}000022 + 0{,}033494\,h \;\;\text{„}\;\; \mu = 15^0,\\
&0{,}000067 + 0{,}058489\,h \;\;\text{„}\;\; \mu = 20^0,\\
&0{,}000161 + 0{,}089303\,h \;\;\text{„}\;\; \mu = 25^0,\\
&0{,}000322 + 0{,}125\,h \;\;\text{„}\;\; \mu = 30^0,\\
&0{,}000926 + 0{,}206588\,h \;\;\text{„}\;\; \mu = 40^0,\\
&0{,}001995 + 0{,}293412\,h \;\;\text{„}\;\; \mu = 50^0,\\
&0{,}003501 + 0{,}375\,h \;\;\text{„}\;\; \mu = 60^0,\\
&0{,}005162 + 0{,}441511\,h \;\;\text{„}\;\; \mu = 70^0,\\
&0{,}007250 + 0{,}5\,h \;\;\text{„}\;\; \mu = 90^0,
\end{aligned}
$$

Alle diese Werthe für $h = 0{,}25$ entwickelt und mit 10 multiplicirt, giebt für eine vorläufige freie Stützlinie

$$
\begin{aligned}
&x_5 = 0{,}000949;\ 0{,}00949;\ x_{10} = 0{,}003774;\ 0{,}03774;\\
&x_{15} = 0{,}008395;\ 0{,}08395;\ x_{20} = 0{,}014689;\ 0{,}14689;\\
&x_{25} = 0{,}022487;\ 0{,}22487;\ x_{30} = 0{,}031572;\ 0{,}31572;\\
&x_{40} = 0{,}052573;\ 0{,}52573;\ x_{50} = 0{,}075348;\ 0{,}75348;\\
&x_{60} = 0{,}097251;\ 0{,}97251;\ x_{70} = 0{,}115540;\ 1{,}15540;\\
&x_{90} = 0{,}132250;\ 0{,}32250.
\end{aligned}
$$

Behufs der Darstellung jener freien Stützlinie für die Massenanordnung des Bogens *DB* Fig. 88, der die vorstehenden Abscissen zugehören, sind auf der innern Wölblinie Puncte zu bestimmen, welche vom Scheitel *A* auf einander folgend abstehen um

$$5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60,\ 70,\ 90^0,$$

es sind durch alle diese Puncte Perpendikel zu fällen und auf diese, von einer Horizontale *TN* aus, auf einander folgend die Werthe für x_5, x_{10}, x_{15} ... anzutragen. Die aus der Verbindung aller dieser Puncte entstehende krumme Linie giebt die gesuchte vorläufige freie Stützlinie *TO* der gegebenen Massenanordnung, aus welcher, wenn *T* der Mittelpunct der Scheitelhöhe *AD* ist, leicht jene freie Stützlinie TO_1 der Bogenmasse durch Versuchsconstructionen abgeleitet werden kann, die vom Scheitel *T* aus bis zu einem Puncte *E* hin sehr nahe mit der mittlern Wölblinie des Bogens zusammenfällt. Das Perpendikel durch den Punct *E*, bis zu welchem hin die freie Stützlinie der Bogenmasse, gemäfs der Zeichnung, mit der mittlern Wölblinie

sehr innig zusammenfällt, steht vom Scheitel der innern Wölblinie um nahe 30^0 ab. Der lothrechte Abstand des Endpunctes O_1 der freien Stützlinie TO_1 von ihrem Scheitel T ist zufolge der Zeichnung

$$NO_1 = 0{,}519\, r.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung XXXII Seite 262 und für die Parenthese ihres zweiten Theiles den oben für

$$x_{90} = 0{,}132250$$

gefundenen Werth, so erhält man den Horizontalschub oder Scheiteldruck der freien Stützlinie TO_1 zu

$$0{,}519\, r = \frac{wr^3}{C} \,.\, 13225;$$

$$C = \frac{0{,}13225}{0{,}519}\, wr^2 = 0{,}2548\, wr^2.$$

Um zu erkennen, ob der Bogen AC Fig. 88 mit dem zugehörenden, in der Figur aber nicht dargestellten, Gegenbogen ohne Hintermauerung bei der Wegnahme der Lehrgerüste durch gleichzeitige Kantung in mindestens drei Brechungspuncten niederbrechen werde, tragen wir die vorläufige freie Stützlinie TO vom Scheitel D der äufsern Wölblinie als DO_2 an und leiten hieraus durch Versuchsconstructionen jene freie Stützlinie DO_3 der Massenanordnung des Bogens Fig. 88 ab, welche die innere Wölblinie tangirt. Die Zeichnung giebt uns den Berührungspunct der durch D gelegten freien Stützlinie mit der innern Wölblinie in der Nähe von F, und das Perpendikel durch eben diesen Punct steht vom Scheitel der innern Wölblinie um nahe 60^0 ab. Der lothrechte Abstand des Endpunctes O_3 der freien Stützlinie DFO_3 von ihrem Scheitel D ist nach der Zeichnung

$$MO_3 = 1{,}019\, r.$$

Durch Einführung dieses Werthes in die Gleichung XXXII Seite 262, und wenn für die Parenthese ihres zweiten Theiles der zu $\mu = 90^0$ gehörende Werth 0,13225 gesetzt wird, ergiebt sich

$$1{,}019\, r = \frac{wr^3}{C_1} \,.\, 0{,}13225,$$

woraus ferner der Horizontalschub oder Scheiteldruck der durch D gehenden und die innere Wölblinie berührenden freien Stützlinie folgt zu

$$C_1 = \frac{0{,}13225}{1{,}019}\, wr^2 = 0{,}12978\, wr^2.$$

Die verlängerte Tangente des Endpunctes O_3 der durch D gehenden und die innere Wölblinie berührenden freien Stützlinie DFO_3 liegt innerhalb der Höhe BC des Bogenanfanges, wefshalb denn der ganze Bogen, den die Figur 88 nur zur Hälfte darstellt, ohne Hintermauerung bei der Wegnahme des Lehrgerüstes bestehen kann, wenn die Bogenanfänge, wie BC, gegen Verschiebung gesichert sind.

Wir gehen nun zur Bestimmung der freien Stützlinie von Spitzbögen über. Unter I Seite 196 haben wir bereits die allgemeine Gleichung für die freie Stützlinie eines Spitzbogens gefunden, dessen innere Wölblinie ein elliptischer Spitzbogen mit der halben grossen Achse A und mit der halben kleinen Achse B der zugehörenden Ellipse, und dem überdiefs die Scheitelhöhe Bh zugehört. Unter V Seite 197 ist aus jener die allgemeine Gleichung für die Stützlinie eines kreisförmigen Spitzbogens und unter VI die eines gothischen Spitzbogens oder eines solchen abgeleitet, dessen innere halbe Wölblinie vom Kämpfer aus einen Bogen von 60^0 umfasst, die also durch einen an den Scheitel angesetzten Bogen von 30^0 zu einem Viertelkreis ergänzt wird. Für

$u = \sin\mu$ und wenn man die Scheitelbelastung für die Tiefe 1

$$Q = nr^2 w$$

setzt, geht die Gleichung VI Seite 197 über in

$$x_\mu = \frac{r^3 w}{C} \left\{ n\left(\frac{\sin\mu - 0{,}5}{2}\right) + \left(\frac{h + 0{,}8660254}{2}\right)(\sin\mu \quad 0{,}5)^2 - \left(\frac{2+\sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + (1+\sin\mu)\, 0{,}2165063 - \tfrac{1}{2}\sin\mu\,(\mu - 0{,}523599) \right\}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man:

H.

$$\text{für } \angle\widehat{\mu} = 35^0;\ x_{35} = \frac{r^3 w}{C}\left\{0{,}03679\, n + 0{,}00005 + 0{,}00271\, h\right\};$$

für $\angle \widehat{\mu} = 40^0$; $x_{40} = \frac{r^3 w}{C} \left\{ 0{,}07139\, n + 0{,}00032 + 0{,}01019\, h \right\}$;

„ $\angle \widehat{\mu} = 50^0$; $x_{50} = \frac{r^3 w}{C} \left\{ 0{,}13302\, n + 0{,}00218 + 0{,}03539\, h \right\}$;

„ $\angle \widehat{\mu} = 60^0$; $x_{60} = \frac{r^3 w}{C} \left\{ 0{,}18301\, n + 0{,}00613 + 0{,}06699\, h \right\}$;

„ $\angle \widehat{\mu} = 70^0$; $x_{70} = \frac{r^3 w}{C} \left\{ 0{,}21984\, n + 0{,}01134 + 0{,}09670\, h \right\}$;

„ $\angle \widehat{\mu} = 80^0$; $x_{80} = \frac{r^3 w}{C} \left\{ 0{,}24240\, n + 0{,}01584 + 0{,}11752\, h \right\}$;

„ $\angle \widehat{\mu} = 90^0$; $x_{90} = \frac{r^3 w}{C} \left\{ 0{,}25\, n + 0{,}01767 + 0{,}12500\, h \right\}$.

Die Zahlenwerthe der Parenthesen vorstehender Abscissen lassen sich finden, wenn man n und h kennt. Die wahren Werthe der Abscissen aber hängen, aufser von r, noch von $\frac{w}{C}$ ab. Entwickelt man sie für irgend einen Werth des Factors $\frac{w}{C}$ und bildet damit eine krumme Linie, so wird sie eine vorläufige freie Stützlinie in der bisherigen Bedeutung sein, aus der sich wieder die für die obwaltenden Umstände passende in bereits bekannter Weise (M. s. Seite 198) ableiten läſst.

Behufs der Erforschung der Stützungsverhältnisse der gothischen Spitzbögen nehmen wir $h = 0{,}1$ an und sehen zunächst von einer Scheitelbelastung ab, setzen also $n = o$. Hierdurch erhalten wir aus H

$$x_{35} = \frac{r^3 w}{C} \,.\, 0{,}00032;\quad x_{40} = \frac{r^3 w}{C} \,.\, 0{,}00134;$$

$$x_{50} = \frac{r^3 w}{C} \,.\, 0{,}00572;\quad x_{60} = \frac{r^3 w}{C} \,.\, 0{,}01283;$$

$$x_{70} = \frac{r^3 w}{C} \,.\, 0{,}02101\,; \quad x_{80} = \frac{r^3 w}{C} \,.\, 0{,}02759\,;$$

$$x_{90} = \frac{r^3 w}{C} \,.\, 0{,}03017.$$

Zur bequemen bildlichen Darstellung der vorläufigen freien Stützlinie eines gothischen Spitzbogens multipliciren wir die vorstehenden Werthe mit 100 und dividiren die Producte durch 3, wornach sich ergiebt

$$x_{35} = 0{,}011\,;\ x_{40} = 0{,}044\,;\ x_{50} = 0{,}191\,;\ x_{60} = 0{,}427\,;\ x_{70} = 0{,}700\,;$$
$$x_{80} = 0{,}919\,;\ x_{90} = 1{,}005.$$

Den Spitzbogen, auf welchen sich die vorstehenden Werthe beziehen, stelle die Figur 89 dar. Der Radius seiner innern Wölblinie *BA* sei r, seine Scheitelhöhe *AC* sei $0{,}1\,r$ und die obere Begrenzung oder die Brückenbahn horizontal. Ziehen wir durch Puncte a, b, c, d, e, f, g Perpendikel, welche vom Scheitel *A* der innern Wölblinie aus auf dieser Bögen von 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60 Grad abschneiden, also vom Scheitel der zum Halbkreis ergänzten innern Wölblinie um 35, 40, 50, 60, 70, 80, 90^0 abstehen, tragen auf diese Perpendikel, von der Horizontale *TN* aus, die zuletzt gefundenen Werthe für x_{35}, x_{40}, x_{50} u. s. f. und verbinden die so gefundenen Puncte durch eine krumme Linie, so mufs diese eine freie Stützlinie der Massenanordnung sein, die zwischen der innern Wölblinie *BA* und der horizontalen Begrenzung *CM* liegt.

Aus dieser vorläufigen freien Stützlinie, welche durch den Mittelpunct *T* der Scheitelhöhe *AD* des Stützbogens *EDAB* hindurchgehen mag, läfst sich wohl eine Stützlinie TO_1 durch Construction ableiten, die vom Ende des Stützbogens nahe mit der mittlern Wölblinie des letztern zusammenfällt, die jedoch in den obern Stellen den Stützbogen überschreitet, aber es läfst sich keine freie Stützlinie darstellen, die vom Scheitel des Stützbogens aus mit seiner mittlern Wölblinie nahe gleiche Richtung annimmt. Hieraus müssen wir folgern, dafs der gewölbte Theil eines gothischen Spitzbogens, wie die Figur 89 einen solchen darstellt, von seinem Scheitel ab nicht als Stützbogen wirken kann, mithin deren Bestehen, wie

auch die Praxis zur Genüge darthut, nur von der Hintermauerung, namentlich von der Bindefähigkeit des Mörtels daselbst abhängt.

Um das Bestreben eines gothischen Spitzbogens zum Brechen näher darzuthun, tragen wir in Figur 89 die vorläufige freie Stützlinie *TO* vom Scheitel *A* der innern Wölblinie des Stützbogens als *AQ* an und bestimmen hieraus durch Construction eine freie Stützlinie *GFHA*, welche die innere Wölblinie in *F* tangirt. Eben diese freie Stützlinie, in deren Richtung sich die Wölbmasse im Augenblicke des Bruches von den Bogenanfängen aus nur stützen kann, weil in ihrer Richtung der geringste Druck stattfindet, durchschneidet die äufsere Wölblinie des Stützbogens in *H*. Sehen wir von der Bindefähigkeit des Mörtels ab, dann beginnt der Bogenbruch, wie auch das Experiment darthut, mit dem Oeffnen einer Fuge bei *F* nach aufsen, mit dem Oeffnen einer Fuge bei *H* nach innen und mit dem Oeffnen einer Fuge im Scheitel nach aufsen, so dafs der Stützbogen von *H* aus nach innen niederzubrechen beginnt, während gleichzeitig eine Erhebung des Scheitels *A* statthat. Das Aufsteigen des Scheitels wird durch eine Belastung desselben und somit auch ein Niederbrechen des Stützbogens zu verhindern sein. Durch eine Scheitelbelastung eines Spitzbogens wird aber auch die Beschaffenheit der Stützlinie geändert, womit sich zugleich die oben angeführte Wirkung der Scheitelbelastung eines Spitzbogens, nämlich die Verhinderung des Stützbogenniederbruches, anderweit rechtfertigt. Um eine gründlichere Kenntnifs von der Wirkung zu erhalten, die aus der Scheitelbelastung eines gothischen Spitzbogens für dessen Stützlinie hervorgeht, wollen wir die Abänderung der letztern für verschiedene Scheitelbelastungen näher untersuchen. Zu diesem Ende behalten wir die Scheitelhöhe h zu 0,1 bei, nehmen aber auf einander folgend für die Abscissengleichungen unter *H* Seite 276 den Werth des n zu 0,01; 0,1; 0,25 an. So erhalten wir

für $h = 0,1$; $n = 0,01$; ferner durch Multiplication mit 100 und durch Division mit 3

$$x_{35} = 0,026;\ x_{40} = 0,069;\ x_{50} = 0,235;\ x_{60} = 0,489;\ x_{70} = 0,774;$$
$$x_{80} = 1,001;\ x_{90} = 1,089;$$

für $h = 0,1$; $n = 0,1$; ferner durch Multiplication mit 100 und durch Division mit 5

$x_{35} = 0{,}08$; $x_{40} = 0{,}169$; $x_{50} = 0{,}38$; $x_{60} = 0{,}623$; $x_{70} = 0{,}88$;
$x_{80} = 1{,}036$; $x_{90} = 1{,}104$;

für $h = 0{,}1$; $n = 0{,}25$; und durch Multiplication mit 10

$x_{35} = 0{,}095$, $x_{40} = 0{,}192$; $x_{50} = 0{,}390$; $x_{60} = 0{,}586$; $x_{70} = 0{,}760$;
$x_{80} = 0{,}882$; $x_{90} = 0{,}927$.

Die vorläufige freie Stützlinie eines gothischen Spitzbogens, die aus den oben berechneten Abscissen für $h = 0{,}1$ und $n = 0{,}01$ zugehört, ist *TO* Fig. 90. Die hieraus folgende freie Stützlinie, die wenigstens durch zwei Puncte der mittlern Wölblinie des Stützbogens hindurchgeht, nämlich in dem Scheitelpunct *T* entspringt und dieselbe in einem Puncte berührt oder in deren Endpunct vertikal über dem Endpuncte der innern Wölblinie ausläuft, ergiebt sich zu TBO_1. Eben diese freie Stützlinie liegt von *B* ab bis nahe zum Scheitel hin aufserhalb des Stützbogens, was uns anzeigt, dafs auch bei der gewählten Scheitelbelastung von

$$\frac{1}{100}\, r^2 w = Q$$

für die Tiefe 1 des gothischen Spitzbogens die freie Stützlinie vom Scheitel ab noch nicht mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens zusammenfällt.

Die ebenfalls oben bestimmten Abscissen der vorläufigen freien Stützlinie eines gothischen Spitzbogens für

$$h = 0{,}1 \text{ und } n = 0{,}1$$

geben dieselbe als *TO* Figur 91, aus welcher eine durch *T* gehende freie Stützlinie TEO_1 folgt, welche die mittlere Wölblinie des Stützbogens in *E* berührt. Zwischen *T* und *E* erhebt sich diese freie Stützlinie nur wenig über die mittlere Wölblinie des Stützbogens; die Scheitelbelastung eines gothischen Spitzbogens mit $h = 0{,}1$ von

$$Q = 0{,}1\, r^2 w$$

für die Tiefe 1 desselben ändert daher die freie Stützlinie der Bogenmasse dahin ab, dafs sie vom Scheitel aus auf eine längere Strecke mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens nahe zusammenfällt.

In Figur 92 ferner ist *TO* die vorläufige freie Stützlinie eines gothischen Spitzbogens, die sich für

$$h = 0{,}1 \text{ und } n = 0{,}25$$

aus den oben angeführten Abscissen bestimmt. Aus eben dieser leitet sich durch Construction eine zweite freie Stützlinie TEO_1 ab, die von T aus die mittlere Wölblinie tangirt und in E den Stützbogen überschreitet. Die hier bestehende Scheitelbelastung von

$$Q = 0{,}25\, r^2 w$$

macht also, dafs unter günstigen Umständen die mittlere Wölblinie des Stützbogens als vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung wirkt. Die drei Belastungen eines gothischen Spitzbogens, nämlich

$$Q = 0{,}01\, r^2 w;\ Q = 0{,}1\, r^2 w \text{ und } Q = 0{,}25\, r^2 w,$$

die wir für die Figuren 90, 91 und 92 voraussetzten, geben uns, mittels der dadurch abgeänderten freien Stützlinie der Bogenmasse, zu erkennen,

dafs durch eine gewisse kleinste Belastung die freie Stützlinie vom Scheitel ab auf eine längere Strecke nahe mit der mittlern Wölblinie zusammenfällt und diese schliefslich tangirt,

dafs eine gröfsere Scheitelbelastung, als diese kleinste, vom Scheitel T ab den Bogen verkürzt, der mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens zusammenfällt, und

dafs noch gröfsere Scheitelbelastungen Veranlassung werden, die mittlere Wölblinie des Stützbogens, bei gehöriger Hintermauerung, als vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung auftreten zu lassen.

Doch, wie ist die kleinste zulässige Scheitelbelastung aufzufinden, die einem gothischen oder überhaupt kreisförmigen Spitzbogen gegeben werden mufs, damit die dadurch abgeänderte freie Stützlinie der Bogenmasse auf eine möglichst lange Strecke nahe mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens zusammenfalle? Die kleinste Scheitelbelastung, die einem Spitzbogen gegeben werden kann, wird im Allgemeinen jene sein, aus der eine freie Stützlinie entspringt, welche vom Scheitel der mittlern Wölblinie ausgehend, diese noch in einem nach dem Bogenanfange hin gelegenen Punct tangirt. Eine solche freie Stützline kann aber vom Scheitel aus, wie uns die Figur 90 andeutet, immer noch über den gegebenen Stützbogen hinausfallen, so dafs die hierbei zum Grunde liegende Belastung des Scheitels noch zu gering ist, folglich vergröfsert wer-

den mufs, um der gegebenen Höhe des Stützbogens zu genügen. Eine genäherte Beantwortung der gestellten Frage erhalten wir allgemein wie folgend: Die Abscisse eines Punctes der freien Stützlinie irgend eines kreisförmigen Spitzbogens, der im Scheitel mit

$$Q = r^2 wn$$

belastet ist, kann zufolge der Tabelle *H* Seite 276 ausgedrückt werden durch

$$x_\mu = \frac{r^3 w}{C} \left\{ n A_\mu + B_\mu + D_\mu h \right\},$$

so dafs für einen gothischen Spitzbogen, wenn man $\mu = \widehat{50^0}$ setzt, nach Tabelle *H* wird

$$A_\mu = 0{,}13302;\ B_\mu = 0{,}00218;\ D_\mu = 0{,}03539.$$

Die Stützlinie des kreisförmigen Stützbogens Fig. 93 soll vom Scheitel *T* der mittlern Wölblinie des Stützbogens aus, deren Radius *R* sein mag, möglichst nahe mit der letztern zusammenfallen; es sollen also die in gleichen Perpendikeln liegenden Puncte der freien Stützlinie und der mittlern Wölblinie, zunächst vom Scheitel *T* aus, nahe gleiche Abstände von der Horizontale durch den Scheitel *T* haben. Für den Punct *D* der freien Stützlinie ist

$$ED = x_\mu$$

und μ bezeichnet, wie wir schon wissen, den Bogen für den Radius 1, den das Perpendikel durch *B* bis zum Scheitel des Halbkreises hin abschneidet, der durch Verlängerung der innern Wölblinie des Spitzbogens entsteht.

Für den Abstand z des Punctes *D* der mittlern Wölblinie *TD* von der Horizontale durch den Scheitel *T* erhalten wir

$$z = R\,(\cos\beta - \cos\psi),$$

wenn mit ψ und β die Bogenabstände der Puncte *D* und *T* bezeichnet werden, die sie vom Scheitel des Halbkreises haben, mit welchem die mittlere Wölblinie des Stützbogens zusammenfällt.

Steht der Scheitel *A* der innern Wölblinie des Spitzbogens um den Bogen α, der Punct *B* aber um den Bogen μ für den Radius 1 vom Scheitel *M* des Halbkreises ab, der durch Verlängerung der mittlern Wölblinie entsteht, dann ist bekanntlich

$$r \sin\alpha = R \sin\beta;\ r \sin\mu = R \sin\psi;$$

$$\sin\beta = \frac{r}{R} \sin\alpha;\ \sin\psi = \frac{r}{R} \sin\mu.$$

Ein Perpendikel *PLK* ferner schneide an der innern Wölblinie des Spitzbogens einen Bogen *KM* gleich η und an der mittlern Wölblinie von *L* aus den Bogen ξ für den Radius 1, bis zur Vertikale durch den Mittelpunct *N* gerechnet, ab. Für diese Bögen besteht ebenfalls

$$r \sin\eta = R \sin\xi;\ \sin\xi = \frac{r}{R} \sin\eta.$$

Die freie Stützlinie darf, wenigstens vom Scheitel aus, nicht unter der mittlern Wölblinie liegen; im Allgemeinen mufs daher bestehen

$$x_\mu \leqq z \text{ d. g.}$$

$$\text{XXXIII.}\quad \frac{r^3 w}{C} \left\{ A_\mu n + B_\mu + D_\mu h \right\} \leqq R(\cos\beta - \cos\psi).$$

Die freie Stützlinie eines Spitzbogens Fig. 93, die vom Scheitel *T* der mittlern Wölblinie des Stützbogens aus sich der letztern unter den bestehenden Verhältnissen am meisten nähert, berührt die mittlere Wölblinie in einem Puncte *L*, liegt aber zwischen *L* und dem Scheitel *T* über der mittlern Wölblinie. Angenommen, es habe dieser Berührungspunct *L* vom Perpendikel durch *N* den Bogenabstand ξ, und der vertikal unter *L* befindliche Punct *K* der innern Wölblinie den Bogenabstand η vom Perpendikel durch *N*. Für diese Voraussetzung geht die letzte Gleichung über in

$$\frac{r^3 w}{C} \left\{ A_\eta n + B_\eta + D_\eta h \right\} = R(\cos\beta - \cos\xi).$$

Hieraus folgt

$$C = \frac{r^3 w \left\{ A_\eta n + B_\eta + D_\eta h \right\}}{R(\cos\beta - \cos\xi)}.$$

Diesen Werth für C in die Gleichung XXXIII gesetzt und ferner

$$\frac{\cos\beta - \cos\psi}{\cos\beta - \cos\xi} = N$$

genommen, entwickelt

$$A_\mu n + B_\mu + D_\mu h \overset{<}{=} N(A_\eta n + B_\eta + D_\eta h)$$

und hieraus folgt

$$n \overset{<}{=} \frac{N(B_\eta + D_\eta h) - (B_\mu + D_\mu h)}{A_\mu - NA_\eta}$$

Mittels dieser Gleichung ist nahe die kleinste Scheitelbelastung zu finden, die einem Kreisspitzbogen unter gewissen Bedingungen und zwar dann zu geben ist, wenn die zugehörende freie Stützlinie vom Scheitel T der mittlern Wölblinie ausgehend, diese in einem Puncte berühren soll, der vom Scheitel jenes Halbkreises um Bogen ξ absteht, welchem die mittlere Wölblinie zugehört; denn die Scheitelbelastung ist

$$Q = r^2 wn.$$

Die Benutzung der vorstehenden Formel wollen wir durch einen besondern Fall noch näher erläutern.

Der Spitzbogen Figur 93 sei ein gothischer d. h. $\angle \widehat{\alpha} = 30^0$; ferner sei der Radius der mittlern Wölblinie des Stützbogens $R = 1{,}021\, r$; h = 0,1 und endlich enthalte der Bogen KM für den Radius 1 gleich μ 50^0, den das durch den Berührungspunct L der freien Stützlinie mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens geführte Perpendikel bis zum Scheitel jenes Halbkreises abschneidet, mit dem die innere Wölblinie zusammenfällt. Zunächst ist

$$\sin\beta = \frac{r}{R}\sin\alpha = \frac{1}{1{,}021}\sin 30^0;\ \beta = 29^0\ 1';$$

$$\sin\xi = \frac{r}{R}\sin\eta = \frac{1}{1{,}021}\sin 50^0;\ \xi = 48^0\ 37';\ \text{ferner}$$

nach Tabelle H.

$$A_\eta = 0{,}13302;\ B_\eta = 0{,}00218;\ D_\eta = 0{,}03539.$$

Dem Perpendikel durch B gehöre ein Bogen μ zu, der durch einen Winkel von 40 Grad gemessen werde; somit ist:

$$\sin\psi = \frac{r}{R}\sin\mu = \frac{1}{1{,}021}\sin 40^0;\ \psi = 39^0\ 1';$$

$$N = \frac{0{,}8719269 - 0{,}7769629}{0{,}8719269 - 0{,}6610936} = 0{,}45042.$$

Die Tabelle $H.$ giebt ferner für $\angle \widehat{\mu} = 40^0$

$$A_\mu = 0{,}07139;\ B_\mu = 0{,}00032;\ D_\mu = 0{,}01019.$$

Mit allen diesen Werthen erhalten wir aus der Gleichung XXXIII

$$n \overset{<}{=} \frac{0{,}45042\,(0{,}00218 + 0{,}003539) - (0{,}00032 + 0{,}001019)}{0{,}07139 - 0{,}45042\,.\,0{,}13302} = 0{,}107;$$

also die Scheitelbelastung zu

$$Q = 0{,}107\ r^2 w \text{ d. h.}$$

für diese Scheitelbelastung und für eine freie Stützlinie, welche durch den Scheitel der mittlern Wölblinie geht und eben diese in einem Perpendikel berührt, der vom Scheitel des Halbkreises, dem die innere Wölblinie zugehört, um 50^0 absteht, liegt auch jener Punct der freien Stützlinie eines Perpendikels nur wenig über der mittlern Wölblinie, der vom Scheitel der innern Wölblinie um 10^0 oder vom Scheitel des zugehörenden Halbkreises um 40^0 absteht.

Die der vorstehenden Bestimmung zum Grunde gelegten Werthe sind jene, die für die Figur 91 gewählt wurden. Für diese war $n = 0{,}1$; jetzt aber fanden wir $n = 0{,}107$. Während in dem Perpendikel FF Figur 91, das vom Mittelpuncte N der innern Wölblinie um 40^0 absteht, die freie Stützlinie noch angeblich über der mittlern Wölblinie liegt, wird dieser Abstand ein geringerer werden, wenn man statt $n = 0{,}1$ für n den Werth 0,107 setzt.

Der Zweck der Scheitelbelastung eines kreisförmigen Spitzbogens ist der, die freie Stützlinie des letztern dahin abzuändern, dafs sie vom Scheitel des Spitzbogens aus mit der Richtung der mittlern Wölblinie des Stützbogens zusammenfalle, also die, dafs die unter Mitwirkung der Scheitelbelastung gebildete freie Stützlinie eines kreisförmigen Spitzbogens in der nächsten Nähe des Scheitels

in die mittlere Wölblinie des Stützbogens selbst übergehe. Mit dieser Auffassung der Bestimmung der Scheitelbelastung eines Spitzbogens erhalten wir aber auch eine einfachere Herleitung ihres Minimums, als die vorstehende ist, und zwar wie folgend: Der kreisförmige Spitzbogen Figur 93 habe r zum Radius seiner innern und R zum Radius seiner mittlern Wölblinie, die der innern concentrisch sein soll. Der Scheitel A der innern Wölblinie stehe vom Scheitel M des zugehörenden Halbkreises um den Bogen α für den Radius 1 ab, ferner seien die Abstände der Puncte B und K der innern Wölblinie von ebenfalls M in Bogenmafs für den Radius 1 μ und η und ferner endlich sei die Richtung der mittlern Wölblinie mit einer Horizontale in D, perpendikulär über B, durch Bogen ψ, sowie in L, gleichfalls lothrecht über K, durch Bogen ξ für den Radius 1 dargestellt. Die Scheitelhöhe AC des Spitzbogens endlich sei rh.

Wenn die Vertikale durch B der durch den Scheitel A sehr nahe liegt, dann ist das Gewicht der Bogenmasse zwischen diesen Perpendikeln ohne Fehler

$$q = w(AC + BO)\frac{ET}{2} = w(rh + rh + r\cos\alpha - r\cos\mu)\frac{r}{2}(\sin\mu - \sin\alpha)$$

$$= \frac{wr^2}{2}(2h + \cos\alpha - \cos\mu)(\sin\mu - \sin\alpha).$$

Die mittlere Wölblinie TDL soll in der nächsten Nähe des Scheitels die freie Stützlinie der Wölbmasse und der Scheitelbelastung

$$Q = r^2 wn$$

sein. Die Last nun, welche als zu stützende auf den Punct D der freien Stützlinie fällt, ist

$$W = q + \tfrac{1}{2}Q = q + \tfrac{1}{2}r^2 wn \text{ oder}$$

$$W = \frac{r^2 w}{2}\left\{n + (2h + \cos\alpha - \cos\mu)(\sin\mu - \sin\alpha)\right\}.$$

Die Tangente des Richtungswinkels ψ der freien Stützlinie in D ist aber nach Seite 15

$$tg\,\psi = \frac{r^2 w}{2C}\left\{n + (2h + \cos\alpha - \cos\mu)(\sin\mu - \sin\alpha)\right\}.$$

Der Bogen ψ, welcher die Richtung der freien Stützlinie in D mit einer horizontalen angiebt, ist bekannt, wenn sie daselbst mit der mittlern Wölblinie zusammenfallen soll; es ist nämlich

$$\sin \psi = \frac{r}{R} \sin \mu.$$

Liegt das Perpendikel durch K dem durch den Scheitel ebenfalls sehr nahe, dann mufs wiederum

$$tg\,\xi = \frac{r^2 w}{2C} \left\{ n + (2h + \cos\alpha - \cos\eta)(\sin\eta - \sin\alpha) \right\}$$

und

$$\sin \xi = \frac{r}{R} \sin \mu$$

sein. Aus der Gleichung für $tg\,\psi$ folgt

$$\text{XXXIV. } C = \frac{r^2 w}{2\,tg\,\psi} \left\{ n + (2h + \cos\alpha - \cos\mu)(\sin\mu - \sin\alpha) \right\}$$

und durch Division mit $tg\,\psi$ in $tg\,\xi$ wird

$$\frac{tg\,\xi}{tg\,\psi} = \frac{n + (2h + \cos\alpha - \cos\eta)(\sin\eta - \sin\alpha)}{n + (2h + \cos\alpha - \cos\mu)(\sin\mu - \sin\alpha)} \text{ d. g.}$$

$$\text{XXXV. } n = \frac{(2h + \cos a - \cos\eta)(\sin\eta - \sin\alpha)\,tg\,\psi - (2h + \cos\alpha - \cos\mu)(\sin\mu - \sin\alpha)\,tg\,\xi}{tg\,\xi - tg\,\psi}.$$

Durch Einführung dieses Werthes für n in die Gleichung XXXIV erhält man C. Die Gleichungen für C und n gelten allein für die Voraussetzung, dafs η und μ nur wenig von α verschieden sind; und je kleiner die Differenzen

$$\mu - \alpha \text{ und } \eta - \alpha$$

sind, desto genauer ergeben sich n und C für den Zusammenfall der freien Stützlinie vom Scheitel T der mittlern Wölblinie des Stützbogens aus mit der letztern.

Wenden wir die Formel XXXV auf die Bestimmung der kleinsten Belastung des gothischen Spitzbogens Figur 91 an. Für diesen

ist $\angle \widehat{\alpha} = 30^0$, ferner wurde für denselben bereits oben angenommen

$$h = 0{,}1 \text{ und } R = 0{,}021\, r.$$

In Beziehung auf die Formel XXXV sei endlich

$$\angle \widehat{\mu} = 31^0;\ \angle \widehat{\mu} = 32^0.$$

Hieraus folgt

$$\sin \xi = \frac{r}{R} \sin \eta;\ \angle \widehat{\xi} = 31^0\ 16';$$

$$\sin \psi = \frac{r}{R} \sin \mu;\ \angle \widehat{\psi} = 30^0\ 17'\ 40''.$$

$$tg\, \xi = 0{,}6072130;\ tg\, \psi = 0{,}5842227 \text{ und}$$

$$n = \frac{0{,}2179773 \times 0{,}0299193 \times 0{,}584222 - 0{,}2088581 \times 0{,}0150381 \times 0{,}6072130}{0{,}0229903},$$

$$n = 0{,}0828$$

also ist die kleinste Scheitelbelastung des gothischen Spitzbogens Figur 91

$$Q = r^2 w n = r^2 w \times 0{,}0828.$$

Für eben diesen Spitzbogen fanden wir die Scheitelbelastung mittels der vorgehenden Methode, nämlich auf Seite 284, zu

$$Q = r^2 w n \times 0{,}107$$

also n um nahe 0,024 größer, als jetzt. Die Bestimmung der kleinsten Last, die ein Spitzbogen für sein Bestehen bedarf, geschieht jedenfalls genauer mittels der Formel XXXV, als bei Anwendung des auf Seite 284 aufgestellten Verfahrens, für welches Hilfswerthe construirt werden müssen.

Es ist durchaus nicht erforderlich, daſs der Bogen α für den Radius 1, welcher die innere Wölblinie eines kreisbogenförmigen Spitzbogens zu einem Viertelkreis ergänzt, einem Winkel von 30^0 zugehöre, vielmehr kann dieser Bogen immer kleiner und kleiner werden, wodurch sich der Spitzbogen immer mehr dem kreisförmigen Rundbogen nähert und womit überdieſs, wie wir noch sehen werden, eine immer kleinere Scheitelbelastung das Bestehen des

Stützbogens als solchen herbeiführt. Behalten wir die Bezeichnung des Bogens mit α bei, welcher die innere Wölblinie eines kreisförmigen Spitzbogens zu einem Viertelkreis ergänzt, setzen ferner den Bogenabstand eines Perpendikels vom Scheitel des Halbkreises, mit dem die innere Wölblinie zusammenfällt und in welchem ein Punct der freien Stützlinie mit der Abscisse x_μ liegt, gleich μ, dann geht in der allgemeinen Gleichung V Seite 197 für die freie Stützlinie eines kreisbogenförmigen Spitzbogens

$$t \text{ in } \sin\alpha;\ u \text{ in } \sin\mu$$

und die Gleichung selbst, wenn noch

$$Q \text{ mit } r^2wn$$

bezeichnet wird, über in

$$\text{XXXVI.}\quad x_\mu = \frac{wr^3}{C}\left\{n\left(\frac{\sin\mu - \sin\alpha}{2}\right) + \left(\frac{h + \cos\alpha}{2}\right)(\sin\mu - \sin\alpha)^2 - \left(\frac{2 + \sin^2\mu}{6}\right)\cos\mu + \left(\frac{3\sin\mu\sin\alpha - 2\sin^2\alpha + 2}{6}\right)\cos\alpha - \tfrac{1}{2}(\mu - \alpha)\sin\mu\right\}.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir nun die nachfolgenden Entwickelungen, wenn wir $\angle\widehat{\alpha}$ auf einander folgend zu 25, 20, 15, 10 und 5 Grad annehmen.

$$I.\quad \angle\widehat{\alpha} = 25^0.$$

$$\angle\widehat{\mu} = 30^0,\ x_{30} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}03868\,n + 0{,}00004 + 0{,}00299\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 40^0,\ x_{40} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}11008\,n + 0{,}00097 + 0{,}02424\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 50^0,\ x_{50} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}17171\,n + 0{,}00404 + 0{,}05897\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 60^0,\ x_{60} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}22170\,n + 0{,}00941 + 0{,}09830\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 70^0;\ x_{70} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}25853\,n + 0{,}01590 + 0{,}13368\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 80^0;\ x_{80} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}28109\,n + 0{,}02134 + 0{,}15803\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 90^0;\ x_{90} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}28868\,n + 0{,}02349 + 0{,}16668\,h\right\}.$$

K. $\angle\widehat{\alpha} = 20^0.$

$$\angle\widehat{\mu} = 30^0;\ x_{30} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}07899\,n + 0{,}00028 + 0{,}01248\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 40^0;\ x_{40} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}15038\,n + 0{,}00210 + 0{,}04523\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 50^0;\ x_{50} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}21201\,n + 0{,}00649 + 0{,}08990\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 60^0;\ x_{60} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}26200\,n + 0{,}01331 + 0{,}13729\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 70^0;\ x_{70} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}29884\,n + 0{,}02107 + 0{,}17861\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 80^0;\ x_{80} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}32139\,n + 0{,}02738 + 0{,}20659\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 90^0;\ x_{90} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}32899\,n + 0{,}02984 + 0{,}21647\,h\right\}.$$

L. $\angle\widehat{\alpha} = 15^0.$

$$\angle\widehat{\mu} = 20^0;\ x_{20} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}04160\,n + 0{,}00003 + 0{,}00346\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 30^0;\ x_{30} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}12059\,n + 0{,}00079 + 0{,}02908\,h\right\};$$

$$\angle\widehat{\mu} = 40^0;\ x_{40} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}19198\,n + 0{,}00362 + 0{,}07372\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 50^0;\ x_{50} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,25361\,n + 0,00931 + 0,12864\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 60^0;\ x_{60} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,30360\,n + 0,01747 + 0,18435\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 70^0;\ x_{70} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,34044\,n + 0,02640 + 0,23179\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 80^0;\ x_{80} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,36299\,n + 0,03406 + 0,26353\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 90^0;\ x_{90} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,37060\,n + 0,03622 + 0,27467\,h\right\}.$$

M. $\angle \widehat{\alpha} = 10^0$.

$$\angle \widehat{\mu} = 20^0;\ x_{20} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,08419\,n + 0,00018 + 0,01417\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 30^0;\ x_{30} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,16318\,n + 0,00155 + 0,05325\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 40^0;\ x_{40} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,23457\,n + 0,00533 + 0,11005\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 50^0;\ x_{50} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,29620\,n + 0,01214 + 0,17547\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 60^0;\ x_{60} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,34619\,n + 0,02143 + 0,23969\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 70^0;\ x_{70} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,38302\,n + 0,03131 + 0,29341\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 80^0;\ x_{80} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,40558\,n + 0,03904 + 0,32899\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 90^0;\ x_{90} = \frac{wr^3}{C}\left\{0,41317\,n + 0,04199 + 0,34143\,h\right\}.$$

$$N.\ \angle \widehat{\alpha} = 5^0.$$

$$\angle \widehat{\mu} = 10^0;\ x_{10} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}04325\,n + 0{,}00128 + 0{,}00374\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 20^0;\ x_{20} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}12743\,n + 0{,}00169 + 0{,}03248\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 30^0;\ x_{30} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}20642\,n + 0{,}00357 + 0{,}08522\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 40^0;\ x_{40} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}27782\,n + 0{,}00806 + 0{,}15436\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 50^0;\ x_{50} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}33944\,n + 0{,}01568 + 0{,}23045\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 60^0;\ x_{60} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}38943\,n + 0{,}02574 + 0{,}30332\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 70^0;\ x_{70} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}42627\,n + 0{,}03626 + 0{,}36341\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 80^0;\ x_{80} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}44883\,n + 0{,}04444 + 0{,}40289\,h\right\};$$

$$\angle \widehat{\mu} = 90^0;\ x_{90} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}45642\,n + 0{,}04751 + 0{,}41664\,h\right\}.$$

Bereits oben bemerkten wir, daſs ein kreisförmiger Spitzbogen einer um so geringern Scheitelbelastung bedürfe, je kleiner der Bogen α sei, der die Länge seiner innern Wölblinie vom Bogenanfange bis zu seinem Scheitel hin zu einem Viertelkreis ergänzt. Den Nachweis für diese Behauptung wollen wir jetzt geben. Zu diesem Ende umfasse die innere Wölblinie des Kreisspitzbogens Fig. 94 vom Anfange *B* bis zu ihrem Scheitel *A* hin einen Bogen von 80^0; es sei also der Ergänzungsbogen desselben bis zum Viertelkreis ein Bogen von 10^0. Die Abscissen der freien Stützlinie eines solchen Bogens giebt die obenstehende Tabelle *M* und zwar, wenn wir $h = 0{,}1$, annehmen zu

$$x_{20} = \frac{wr^3}{C}(0{,}08419\,n + 0{,}00160);$$

$$w_{30} = \frac{wr^3}{C}(0{,}16318\,n + 0{,}00688);$$

$$x_{40} = \frac{wr^3}{C}(0{,}23457\,n + 0{,}01634):$$

$$x_{50} = \frac{wr^3}{C}(0{,}29620\,n + 0{,}02969);$$

$$x_{60} = \frac{wr^3}{C}(0{,}34619\,n + 0{,}04540);$$

$$x_{70} = \frac{wr^3}{C}(0{,}38302\,n + 0{,}06065);$$

$$x_{80} = \frac{wr^3}{C}(0{,}40558\,n + 0{,}07194);$$

$$x_{90} = \frac{wr^3}{C}(0{,}41317\,n + 0{,}07613).$$

Für eine vorläufige freie Stützlinie können wir, unter Weglassung des Factors $\frac{wr^3}{C}$, sämmtliche Abscissen mit 10 multipliciren und man erhält:

$$x_{20} = 0{,}8419n + 0{,}0160;\ x_{30} = 1{,}6318n + 0{,}0688;$$
$$x_{40} = 2{,}2346n + 0{,}1634;\ x_{50} = 2{,}9620n + 0{,}2969;$$
$$x_{60} = 3{,}4619n + 0{,}4540;\ x_{70} = 3{,}8302n + 0{,}6065;$$
$$x_{80} = 4{,}0558n + 0{,}7194;\ x_{90} = 4{,}1317n + 0{,}7613.$$

Nehmen wir keine Scheitelbelastung, setzen also $n = o$ und tragen die so sich ergebenden Abscissen

$$x_{20} = 0{,}0160;\ x_{30} = 0{,}0688;\ x_{40} = 0{,}1634;$$
$$x_{50} = 0{,}2969;\ x_{60} = 0{,}4540;\ x_{70} = 0{,}6065;$$
$$x_{80} = 0{,}7194;\ x_{90} = 0{,}7613$$

in Figur 94 an, so erhält man die freie Stützlinie als *TO*. In der

Nähe von O fällt diese tangirend mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens zusammen, dagegen übersteigt sie zwischen 10 und 40 Grad vom Scheitel der innern Wölblinie die äufsere des Stützbogens. Besonders der letztere Umstand giebt uns zu erkennen, dafs auch der Kreisspitzbogen Figur 94, obwohl er sich dem Kreisrundbogen sehr nähert, doch nicht ohne Scheitelbelastung bestehen kann.

Damit die vorläufige freie Stützlinie bei ihrem Durchschnitte mit dem Perpendikel durch C, das vom Scheitel A der innern Wölblinie um 10^0 absteht, mit der mittlern Wölblinie zusammenfalle, bedarf es, gemäfs der Zeichnung, eines Zuwachses der Abscisse durch C von $0{,}028\,r$. Damit ferner die freie Stützlinie im Durchgange durch das Perpendikel aus D, das vom Scheitel A der innern Wölblinie um 20^0 entfernt ist, auf die mittlere Wölblinie aufschliefse, ist, ebenfalls zufolge der Zeichnung, ein Zuwachs der Abscisse durch D, und zwar von $0{,}0455\,r$ erforderlich. Sowohl jenen als auch diesen Zuwachs können wir für die Abscissen x_{20} und x_{30} durch die Puncte C und D mittels der mit n behafteten Glieder in der oben befindlichen Zusammenstellung der Abscissen erlangen und zwar wird für die Abscisse x_{20}

$$0{,}8419\,n = 0{,}028 \text{ d. g.}$$

$$n = \frac{0{,}026}{0{,}8419} = 0{,}033$$

und für die Abscisse x_{30}

$$1{,}6318\,n = 0{,}0455 \text{ d. g.}$$

$$n = \frac{0{,}0455}{1{,}6318} = 0{,}0278.$$

Hiernach fordert der Kreisspitzbogen Fig. 94 eine Scheitelbelastung von nahe

$$Q = r^2 w \,.\, n = 0{,}033\, r^2 w,$$

wenn die freie Stützlinie desselben vom Scheitel der mittlern Wölblinie aus mit dieser zusammenfallen soll, was erforderlich ist, damit der Stützbogen als solcher wirken könne.

Setzen wir für n den Werth 0,033 in die letzten Abscissengleichungen ein, so ergiebt sich

$x_{20} = 0{,}0438$; $x_{30} = 0{,}1226$; $x_{40} = 0{,}2371$;
$x_{50} = 0{,}3946$; $x_{60} = 0{,}5682$; $x_{70} = 0{,}7329$;
$x_{80} = 0{,}8532$; $x_{90} = 0{,}8976$.

Die aus diesen Abscissen folgende freie Stützlinie ist TO_1 Fig. 94. Sie liegt vom Scheitel ab unter der mittlern Wölblinie des Stützbogens, folglich kann aus ihr eine freie Stützlinie mittels Construction abgeleitet werden, die vom Scheitel aus mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens zusammenfällt und sich ferner über dieselbe erhebt. Diefs nun wird durch eine Scheitelbelastung für den Kreisspitzbogen Figur 94 von

$$Q = r^2 w \,.\, n = 0{,}033\, r^2 w$$

erreicht, während die Scheitelbelastung eines gothischen Spitzbogens Figur 91, der ebenfalls eine Scheitelhöhe von $0{,}1 = h$ hat, nach Seite 279 sein kann

$$Q = r^2 w \,.\, n = 0{,}1\, r^2 w,$$

schärfer berechnet aber mindestens, nach Seite 287,

$$Q = r^2 w \times 0{,}0828$$

sein mufs.

Mit der Formel XXXV auf Seite 286 kann auch die kleinste erforderliche Scheitelbelastung für den Spitzbogen Figur 94, und zwar noch zuverlässiger, als in vorstehender Weise, gefunden werden. Es sei für den Spitzbogen Figur 94 $R = 1{,}021\, r$, $\angle \widehat{\alpha} = 10^0$ und ferner in Beziehung auf die Formeln Seite 286

$$\angle \widehat{\mu} = 11^0;\ \angle \widehat{\eta} = 12^0,$$

mithin

$$\sin \xi = \frac{\sin \eta}{1{,}021};\ \xi = 11^0\, 45';$$

$$\sin \psi = \frac{\sin \mu}{1{,}021};\ \psi = 10^0\, 46'\, 15'';$$

$$tg\, \xi = 0{,}2080003;\ tg\, \psi = 0{,}1902326.$$

$$n = \left\{ \frac{0{,}2066601 \times 0{,}0342635 \times 0{,}1902326 - 0{,}2031806 \times 0{,}0171608 \times 0{,}2080003}{0{,}0177677} \right\} = 0{,}03499 = 0{,}035.$$

Dieser Werth des n ist etwas grösser als der oben bestimmte, aber doch richtiger, als jener. Nehmen wir ferner den letztgefundenen Werth in die Gleichung XXXIV auf Seite 286, so wird für den kreisförmigen Spitzbogen Figur 94

$$\frac{r^2 w}{C} = \frac{2\, tg\, \psi}{n + (2h + \cos\alpha - \cos\mu)\,(\sin\mu - \sin\alpha)} \text{ d. g.}$$

$$\frac{r^2 w}{C} = \frac{2 \times 0{,}1902326}{0{,}035 + 0{,}2031806 \times 0{,}0171608} = 9{,}802.$$

Durch Einführung dieses Werthes und des für $n = 0{,}035$ in die Abscissengleichungen Seite 292 für die freie Stützlinie des kreisförmigen Spitzbogens Figur 94 erhält man

$$x_{20} = 9{,}882\, r\, (0{,}08419 + 0{,}00160) = 0{,}0449\, r;$$
$$x_{30} = 9{,}882\, r\, (0{,}16318 + 0{,}00688) = 0{,}1165\, r;$$
$$x_{40} = 9{,}882\, r\, (0{,}23457 + 0{,}01634) = 0{,}2426\, r;$$
$$x_{50} = 9{,}882\, r\, (0{,}29620 + 0{,}02969) = 0{,}3959\, r;$$
$$x_{60} = 9{,}882\, r\, (0{,}34619 + 0{,}04540) = 0{,}5684\, r;$$
$$x_{70} = 9{,}882\, r\, (0{,}38302 + 0{,}06065) = 0{,}7319\, r;$$
$$x_{80} = 9{,}882\, r\, (0{,}40558 + 0{,}07194) = 0{,}8512\, r;$$
$$x_{90} = 9{,}882\, r\, (0{,}41317 + 0{,}07613) = 0{,}8952\, r.$$

Die mit diesen Abscissen bestimmte freie Stützlinie des Spitzbogens Figur 94 fällt sehr nahe mit TO_1 zusammen.

Die Scheitelbelastung, die ein Kreisspitzbogen für sein Bestehen bedarf, mufs man sich durch einen Mauerkörper dargestellt denken, der mit seiner Länge, d. i. die horizontale Ausdehnung in der Ebene der Stirnseite, zwischen den Scheiteln der zwei Hälften eines Spitzbogens liegt und gleichsam diese von einander trennt. Ist die erforderliche Scheitelbelastung eines Spitzbogens

$$Q = r^2 wn$$

bekannt und die Höhe H der Mauer gegeben, die auf dem Spitzbogen stehen soll, dann ist deren Länge L oder deren horizontale Abmessung in der Ebene der Stirnfläche auch bekannt; denn es mufs sein

$$Q = LHw \text{ d. g.}$$

$$r^2 wn = LHw, \text{ also}$$

$$\text{XXXVII.}\quad \frac{r^2 n}{H} = L.$$

Für den gothischen Spitzbogen Figur 91 haben wir auf Seite 287 als nahezu kleinste Belastung

$$n = 0{,}0828$$

gefunden. Soll eine zwischen den Scheiteln stehende Mauer mit der Länge

$$L = 0{,}05\, r$$

diese Belastung bieten, dann mufs sie mindestens eine Höhe von

$$H = \frac{r^2 .\, 0{,}0828}{0{,}05\, r} = 1{,}656\, r$$

haben.

Welche Form der Stützbogen in der Länge der Belastungsmauer hat, ist sicherlich ganz beliebig; derselbe kann in seiner Richtung durch die Stützmauer hindurchgehen, es kann aber auch zwischen den Stützbogenhälften ein Stein, gleichsam als Schlufsstein, eingeschaltet werden, der die Belastungsmauer trägt.

Für jeden kreisbogenförmigen Spitzbogen besteht zwar eine kleinste Scheitelbelastung, die sein ruhiges Bestehen bedingt, aber es giebt keine Belastung, wenn wir von der Festigkeit des Wölbmaterials absehen, die nicht überschritten werden dürfte; vielmehr ist ein Spitzbogen geeignet, irgend eine Last zu stützen, wenn sie nur gröfser als die ist, die sein Bestehen erheischt. Die Wahrheit dieser Behauptung geht aus der Art und Weise hervor, nach welcher die zwei Hälften eines Spitzbogens die Last stützen, die auf dem Scheitel derselben steht. Diese Last kann zunächst nur von den Spitzbogenhälften getragen werden, gegen welche sie sich lehnt; sie mufs sich demnach in zwei gleich grofse Seitendrücke nach der Anfangsrichtung der Spitzbogenhälften im Scheitel zerlegen, an die sie sich anlehnt. Das Minimum des Druckes, der in solcher Weise auf jedes Stützbogenende im Scheitel kommen mufs, ist jenes, das die freie Stützlinie der Bogenmasse vom Scheitel ab nahe mit der mittlern Wölblinie zusammenfallen macht und aus dem Minimum der Scheitelbelastung, die der Bogen zu seinem Bestehen fordert, entspringt. Einen Druck, gröfser als der eben bemerkte, der aus einer Scheitel-

belastung gröfser als jene, die das Bestehen des Spitzbogens bedingt, wird zuverlässig ebenfalls von den Stützbogenenden im Scheitel aufgenommen und von da ab in ihrer Richtuug, unter Absetzung von Horizontaldruck, gestützt werden können. Die ganze Abänderung, welche erwächst, wenn ein Spitzbogen im Scheitel eine gröfsere Belastung hat, als das Bestehen desselben fordert, ist die, dafs die mittlere Wölblinie des Stützbogens schon vom Scheitel als vorgeschriebene Stützlinie aufzutreten hat, also auch durchgängig hintermauert sein mufs, während sie, wenn die Scheitelbelastung nahe der kleinsten gleich ist, die das Bestehen des Bogens fordert, vom Scheitel aus bis zu einer gewissen Entfernung hin als freie Stützlinie wirkt.

Die Unbequemlichkeiten, welche Kreisspitzbögen hinsichtlich der kleinsten Scheitelbelastung, die ihr Bestehen erheischt, herbeiführen, nächstdem aber auch der Umstand, dafs die mittlere Wölblinie der Stütz- oder Tragbögen solcher fast immer nur auf geringe Entfernung vom Scheitel ab als freie Stützlinie zu wirken vermögen, läfst es wünschenswerth erscheinen, für Kreisspitzbögen solche zu wählen, deren mittlere Wölblinie nahe durchaus mit der freien Stützlinie der Massenanordnung zusammenfällt. Für einen Bogen, der im Scheitel mit Q belastet, dessen lichte Stichhöhe nS, dessen halbe lichte Spannweite S, dessen Scheitelhöhe $nS.h$, dessen Bahn oder Oberseite horizontal, dessen Raum zwischen der Brückenbahn und der innern Wölblinie mit gleich schwerem Material gleichmäfsig erfüllt ist, und für welchen die innere Wölblinie freie Stützlinie der so bedingten Massenanordnung sein soll, haben wir bereits auf Seite 246 die Gleichung XXVI der innern Wölblinie, also der Stützlinie, und zwar zu

$$y = \sqrt{\frac{C}{w}}\, lognt \left\{ \frac{\dfrac{Cx}{w} + \dfrac{ChnS}{w} + \sqrt{\left\{ \dfrac{C}{w}\left(\frac{1}{4}\dfrac{Q^2}{w^2} + \dfrac{C}{w}(x^2 + 2hnSx) \right) \right\}}}{\dfrac{ChnS}{w} + \frac{1}{2}\dfrac{Q}{w}\sqrt{\dfrac{C}{w}}} \right\}$$

gefunden. Diese Gleichung mufs der innern Wölblinie eines Spitzbogens angehören, der im Scheitel mit Q belastet ist und für welchen die freie Stützlinie sehr nahe mit der mittlern Wölblinie des

zugehörenden Tragbogens zusammenfällt. In Beziehung auf die Figur 95 bezeichnet in der letztgenannten Formel Q das Gewicht des Mauerkörpers AG zwischen den Scheiteln A und A_1 der beiden Stützbogenhälften, AFB die freie Stützlinie der Scheitelbelastung Q und jener Massen, die sich zwischen ihr und der horizontalen Bahn DH befinden, C den Horizontalschub der Stützlinie, w das Eigengewicht des Wölbmaterials, S die halbe lichte Spannweite BN des Stützbogens, nS die lichte Stichhöhe AN, ferner x die lothrechte Abscisse AE und y die horizontale Ordinate EF eines Punctes F der innern Wölblinie AFB. Um der vorstehenden Formel eine für den Gebrauch bequemere Form zu geben, setzen wir

$$x = u . nS = u . AN$$

d. h. wir drücken die Abscisse durch einen Theil der lichten Stichhöhe aus; wir setzen ferner

$$\frac{Q}{2} = B . nS . w, \text{ also}$$

$$B = \frac{Q}{2 . nS . w} = \frac{Q}{2 . (AN) . w},$$

AN gleich der lichten Stichhöhe des Bogens, und

$$C = \gamma w,$$

so dafs γ den Horizontalschub der mit der innern Wölblinie zusammenfallenden freien Stützlinie für ein Wölbmaterial mit dem Eigengewichte 1 darstellt.

Durch Einführung dieser Werthe in die obenstehende Formel erhalten wir

$$y = \sqrt{\gamma} . \operatorname{lognt} \left\{ \frac{u + h + \sqrt{\left\{ \frac{B^2}{\gamma} + u^2 + 2uh \right\}}}{h + B\sqrt{\frac{1}{\gamma}}} \right\} \text{ oder}$$

$$\text{XXXVIII. } y = 2{,}3026 \sqrt{\gamma} . \log . \left\{ \frac{u + h + \sqrt{\left\{ \frac{B^2}{\gamma} + u^2 + 2uh \right\}}}{h + B\sqrt{\frac{1}{\gamma}}} \right\}.$$

Für $u = 1$ d. h. für eine Abscisse von A bis N Figur 95 mufs die Ordinate y in die halbe lichte Spannweite $NB = S$ übergehen d. g.

$$\text{IXL.}\quad S = 2{,}3026\sqrt{\gamma}\,.\,log.\left\{\frac{1+h+\sqrt{\left\{\frac{B^2}{\gamma}+1+2h\right\}}}{h+B\sqrt{\frac{1}{\gamma}}}\right\}.$$

Bevor man einzelne Puncte der freien Stützlinie selbst mittels der Gleichung XXXVIII bestimmen kann, wird es nöthig, den Werth des γ zu finden, was noch am schnellsten durch Versuchsrechnungen bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit zu ermöglichen ist.

Um die Verwendung der zuletzt gefundenen Formeln darzuthun, wollen wir sie zur Bestimmung der innern Wölblinie eines Spitzbogens Figur 95 gebrauchen. Für denselben sei die halbe lichte Spannweite $NB = S = 10$ Ellen, die lichte Stichhöhe doppelt so grofs, als die halbe lichte Spannweite NB, also

$$nS = 2.S;\ n = 2,$$

die Scheitelhöhe $^1|_{10}$ der lichten Stichhöhe d. i.

$$h.nS = {}^1/_{10}\,.\,nS = {}^1/_5\,S,\ \text{also}\ h = {}^1/_{10}$$

und die Scheitelbelastung eine Mauer, deren horizontale Länge, in der Ebene der Stirnfläche gemessen, wir der Hälfte der halben lichten Spannweite AB und deren Höhe wir der doppelten lichten Stichhöhe AN gleichsetzen wollen. Aus den letztern Annahmen folgt, wenn das Eigengewicht des Mauermaterials ebenfalls w beträgt, für die Tiefe 1

$$Q = w\,.\,{}^1\!/\!_2 S\,.\,2\,.\,2S = 2S^2 w = 200\,w$$

und ferner

$$B = \frac{Q}{2nSw} = \frac{200\,w}{2\,.\,2\,.\,10\,.\,w} = 5.$$

Hiermit verwandeln sich die obenstehenden Formeln XXXVIII und IXL für Figur 95 in

$$(3)\quad y = 2{,}3026\sqrt{\gamma}\,.\,log.\left\{\frac{u+0{,}1+\sqrt{\left(\frac{25}{\gamma}+u^2+0{,}2\,u\right)}}{0{,}1+5\sqrt{\frac{1}{\gamma}}}\right\}\ \text{und}$$

$$10 = 2{,}3026 \sqrt{\gamma} \,.\, log. \left\{ \frac{1{,}1 + \sqrt{\left(\frac{2}{\gamma} + 1{,}2\right)}}{0{,}1 + \sqrt{\frac{25}{\gamma}}} \right\}.$$

Die letzte Gleichung giebt auch

$$4{,}3429 = \sqrt{\gamma} \,.\, log. \left\{ \frac{1{,}1 + \sqrt{\left(\frac{25}{\gamma} + 1{,}2\right)}}{0{,}1 + \sqrt{\frac{25}{\gamma}}} \right\}$$

und durch Versuchsrechnungen erhält man

$$\gamma = 68{,}685$$

Mit diesem Werthe geht die Gleichung (3) über in

$$y = 2{,}3026 \sqrt{68{,}685} \,.\, log. \left\{ \frac{u + 0{,}1 + \sqrt{\left(\frac{25}{68{,}685} + u^2 + 0{,}2\,u\right)}}{0{,}1 + 5\sqrt{\left(\frac{1}{68{,}685}\right)}} \right\}$$

und wir erhalten aus derselben, wenn nach einander 0,1; 0,2; 0,3 ... 0,9; 1 für u eingesetzt wird

$y_{0,1} = 1{,}353$; $y_{0,2} = 2{,}633$; $y_{0,3} = 3{,}833$; $y_{0,4} = 4{,}944$;
$y_{0,5} = 5{,}967$; $y_{0,6} = 6{,}908$; $y_{0,7} = 7{,}774$; $y_{0,8} = 8{,}574$;
$y_{0,9} = 9{,}313$; $y_1 = 10$.

Die freie Stützlinie, welche die vorstehenden Abscissen bestimmen, ergiebt sich zu *AFB* Figur 95. In eben dieser freien Stützlinie kann und soll die Massenstützung nicht allein erfolgen. Tragen wir sie vom Puncte *T* der Scheitelhöhe *AD* aus als *TO* an und construiren mittels eines Proportionalwinkels hierzu eine zweite TO_1, so kann diese als mittlere Wölblinie des Stützbogens gewählt und hiernach dessen äufsere Wölblinie selbst geformt werden. In der Richtung dieser mittlern Wölblinie wird der Stützbogen die Lasten unter Umständen stützen, und namentlich dann, wenn die Wölbsteine von der innern bis zur äufsern Wölblinie reichen.

Wie *AB* Figur 95, so ist auch TO_1 eine der Massenanordnung entsprechende freie Stützlinie. Die Horizontaldrücke zweier Stützlinien für die nämliche Massenanordnung verhalten sich, gemäfs VII Seite 19 und VII Seite 195 umgekehrt wie die lothrechten Abstände der Endpuncte dieser freien Stützlinie von ihren Scheiteln. Den Horizontalschub der freien Stützlinie *AB* Figur 95 haben wir zu

γw

gefunden, mithin ist der Horizontalschub *C* der freien Stützlinie TO_1 Figur 95

$$\gamma w : C = TO : AN \text{ d. g.}$$

$$C = \gamma w \cdot \frac{AN}{TP}.$$

Die Betrachtungen des gegenwärtigen Abschnittes über die Bestimmung der vorläufigen freien Stützlinien gegebener Brückenbögen führen uns schliefslich zu folgenden Zusammenstellungen:

1) Für die Massenanordnung eines gegebenen Brückenbogens sind unendlich viel freie Stützlinien herzustellen.

2) Soll der gewölbte Theil eines Brückenbogens, also der Tragbogen, allein in seiner Richtung die Massen stützen, die oberhalb der innern Wölblinie liegen, dann mufs es eine der gesammten Massenanordnung zugehörende freie Stützlinie geben, die durchgängig innerhalb der innern und äufsern Wölblinie liegt.

3) Die Stützung der Masse eines Wölbbogens wird immer nur in der Richtung einer freien Stützlinie oder auch in der einer vorgeschriebenen Stützlinie wesentlich erfolgen, sobald der Bogen aus Steinen zusammengesetzt ist, deren Zusammendrückung, gegen die Drückung in den Fugen, gleich *o* gesetzt werden kann und wenn überdiefs ein gehöriger Wechsel der Stofsfugen statt hat. (M. s. Seite 254.)

4) Es sind Stützbögen denkbar und darzustellen, deren mittlere Wölblinie durchaus als freie Stützlinie der Massenanordnung dasteht, die sich oberhalb der innern Wölblinie befindet.

5) Rundbogenförmige Brückenbögen können und müssen sich in der Nähe ihres Scheitels in der Richtung einer freien Stützlinie stützen, die eben daselbst innerhalb des Stützbogens liegt.

6) Jeder Stützbogen, dessen innere und mittlere Wölblinie im Voraus für eine gewisse Scheitelhöhe gewählt ist, kann allein in der Nähe seines Scheitels nach der Richtung einer freien Stützlinie, entfernt davon aber nur als vorgeschriebene Stützlinie stützen, mufs folglich auch Hinterstützung besitzen.

7) Weder ein halbkreisbogenförmiger noch ein kreisstichbogenförmiger Stützbogen kann, mit Hinsicht auf die Stützung, als die tauglichste Form für Stützbogen angesehen werden. Dasselbe gilt auch für Ellipsenbögen.

8) Für einen Brückenbogen ist jede krumme Linie als mittlere Wölblinie des Stützbogens zuläfsig, wenn sie nur im Scheitel rundbogenförmig ist. Im Allgemeinen wird ein solcher Stützbogen in der Nähe seines Scheitels nach der Richtung einer freien Stützlinie und ferner als vorgeschriebene Stützlinie stützen.

9) Die mittlere Wölblinie von kreisstichbogenförmigen Brückenbögen mit horizontaler Bahn fällt um so inniger mit der freien Stützlinie der Massenanordnung des Bogens zusammen, je weniger Gradmafs jene enthält.

10) Je flacher ein Stützbogen in der Nähe seines Scheitels ist, desto gröfser, je gekrümmter derselbe ebendaselbst ist, desto kleiner wird der Horizontalschub oder der Scheiteldruck.

11) Mit der Zunahme der massiven Scheitelhöhe eines Brückenbogens wächst auch der Horizontalschub oder Scheiteldruck, doch bedingt die *n*fache massive Scheitelhöhe nicht den *n*fachen, sondern einen geringern Scheiteldruck.

12) Spitzbogenförmige Stützbögen sind für Brückenbögen im Allgemeinen unzuläfsig, wenn man auf die Bindefähigkeit des Mörtels weder Rücksicht nehmen kann noch will, weil ihr gesichertes Bestehen eine Scheitelbelastung fordert, die bei Brückenbögen nicht immer herzustellen ist.

13) Freistehende d. h. nicht hinter- und übermauerte Stützbögen zeigen unter Umständen Brechungs- oder Kantungspuncte. In allen diesen Puncten öffnet sich der Bogen gleichzeitig und bricht nieder. Bei Rundbögen liegt der erste dieser Kantungspuncte im Scheitel, und von hier aus beginnt ein Oeffnen des Bogens nach innen. Ein zweiter Kantungspunct liegt vom

Scheitel aus in jeder Stützbogenhälfte nach den Bogenanfängen hin und hier öffnet sich der Bogen an der Aussenseite. Ein dritter Kantungspunct ferner, von wo aus sich der Bogen gegen die innere Wölbfläche hin öffnet, liegt bald im Bogenanfange, bald höher im Bogen, bald tiefer, nämlich im Pfeiler. Der Niederbruch eines Stützbogens durch Kantung kommt nicht zu Stande, wenn die Entstehung eines dritten Kantungspunctes durch Hintermauerung, durch die Höhe des Bogens oder wie sonst verhindert wird.

Zwanzigster Abschnitt.

Nähere Bestimmung der Stützungsrichtung gegebener Brückenbögen.

Im vorgehenden Abschnitte haben wir vielfach Gelegenheit gehabt, uns zu überzeugen, dafs für ein und dieselbe Masse eines Brückenbogens unzählig viel freie Stützlinien aufgefunden werden können, und dafs in der Richtung einer jeden derselben unter Umständen die Stützung der Masse, dafs aber auch unter wieder andern Umständen die Stützung nur in der Scheitelnähe eines Bogens nach einer freien Stützlinie, ferner aber in der Richtung einer vorgeschriebenen Stützlinie erfolgen könne. Jetzt nun liegt uns die nähere Beantwortung der Frage vor: In welcher Richtung stützt sich die gegebene Masse eines Brückenbogens?

Eine allgemein gültige Beantwortung der eben gestellten Frage ist unmöglich, und zwar defshalb, weil die Stützungsrichtung durch die Bauform, durch die Art der Bauführung etc. abgeändert werden kann. Kürzer und bündiger werden wir das erreichen, was mit der gestellten Frage erzielt wird, wenn wir die Fragen:

A. Was bezwecken wir mit den Stützbögen gegebener Brückenbögen? und

B. durch welche Mittel und Vorkehrungen wird der Bestimmung der Tragbögen Genüge geleistet?

beantworten.

Was die Bestimmung eines Stützbogens anlangt, so kann sie im Allgemeinen keine andere als die sein,

das Gewicht des Stützbogens und das der überliegenden Massen, sowie ferner die,

jene Lasten mit Sicherheit zu stützen, die über den Brückenbogen weggeführt werden.

Lassen wir die zuletzt erwähnte Bestimmung eines Brückenbogens vorerst im gegenwärtigen Abschnitte aufser Beachtung und behalten nur die erste bei, so erkennen wir leicht, dafs diese Bestimmung näher bezeichnet die ist: sein eignes Gewicht und das überliegender Massen zu stützen entweder

a. nur in der Richtung einer freien Stützlinie, welche durch die mittlere Richtung des Stützbogens und durch seine Endstützung geregelt wird, oder

b. in der Richtung einer vorgeschriebenen Stützlinie, welche die mittlere Richtung des Stützbogens und gleichzeitig die Endstützung vorschreibt, oder endlich

c. theils in der Richtung einer freien, theils in der Richtung einer vorgeschriebenen Stützlinie, so dafs die Richtung der so erfolgenden Stützung wiederum durch die mittlere Richtung des Stützbogens und durch die Endlagerung des letztern bedingt wird.

Einer der Frage unter B. genügenden Beantwortung für das practische Bedürfnifs wollen wir uns nun stufenweise und durch theilweise Einschaltung von Sätzen zu nähern suchen, von denen wir mehre als Grundsätze bezeichnen müssen.

1) Die Stützungsrichtung im Scheitel eines Stützbogens mufs eine Kettenlinie sein, wenn die Last daselbst ohne Mitwirkung eiserner Anker, ohne die Bindefähigkeit des Mörtels etc. etc. daselbst Stützung finden soll. Die Wahrheit dieses Satzes erhellt aus den Abschnitten vier, fünf und sechs über freie, über vorgeschriebene Stützlinien mit tangentialer und über vorgeschriebene Stützlinien mit horizontaler Hinterstützung.

2) Wenn die Stützung der Masse eines Brückenbogens im Scheitel desselben in einer Kettenlinie erfolgt, dann bleibt der Horizontalschub oder Scheiteldruck ungeändert, die fernere Stützung mag in der Richtung einer freien Stützlinie, d. i. in einer Kettenlinie, oder in einer vorgeschriebenen Stützlinie erfolgen. Die Wahrheit dieses Satzes ist ebenfalls durch den vierten, fünften und sechsten Abschnitt zur Gewissheit erhoben.

3) Der Horizontalschub oder Scheiteldruck eines Stützbogens wird um so kleiner ausfallen, je gröfser der lothrechte Abstand des Endpunctes der zugehörenden freien Stützlinie von ihrem Scheitel, bei unveränderlichem horizontalen Abstand eben dieser Puncte, ist, was aus der Gleichung VII Seite 19 hervorgeht. Für die nämliche Massenanordnung bleibt der Zähler des dortigen Bruches

$$\Sigma\,(\tfrac{1}{2}P_0 + P_1 + P_2 \ldots P_{n-1})$$

völlig ungeändert, es mag der lothrechte Abstand Z_n des Scheitels der freien Stützlinie von ihrem Endpuncte gröfser oder kleiner werden; dagegen mindert sich in der aus der genannten Gleichung abgeleiteten

$$C = \frac{\Sigma\,(\tfrac{1}{2}P_0 + P_1 + P_2 \ldots P_{n-1})}{Z_n}$$

offenbar C, wenn Z_n wächst.

4) Wenn die Stützung der Masse eines Brückenbogens allein oder doch wesentlich in der Richtung des Stützbogens erfolgt, und wenn der letztere nicht aus zwei oder mehrern Ringen besteht, wenn vielmehr die Lagerflächen der Wölbsteine des Stützbogens durchgängig oder doch abwechselnd von der innern bis zur äufsern Wölbfläche hin reichen, dann mufs sich der Druck auf den Stützbogen nach der Richtung einer Stützlinie vertheilen. Ueber diese Behauptung haben wir bereits Seite 254 gehandelt. Sie entspringt ganz einfach daraus, dafs der Druck, welcher von jedem Wölbsteine aus durch die Lagerfläche auf den tiefer liegenden übergeht, wegen der Undrückbarkeit des Steinmaterials, im Vergleich mit der in den Lagerflächen, nur in einer, nicht aber gleichzeitig in mehrern Richtungen über geführt werden kann.

5) Mit Hinsicht auf die Erfahrung stützt sich jede Massenanord-

nung, namentlich aber die eines Brückenbogens, nach jener Richtung, in welcher die geringste Verkürzung eintritt. Dieser Satz ist ein Grundsatz, der nur dann eine Abänderung erleidet, wenn der Endpunct der so bedingten Stützlinie nicht die genügende Stützung, bei Brückenbögen nicht die erforderliche horizontale Gegenstützung findet. Uebrigens haben wir von eben diesem Satze bereits Seite 78 gehandelt.

6) Lehnt sich ein Stützbogen gegen ein Widerlager an, das nach horizontaler Richtung hin ausweichen kann, dann wird immer das Bestreben zur Herstellung einer Stützungsrichtung vorhanden sein und schliefslich auch eintreten, welche den geringsten Horizontaldruck bedingt oder, was gleichbedeutend ist, der Scheitel der Stützlinie wird sich möglichst hoch hinauf, der Endpunct derselben in der Vertikale über dem Anfange der innern Wölbfläche aber wird sich möglichst tief herabstellen. Dieser Satz ist durch ein Experiment leicht zur Wahrheit zu erheben und hiermit noch bis dahin auszudehnen, dafs derselbe selbst dann noch besteht, wenn die freie Stützlinie die äufsere Wölblinie innerhalb ihres Anfanges und Scheitels überschreitet, folglich der ihr zugehörende Druck eine Kantung am Bogenanfange zu bewirken vermag.

7) Ein Stützbogen kann in seiner Richtung allein oder doch wesentlich in der Richtung seiner mittlern Wölblinie sein eignes Gewicht und das der überstehenden Masse stützen, wenn sich an keiner Stelle desselben weder eine Lagerfuge geöffnet, noch eine Kante einer Lagerfläche abgedrückt zeigt. Setzen wir die zur Stützung in der Richtung der mittlern Wölblinie eines Stützbogens erforderliche Beschaffenheit des letztern und des Widerlagers voraus, dann wird eine Stützungsrichtung, die nicht innerhalb der Masse des Stützbogens liegt, sondern sie überschreitet, nothwendig in der Nähe der Brechungspuncte eine Fugenöffnung andeuten und gleichzeitig ein Absplittern der Kanten der Wölbsteine in der Nähe eben derselben hervorbringen. Ein Stützbogen, der die erstgenannten Beschaffenheiten zeigt, kann zwar in der Richtung seiner mittlern Wölblinie durchaus stützen, doch folgt daraus noch nicht die Nothwendigkeit, dafs er es thue, sondern nur, dafs die Richtung der mittlern Stützung den Stützbogen nicht überschreite. Eine durchaus gleichberührende Lagerung der Wölbsteine wird ein Oeffnen der Fugen, sowie ein

Abdrücken der Fugenkanten verhindern. Diese gleichmäfsig berührende Lagerung nun ist, bei genügender Beschaffenheit des Widerlagers, stets durch den Schluss des Stützbogens zu bewirken.

8) Jeder Stützbogen giebt in der Regel und zwar dann die geringste Fugendrückung, wenn derselbe seine und die über ihm liegende Masse in der Richtung einer freien Stützlinie stützt, welche vom Scheitel aus am innigsten mit der mittlern Wölblinie des Stützbogens zusammenfällt, und dabei nicht über den Stützbogen selbst hinausfällt. Diese Behauptung wollen wir für den Stützbogen Fig. 87 für den Fall darthun, dafs derselbe nur sein eignes Gewicht zu stützen hat. — Die freie Stützlinie dieses Bogens, die, vom Scheitel C der äufsern Wölblinie ausgehend, die innere in einem Puncte G berührt, ist CGo_2 und der Scheiteldruck für eben diese Stützungsrichtung nach Seite 272

$$C_1 = 0{,}0711\, wr^2.$$

Für den Stützbogen Fig. 87 nahmen wir Seite 270 an

$$R = 1{,}2r;\ h = 0{,}1r.$$

Das Gewicht eben dieses Bogens für die Tiefe 1 zwischen der Vertikale durch den Scheitel C und der Vertikale durch den Anfangspunct L der innern Wölbfläche ergiebt sich nach S. 261 für $\angle \widehat{\mu} = 90^0$ zu

$$W = wr^2 \left\{ \frac{1{,}2^2}{2} (\sin\psi \cos\psi + \psi) - \frac{\pi}{4} - n \right\}.$$

Nach Seite 261 ist ferner

$$\sin\psi = \frac{n}{R} \sin\mu,\ \text{d. g. } \angle \widehat{\psi} = 56^0\, 27'$$

und nach Seite 270

$$n = 0{,}1.$$

Gemäfs aller dieser Werthe wird

$$W = 0{,}1557\, wr^2.$$

Für jede freie Stützlinie ist nach II Seite 15

$$tg\, \alpha_n = \frac{W}{C_1} = \frac{0{,}1557}{0{,}0711};\ \text{d. g. } \angle \widehat{\alpha} = 65^0\, 27.$$

und folglich der Druck im Endpuncte der freien Stützlinie nach ihrer Richtung daselbst zufolge III Seite 16

$$D_1 = \frac{C_1}{\cos \alpha_n} = \frac{0{,}0711\, wr^2}{\cos 65^0\, 27'} = 0{,}17112\, wr^2.$$

Die Fugendrückung berechnen wir nach Anleitung der Formel (6) Seite 257, nämlich

$$t = \frac{4pz}{l^3}(l^2 - 3l\lambda + 3\lambda^2) = \frac{4pz}{l^3}\left\{l^2 - 3\lambda\,(l-\lambda)\right\}.$$

Hier bezeichnet t die Fugendrückung in der Richtung der Stützlinie, l die Länge der Fuge, λ den Abstand der Stützungsrichtung von der innern Wölblinie in der Richtung der Fuge gemessen, p den Druck in der Richtung der Stützung und z die Fugendrückung für die Fläche 1 und den Druck 1. Drückt man in der eben angeführten Formel die Längen l und λ für den Radius 1 aus, dann ist dieselbe umzugestalten in

$$t = \frac{4pz}{r}\left\{\frac{l^2 - 3\lambda\,(l-\lambda)}{l^3}\right\}.$$

Dieser Formel nun wollen wir uns zur Bestimmung der Fugendrückung für den Bogen Figur 87 bedienen. Für die vorstehende Formel ist näherungsweise

$$p = \frac{D_1 + C_1}{2} = 0{,}1211\, wr^2.$$

Am Bogen CL Fig. 87 nehmen wir erst eine Fuge im Scheitel und die übrigen um je 10^0 von einander entfernt und winkelrecht auf der mittlern Wölblinie stehend an. Mit Abnahme der betreffenden Maafse von der Figur erhalten wir aus der obenstehenden Formel

$$l_0 = 0{,}1;\ \lambda = 0;\ t_0 = 10 \cdot \frac{4pz}{r}.$$

Von dieser im Scheitel sich ergebenden Drückung ist nur die Hälfte dem Bogen CL, die andere aber dem Gegenbogen zuzurechnen. Für die um 10^0 vom Scheitel abstehende Fuge wird

$$l_{10} = 0{,}1;\ \lambda = 0{,}091;\ t_{10} = 7{,}543 \,.\, \frac{4pz}{r} \text{ und}$$

ferner für die folgenden Fugen

$$l_{20} = 0{,}104;\ \lambda = 0{,}07;\ t_{20} = 3{,}263 \,.\, \frac{4pz}{r};$$

$$l_{30} = 0{,}112;\ \lambda = 0{,}04;\ t_{30} = 2{,}665 \,.\, \frac{4pz}{r};$$

$$l_{40} = 0{,}123;\ \lambda = 0{,}016;\ t_{40} = 5{,}372 \,.\, \frac{4pz}{r};$$

$$l_{50} = 0{,}135;\ \lambda = 0;\ t_{50} = 7{,}407 \,.\, \frac{4pz}{r};$$

$$l_{60} = 0{,}15;\ \lambda = 0;\ t_{60} = 6{,}667 \,.\, \frac{4pz}{r};$$

$$l_{70} = 0{,}164;\ \lambda = 0{,}016;\ t_{70} = 4{,}488 \,.\, \frac{4pz}{r}.$$

Die gesammte Fugendrückung vom Scheitel C bis zur Vertikale durch L ist

$$42{,}516 \,.\, 0{,}1211\, wr^2 \,.\, \frac{4z}{r} = 5{,}149\, wr \,.\, 4z.$$

Der freien Stützlinie DRo_1 Figur 87, welche vom Scheitel aus mit der mittlern Wölblinie am innigsten zusammenfällt, gehört zufolge Seite 271 ein Scheiteldruck zu von

$$C = 0{,}106.$$

Für eben diese Stützlinie ist ferner

$$tg\,\alpha_n = \frac{W}{C} = \frac{0{,}1557}{0{,}106},\ \text{also}\ \angle\,\alpha_n = 55^0\ 45'$$

und der Druck in ihrem Endpuncte ist

$$D = \frac{C}{\cos\alpha_n} = \frac{0{,}106\ wr^2}{\cos 55^0\ 45'} = 0{,}1883\, wr^2,$$

also in Beziehung auf die obenstehende Formel für t

$$p = \frac{D+C}{2} = 0{,}147\, wr^2.$$

Die freie Stützlinie DRo_1 fällt vom Scheitel D aus bis zum Puncte R hin fast ganz genau mit der mittlern Wölblinie zusammen. Für alle Lagerflächen bis zum Puncte R wird deſshalb in der oben angeführten Formel

$\lambda = \frac{1}{2} l$ und allgemein

$$t = \frac{4pz}{4lr}.$$

Nach dieser Formel und mit Abnahme der Fugenlängen von der Figur ergiebt sich als Fugendrückung im Scheitel

$$l_0 = 0{,}1;\; t_0 = 2{,}5 . \frac{4pz}{r},$$

von welcher nur die Hälfte auf die gesammte Fugendrückung der Bogenhälfte CL Fig. 87 einwirkt. Ferner wird

$$l_{10} = 0{,}1;\quad t_{10} = 2{,}5 . \frac{4pz}{r};$$

$$l_{20} = 0{,}104;\; t_{20} = 2{,}403 . \frac{4pz}{r};$$

$$l_{30} = 0{,}112;\; t_{30} = 2{,}232 . \frac{4pz}{r};$$

$$l_{40} = 0{,}123;\; t_{40} = 2{,}032 . \frac{4pz}{r}.$$

Die nun folgenden Fugendrückungen sind wieder mittels der Formel

$$t = \frac{4pz}{r} \left\{ \frac{l^2 - 3\lambda\,(l - \lambda)}{l^3} \right\}$$

zu bestimmen und man erhält:

$$l_{50} = 0{,}135;\; \lambda = 0{,}077;\; t_{50} = 1{,}962 . \frac{4pz}{r};$$

$$l_{60} = 0{,}15;\quad \lambda = 0{,}096;\quad t_{60} = 2{,}053 \,.\, \frac{4pz}{r};$$

$$l_{70} = 0{,}164;\quad \lambda = 0{,}135;\quad t_{70} = 3{,}443 \,.\, \frac{4pz}{r}.$$

Die Summe der Fugendrückungen in der Richtung der freien Stützlinie DRo_1 Fig. 87 ergiebt sich nun zu

$$17{,}875 \,.\, 0{,}147 \,.\, \frac{4pz}{r} = 2{,}627 \,.\, 4z \,.\, wr.$$

Eine Vergleichung dieser Fugendrückung mit jener, die wir für eine Stützung nach der Richtung der freien Stützlinie CGo_2 fanden, nämlich

$$5{,}149 \,.\, 4z \,.\, wr,$$

giebt uns, wie leicht zu erkennen, die Bestätigung zur oben gestellten Behauptung für den Bogen Fig. 87, dafs nämlich die geringste Fugendrückung in der Richtung der mittlern freien Stützlinie, welche sich der mittlern Wölblinie am innigsten anschliefst, vorhanden ist, dafs folglich auch ohne besondere Behinderung die Stützung nur in der Richtung dieser mittlern Stützlinie eintreten kann. Was wir aber für den Stützbogen Fig. 87 dargethan haben, das findet sich auch für jeden andern, gleichviel ob er übermauert ist oder nicht, dafern nur die mittlere Stützlinie nicht über den Stützbogen hinausfällt oder, im Falle diefs geschehen könnte, mittels genügender Hintermauerung gezwungen wird, als vorgeschriebene Stützlinie in der Richtung der mittlern Wölblinie fortzugehen.

9) Das übliche Verfahren bei dem Bau von Brückenbögen, nämlich das, jeden Stützbogen zu schleifsen, bevor die zu seinem gesicherten Bestehen eben nicht erforderliche Hintermauerung aufgeführt ist, vielmehr diese, die Uebermauerung und die Ueberfüllung erst nach dem Schlusse des Stützbogens zu vollenden, wird Veranlassung, dafs die gesammte Bogenmasse eines solchen wesentlich nur vom Stützbogen gestützt werden mufs. — Die Begründung dieser Behauptung ist leicht, wenn man auf die bei dem bemerkten Verfahren bestehenden Verhältnisse etwas näher eingeht. Der geschlossene und seine Masse wesentlich in seiner Richtung stützende

Stützbogen hat in seinen Lagerflächen bereits eine Drückung erfahren, die durch eine Druckvermehrung selbst dann nur eine geringe Zunahme erleidet, wenn Mörtel als Bettungsmaterial in den Lagerflächen der Wölbsteine liegt. Das Mauerwerk und das sonstige Belastungsmaterial, das nur allmälig auf einen bereits geschlossenen Stützbogen kommt, wird zwar in den meisten Fällen eine geringe Zunahme der Fugendrückung bewirken, namentlich wenn gewöhnlicher Luftmörtel als Bettungsmaterial für die Wölbsteine in Anwendung kommt, doch wird eben diese Drückung mit dem Aufbringen der Last eintreten und die Hinter- und Uebermauerung wird ihr folgen, oder sie wird nachsinken, bevor sie den zur Selbststützung erforderlichen Zusammenhang erlangt hat, d. h. die Hintermauerung, die Uebermauerung, die Bekiesung u. d. m. wird, wie die Masse des Stützbogens selbst, nur von diesem gestützt werden können.

Die Bestimmung eines Stützbogens für Brückenbögen, die wir oben (auf Seite 304) aufstellten, kann nicht geläugnet werden. War man sich derselben auch nicht immer klar bewusst, so zielen doch alle durch die Erfahrung gebotenen Vorkehrungen bei deren Herstellung unzweideutig darauf hin.

Nach den gemachten Vorerörterungen wird es uns nun leicht, die oben unter B. (Seite 304) gestellte Frage: Durch welche Mittel und Vorkehrungen wird der Bestimmung der Tragbögen oder Stützbögen Genüge geleistet? auf eine für die Praxis genügende Weise zu beantworten und zwar wie folgend: Ein Stützbogen entspricht seiner Bestimmung,

aa) wenn das Widerlager, gegen das sich ein solcher lehnt, einen genügend grofsen Widerstand bietet;

bb) wenn der Stützbogen selbst eine Form hat (bedingt durch die Gestalt seiner innern Wölblinie und durch seine Höhe), mit deren mittlerer Wölblinie eine mittlere der Massenanordnung entsprechende freie Stützlinie vom Scheitel aus nahe durchweg zusammenfällt;

cc) wenn bei dem Schlusse eines Stützbogens eine gleichmäfsig dicht schliefsende Lagerung aller Lagerflächen desselben herbeigeführt wird, und

dd) wenn das Material des Stützbogens für den Druck fest genug ist, den es durch die Stützung erleidet.

Nunmehr sind wir ferner auch im Stande, die im Eingange dieses Abschnittes allgemein gestellte Frage: In welcher Richtung oder in welcher Weise stützt sich die Masse eines gegebenen Brückenbogens? bedingungsweise zu beantworten, und zwar so:

Die gesammte Masse eines Brückenbogens oberhalb der innern Wölbfläche stützt sich vom Scheitel ab in der Richtung einer durch die Massenanordnung bedingten und am innigsten mit der mittlern Wölblinie von ihrem Scheitel aus zusammenfallenden freien Stützlinie. Diese Stützung erfolgt ferner entweder durchgängig in der bemerkten freien Stützlinie, auch wenn sie entfernt vom Scheitel die Richtung der mittlern Wölblinie überschreitet, oder sie erfolgt nur bis zu einem gewissen Abstande vom Scheitel in einer freien Stützlinie, die sich der mittlern Wölblinie daselbst am innigsten anschliefst, in der Fortsetzung aber in der Richtung der letztern, indem diese als vorgeschriebene Stützlinie auftritt.

Diese zwei Formen der Stützungsrichtung der Masse eines Stützbogens treten indefs zuverlässig nur bei der üblichen Herstellungsweise und gebräuchlichen Form der Brückenbögen oder überhaupt nur dann ein, wenn ein Tragbogen, d. h. ein ringförmiger, gewölbter Theil als Stützgrund für die Bogenmasse besteht, wenn dieser für sich hergestellt und völlig dicht schliefsend geschlossen, und wenn hierauf erst die Hinter- und Uebermauerung oder Ueberfüllung bewirkt wird.

Die zweite auf Seite 304 angeführte Bestimmung eines Stützbogens: jene Lasten mit Sicherheit zu stützen, die über den zugehörenden Brückenbogen weggeführt werden, legt uns nochmals die Frage vor: Wie stützt ein Brückenbogen Lasten, die denselben überschreiten? und führt uns ferner auf die Frage: Wie mufs ein Brückenbogen construirt und ausgeführt werden, um am tauglichsten zur Stützung von Lasten zu werden? — Ueber die erste der eben gestellten Fragen haben wir bereits umständlich im siebzehnten Abschnitte gesprochen. Dafs die Stützungsweise, die wir dort als die allein wahre hinstellten, möglich ist, unterliegt keinem Zweifel; aber noch ist nicht mit Bestimmtheit entschieden, wenn wir von Versuchsergebnissen absehen, ob sie nothwendig statthaben mufs. In Frage kommt nämlich: Ob nicht die Lasten, indem sie eine

Brücke überschreiten und dabei die Brückenbahn nur in einzelnen Puncten berühren, als solche anzusehen sind, welche mit dem Material eines Brückenbogens gemeinschaftlich die Form einer Stützlinie bedingen, die zu ihrer gemeinschaftlichen Stützung erforderlich oder vorhanden ist? Diese Frage kann im Allgemeinen, besonders aber mit Hinsicht auf die übliche Herstellungsweise der Stützbögen, nur verneint werden. — Von einem Brückenbogen ist zwar das Mauerwerk des Stützbogens am dichtesten gelagert, besitzt defshalb die geringste Befähigung zu einer weitern Drückung und der letztere mufs eben darum die Lasten wesentlich nach seiner Richtung hin stützen, die über den Bogen weggeführt werden, aber dessen ungeachtet bewirkt die Masse, die sich zwischen dem Stützbogen und der Brückenbahn befindet, dafs nicht jener Querschnitt des Stützbogens die Last allein zu tragen bekommt, der vertikal unter der letztern liegt, sondern dafs sich die Last über eine gröfsere Bogenstrecke verbreitet. Der Grad dieser Verbreitung wird zwar vom Zusammenhange und der Drückbarkeit des Materials bedingt sein, das zwischen dem Stützbogen und der Brückenbahn liegt, aber auch von der Fähigkeit des Stützbogens abhängen, die Last aufnehmen zu können. Die Verbreitung der Last über den Stützbogen weg wird endlich nur von der Fähigkeit desselben, die Last stützen zu können, abhängen, wenn das über dem Stützbogen befindliche Material als ein durchaus starrer und gleichmäfsig dicht zusammenhängender Körper auftritt. Hiermit kommen wir auf das, was wir bereits im siebzehnten Abschnitt behandelt haben. Doch, wie geschieht die Stützung der Last, wenn das über dem Stützbogen befindliche Material nicht die eben vorausgesetzte Beschaffenheit hat, in deren Folge der Stützbogen nach und nach so viel von der Last in sich aufnimmt, als sich mit seiner Fähigkeit hierzu verträgt? Ueber die Schwierigkeiten, die aus der Fortspinnung dieser Betrachtung entspringen, kommen wir leicht hinweg, wenn wir die Sache so auffassen, wie sie in der Wirklichkeit besteht.

Soll eine Last, die über einen Brückenbogen weggeht, eine Abänderung der Stützungsrichtung desselben bedingen, dann mufs noch die Fähigkeit des Stützbogens bestehen, seine Stützungsrichtung ändern, sich also selbst bewegen zu können. Doch, dem ist nicht so; jeder Stützbogen wird durch die Hinter- und Uebermaue-

rung, wohl auch mit durch die Ueberfüllung, ja schon durch die Stirnmauern allein für Lasten, welche über den Bogen wegschreiten, ein dermafsen steifer Körper, dafs von einer Formänderung nicht mehr die Rede sein kann. Aendert sich indefs die Form eines Stützbogens durch überschreitende Lasten, dann entspricht die Hintermauerung, sie bestehe nun in Stirnmauern oder in massiver Hintermauerung, ihrer Bestimmung nicht, und der Bogen kann schon durch verhältnifsmäfsig geringe Lasten zerstört werden. Ist aber ein Brückenbogen mit Zuziehung seiner Hintermauerung ein starrer Körper, dann wird er auch wie ein solcher, nämlich auf dem Wege der geringsten Drückung, also in der Weise mittels seines Stützbogens jede übergehende Last stützen, die wir bereits im siebzehnten Abschnitte betrachteten.

Ein Stützbogen, der nicht aus zwei oder mehrern gesonderten Ringen zusammengesetzt ist, sondern aus Steinen besteht, die mindestens wechselsweise von der innern Wölbfläche bis zur äufsern hin reichen, kann nur in der Richtung einer Linie stützen, wie wir bereits unter 4) S. 305 anführten. Diefs nun führt uns zu dem Satze:

Die Linie der Massenstützung eines Brückenbogens ist auch die Linie der vorgeschriebenen Stützung für Lasten, die über denselben wegschreiten.

Nicht bei allen Stützbögen fällt die Linie der freien Stützung oder die freie Stützlinie mit der mittlern Wölblinie zusammen. Soll die Stützung wesentlich in der Richtung der mittlern Wölblinie geschehen, dann ist sie, durch Hintermauerung des Stützbogens, in eine vorgeschriebene Stützlinie zu verwandeln, die ihren überschüssigen Horizontaldruck an jene abgiebt. Indem ein Stützbogen die über den Bogen weggehenden Lasten stützt, wirkt dessen mittlere Wölblinie ebenfalls als vorgeschriebene Stützlinie, mufs also ebenfalls Horizontaldruck absetzen können. Die Fähigkeit eines Stützbogens, Horizontaldruck an seine Hintermauerung abgeben zu können, ohne dabei eine Formänderung zu erleiden, wird sicher am meisten gefördert, wenn die Stofsflächen seiner Wölbsteine, in ihrer Berührung mit der Hintermauerung, vertikal sind, ja wir müssen diese Beschaffenheit der Wölbsteine im Stützbogen für um so nothwendiger erkennen, je mehr sich die Richtung des Stützbogens der vertikalen Richtung nähert.

Bereits früher, und zwar auf Seite 150, haben wir angeführt, dafs ein Stützbogen nicht allein in der Vertikalebene eine über den Bogen wegschreitende Last stützen werde, in welcher sich letztere selbst befindet, sondern dafs sich die Stützung über die ganze Tiefe des Stützbogens verbreiten müsse, sobald ein gehöriger Wechsel der Stofsfugen der Wölbsteine stattfinde. Die Betrachtungen auf Seite 255 setzen uns nun in den Stand, das Gesetz dieser Druckvertheilung über die ganze Tiefe eines Stützbogens näher zu bezeichnen. — In die auf Seite 255 gefundene Gleichung

$$P = \frac{ax}{z} + \frac{x^2(b-a)}{2zl}$$

für b und a die Werthe von Seite 257 gesetzt, giebt

$$P = \frac{px}{l^3}\left\{6\lambda(l-x) - l(2l-3x)\right\}.$$

In dieser Formel bezeichnet λ den Abstand EF Fig. 82 und p den Druck, der in der Richtung KE von der Fläche DG aus gegen $AF = 1$ hin geübt wird, ferner P den Druck, der hiervon auf die Länge $AB = x$ der Stützfläche AF kommt. Setzen wir den Abstand AE der Druckrichtung von A gleich y, also $\lambda = l - y$, dann geht die vorstehende Gleichung über in

$$P = \frac{px}{l^3}\left\{6(l-y)(l-x) - l(2l-3x)\right\}.$$

Wenn diese Formel zur Bestimmung der Druckvertheilung über den Querschnitt eines Stützbogens dienen soll, dann bezeichnet in derselben l die Tiefe des Stützbogens, y den Abstand des belasteten Punctes von der einen Stirnseite, x den Abstand von der nämlichen Stirnseite, welcher von der Last mit P gedrückt wird, und endlich p den Druck, der von der Last L überhaupt auf den Stützbogen nach seiner Richtung übergeht.

Um die Druckvertheilung für einen besondern Fall zu bestimmen, nehmen wir den Abstand y der Last von der einen Stirnseite zu $\frac{1}{3}$ der Tiefe des Stützbogens, also $y = \frac{1}{3}l$ an und setzen auf einander folgend $\frac{1}{5}l$, $\frac{2}{5}l$, $\frac{3}{5}l$, $\frac{4}{5}l$ und l für x in die obenstehende Formel. Hierbei ergiebt sich der Druck,

welchen das erste Fünftel der Tiefe des Stützbogens trägt, zu

$$P_{\frac{1}{5}} = \frac{9}{25} p,$$

welchen die zwei ersten Fünftel des Stützbogens tragen, zu

$$P_{\frac{2}{5}} = \frac{16}{25} p,$$

welchen die drei ersten Fünftel des Stützbogens tragen, zu

$$P_{\frac{3}{5}} = \frac{21}{25} p,$$

welchen die vier ersten Fünftel des Stützbogens tragen, zu

$$P_{\frac{4}{5}} = \frac{24}{25} p \text{ und}$$

welchen die ganze Tiefe des Stützbogens stützt, zu

$$P_1 = p.$$

Somit stützt von der Tiefe des Stützbogens

das erste Fünftel den Druck $\frac{9}{25} p$,

„ zweite „ „ „ $\frac{7}{25} p$,

„ dritte „ „ „ $\frac{5}{25} p$,

„ vierte „ „ „ $\frac{3}{25} p$ und

„ fünfte „ „ „ $\frac{1}{25} p$.

Ein und zwanzigster Abschnitt.

Ueber Pfeilerformen und deren Standfähigkeit.

Für Brückenbögen kommen die Pfeiler rücksichtlich ihrer Tragfähigkeit und Steifigkeit für überstehende Lasten, sowie rücksichtlich ihrer Standfähigkeit gegen Horizontaldruck in Betrachtung.

Die erste Anforderung, der ein Brückenpfeiler zu genügen hat, ist die, sein eignes Gewicht und das der überstehenden Massen durch die rückwirkende Festigkeit seines Materials mit genügender Sicherheit stützen oder tragen zu können. Die Bestimmung der hierzu erforderlichen Querschnittsflächen ist leicht, wenn man die rückwirkende Festigkeit des Materials als Mauerkörper und den zulässigen Grad der Beanspruchung derselben kennt. — Gesetzt, es sei die Last gleich W, die auf den Pfeilerquerschnitt in seinem Ende bei A Fig. 96 kommt, die rückwirkende Festigkeit des Materials als Mauerkörper für die Flächeneinheit gleich γ, der zu beanspruchende Theil dieser Festigkeit gleich m und das Eigengewicht des Pfeilermaterials gleich w. Die stützende oder tragende Querschnittsfläche f, die der Pfeiler bei A bedarf, ergiebt sich aus der Gleichung

$$W = f . m\gamma \text{ zu}$$

$$(1)\ f = \frac{W}{m\gamma}.$$

Pfeilerquerschnitte, die unter A Fig. 96 liegen, tragen aufser der Last W noch das Gewicht der überstehenden Pfeilermasse, wefshalb die tiefer liegenden Querschnittsflächen immer gröfser werden müssen, soll das Pfeilermaterial durchaus gleich belastet sein. Die Bestimmung der hierzu erforderlichen Querschnittsflächen wird von der Bauform der Pfeiler oder davon abhängen, ob die Vergröfserung ihrer Querschnitte in Absätzen, wie diefs in Fig. 96 angedeutet ist, oder ob sie stetig, wie Fig. 97 zeigt, geschehen soll. Beide Bauformen sind im Gebrauch. Wir ziehen zunächst die erste in Betrachtung und bezeichnen zu diesem Ende in Fig. 96 die Höhen AB, BC, CD, DE etc. mit h, h_1, h_2, h_3 ..., den durchaus gleichen Quer-

schnitt von AB mit f, von BC mit f_1, von CD mit f_2 etc. Der erste Pfeilertheil AB trägt mit seiner Grundfläche das Gewicht

$$W + fhw,$$

folglich mufs sein

$$W + fhw = f\gamma m \text{ d. g.}$$

$$f = \frac{W}{\gamma m - hw}.$$

Der zweite Pfeilertheil trägt mit seiner Grundfläche bei C die Last

$$W + fhw + f_1 h_1 w,$$

also mufs sein

$$W + fhw + f_1 h_1 w = f_1 \gamma m \text{ d. g.}$$

$$f_1 = \frac{W + fhw}{\gamma m - h_1 w}.$$

Der dritte Absatz des Pfeilers trägt an seiner Basis bei D das Gewicht

$$W + fhw + f_1 h_1 w + f_2 h_2 w,$$

demnach mufs sein

$$W + fhw + f_1 h_1 w + f_2 h_2 w = f_2 \gamma m \text{ d. g.}$$

$$f_2 = \frac{W + fhw + f_1 h_1 w}{\gamma m - h_2 w}$$

Auf gleiche Weise fortgeschlossen, so erhalten wir für die Querschnittsfläche des n^{ten} Pfeilerabsatzes

$$\text{I. } f_n = \frac{W + fhw + f_1 h_1 w + \ldots f_{n-1} h_{n-1} w}{\gamma m - h_n w}$$

und die Masse des ganzen Pfeilers zu

$$\text{II. } Q = fh + f_1 h_1 + f_2 h_2 \ldots + f_n h_n.$$

Die Verwendung dieser Formeln unterliegt keiner Schwierigkeit, wefshalb wir es vorerst unterlassen, dieselben auf einen besondern Fall zu beziehen, und wenden uns sogleich zur Bestimmung der Pfeilerquerschnittsflächen bei Voraussetzung einer stetigen Zunahme derselben, wie diefs in Figur 97 angedeutet ist. — Für die

Belastung W im Pfeilerende bei A ist wieder, wie in (1), die Querschnittsfläche daselbst

$$f = \frac{W}{m\gamma}.$$

Die der lothrechten Höhe $AB = y$ zugehörende Pfeilermasse innerhalb der Querschnitte durch A und B sei Q und die Querschnittsfläche bei B gleich x. Mit dieser Bezeichnung ist

$$(2)\quad x\gamma m = W + Qw, \text{ sowie}$$

$$(3)\quad d.Q = x.dy.$$

Durch Differenzirung der Gleichung (2) wird

$$\gamma m.dx = w.dQ$$

und mit Hinsicht auf (3) folgt hieraus

$$\gamma m dx = wxdy \text{ d. g.}$$

$$y = \frac{\gamma m}{w} \, lognt\, x + Const.$$

Für $y = o$ geht die Querschnittsfläche x in die Querschnittsfläche f bei A über, d. g.

$$o = \frac{\gamma m}{w} \, lognt\, f + Const, \text{ also}$$

$$y = \frac{m\gamma}{w} \, lognt\left(\frac{x}{f}\right) \text{ oder}$$

wenn für f sein Werth aus (1) eingesetzt wird,

$$y = \frac{m\gamma}{w} \, lognt\left(\frac{xm\gamma}{W}\right), \text{ also auch}$$

$$\text{III.}\quad x = \frac{W}{m\gamma} . 2{,}718282^{\frac{wy}{m\gamma}}.$$

Durch Division mit der Gleichung (2) in die Gleichung (3) wird

$$\frac{wdy}{m\gamma} = \frac{w.dQ}{W + Qw}.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$\frac{wy}{m\gamma} = lognt\,(W + Qw) + Const.$$

Für $y = o$ geht Q in o über, d. g.

$$\frac{wy}{\gamma m} = lognt\left(\frac{W + Qw}{W}\right),$$

$$\frac{W + Qw}{W} = 2{,}71828^{\frac{wy}{\gamma m}} \text{ oder}$$

$$\text{IV. } Q = \left\{2{,}71828^{\frac{wy}{\gamma m}} - 1\right\}\frac{W}{w}.$$

Die unter I und III gefundenen Formeln für Pfeilerquerschnitte, die eine durchaus gleichmäfsige Beanspruchung der rückwirkenden Festigkeit des Materials bedingen, wollen wir auf einen besondern Fall anwenden, wir wollen nämlich die Querschnittsflächen eines Pfeilers aufsuchen, gegen den sich zwei halbkreisförmige Bögen Fig. 98 stützen. Der Radius der innern Wölblinie dieser Bögen sei $r = 25$, die Scheitelhöhe $EF = rh = \frac{1}{5}r$, ein Kubikfufs des Bogen- und Pfeilermaterials wiege $w = 84$ Pfund und die rückwirkende Festigkeit des Pfeilermauerwerks sei durchgängig für 1 Quadratfufs $m\gamma = 9000$ Pfuud. Ferner sei die Pfeilerlänge BC am Aufschlusse der Halbkreise auf den Pfeiler $l_0 r$ und die Tiefe der Bögen und Pfeiler ebendaselbst $t_0 r$. Gemäfs der vorstehenden Werthe ist das Gewicht, das auf die Pfeilerquerschnittsfläche BC kommt,

$$W = w\,.\,t_0 r\left\{(rl_0 + 2r)(r + rh) - \frac{r^2\pi}{2}\right\} = r^2 w\,.\,t_0 r\left\{(l_0 + 2)(1 + h) - \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Ferner soll

$$W = l_0 r\,.\,t_0 r\,.\,m\gamma$$

sein, d. g.

$$l_0 r\,.\,t_0 r\,.\,m\gamma = r^2 w\,.\,t_0 r\left\{(l_0 + 2)(1 + h) - \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Hieraus folgt

$$(4)\quad l_0 = \frac{2(1 + h) - \frac{1}{2}\pi}{\frac{m\gamma}{rw} - (1 + h)}$$

und wenn man die angenommenen Werthe einführt,

$$l_0 = 0{,}2683;\; rl_0 = 6{,}71 \text{ Fufs};$$

ferner wird, wenn man die Tiefe $t_0 r$ des Bogens 30 Fufs setzt,

$$W = 6{,}71 \times 30 \times 9000 = 1811700 \text{ Pfd.}$$

Zunächst wollen wir die Querschnittsflächen eines Pfeilers bestimmen, der in Absätzen gebaut sein soll, und wollen die Höhen dieser Absätze, von den Bogenanfängen gerechnet, auf einander folgend zu

$$h_1 = 10,\; h_2 = 11,\; h_3 = 12,\; h_4 = 13,\; h_5 = 14,\; h_6 = 15 \text{ Fufs}$$

die ganze Pfeilerhöhe also zu 75 Fufs annehmen. Durch Einführung der vorstehenden Werthe in die Formel X erhalten wir

$$f_1 = \frac{W}{\gamma m - h_1 w} = 222{,}02 \text{ Quadratfufs},$$

$$f_2 = \frac{W + f_1 h_1 w}{\gamma m - h_2 w} = 247{,}73 \text{ Quadratfufs},$$

$$f_3 = \frac{W + f_1 h_1 w + f_2 h_2 w}{\gamma m - h_3 w} = 278{,}67 \text{ Quadratfufs},$$

$$f_4 = \frac{W + f_1 h_1 w + \ldots f_3 h_3 w}{\gamma m - h_4 m} = 317{,}27 \text{ Quadratfufs},$$

$$f_5 = \frac{W + f_1 h_1 w + \ldots f_4 h_4 w}{\gamma m - h_5 w} = 364{,}97 \text{ Quadratfufs},$$

$$f_6 = \frac{W + f_1 h_1 w + \ldots f_5 h_5 w}{\gamma m - h_6 w} = 424{,}38 \text{ Quadratfufs}.$$

Der körperliche Inhalt des ganzen Pfeilers ist nach II

$$Q = f_1 h_1 + f_2 h_2 + f_3 h_3 + f_4 h_4 + f_5 h_5 + f_6 h_6 = 23889{,}08 \text{ Kubikfufs}.$$

Nach der Formel III erhalten wir für die Querschnittsfläche des Pfeilers *HIM* Fig. 98 an seiner Basis bei *M* unter den gestellten Bedingungen, also für die Höhe $y = 75$ Fufs

$$x = \frac{1811700}{9000} \times 2{,}71828^{\frac{84.75}{9000}}$$

$$log.\,x = log.\,201{,}3 + \frac{84.75}{9000}\,log.\,2{,}71828 = 2{,}607852.\ \text{d. g.}$$

$$x = 405{,}37 \text{ Quadratfuſs.}$$

Der Inhalt des ganzen Pfeilers wird nach IV

$$Q = \frac{W}{w}\left\{2{,}71828^{\frac{84.75}{9000}} - 1\right\} = 21863{,}3 \text{ Kubikfuſs.}$$

Die gefundenen Resultate lehren, wie es auch gar nicht anders sein kann, daſs bei einer stetigen Zunahme der Pfeiler die Endquerschnitte, und sonach die dazwischen liegenden, weniger groſs werden, mithin auch der gesammte Pfeilerinhalt weniger groſs ausfällt, als bei einer Zunahme in Absätzen. Für das gewählte Beispiel beträgt die mit der stetigen Zunahme, welche aus der vorausgesetzten gleichmäſsigen Beanspruchung der Festigkeit hervorgeht, bedingte Ersparniſs bei einem Pfeiler gegen die Zunahme in Absätzen

$$23889{,}08 - 21863{,}3 = 2025{,}78 \text{ Kubikfuſs.}$$

Aus den Querschnittsflächen, die ein Pfeiler haben muſs, läſst sich die Pfeilerform selbst bequem ableiten. Nimmt man z. E. bei den berechneten Pfeilerquerschnittsflächen für Absätze an, daſs die Pfeilertiefe durchaus dieselbe bleiben soll, dann erhält man die Pfeilerlängen, nämlich die Längen parallel der Ebene der Stirnfläche, wenn man die Querschnittsflächen durch 30 dividirt und zwar zu

$$rl_1 = \frac{222{,}02}{30} = 7{,}734 \text{ Fuſs}; \quad rl_4 = \frac{317{,}27}{30} = 10{,}58 \text{ Fuſs};$$

$$rl_2 = \frac{247{,}73}{30} = 8{,}257 \text{ ,,} \quad rl_5 = \frac{364{,}97}{30} = 12{,}166 \text{ ,,}$$

$$rl_3 = \frac{278{,}67}{30} = 9{,}622 \text{ ,,} \quad rl_6 = \frac{424{,}38}{30} = 14{,}146 \text{ ,,}$$

Die Pfeilerform, die sich aus den eben entwickelten Werthen bildet, zeigt der Pfeiler *BCN* Fig. 98.

Bei einem Pfeiler in Absätzen kann auch die Länge desselben durchaus gleich groſs beibehalten und die nöthige Zunahme der Querschnittsflächen der Absätze durch Vergröſserung ihrer Tiefe

bewirkt werden. Für das gewählte Beispiel erhält man die Tiefe der einzelnen Absätze, wenn deren Querschnittsflächen durch die gleiche Pfeilerlänge, hier 6,71 Fufs, dividirt werden, also:

$$rt_1 = \frac{222,02}{6,71} = 33,088 \text{ Fufs}; \quad rt_4 = \frac{317,27}{6,71} = 47,283 \text{ Fufs};$$

$$rt_2 = \frac{247,73}{6,71} = 36,919 \text{ „} \quad rt_5 = \frac{364,97}{6,71} = 54,392 \text{ „}$$

$$rt_3 = \frac{278,67}{6,71} = 41,530 \text{ „} \quad rt_6 = \frac{424,38}{6,71} = 63,246 \text{ „}$$

Die Pfeilerform, die sich mit diesen Werthen herausstellt, zeigt die Fig. 99.

Die Absätze, in welchen ein Pfeiler gebaut werden soll, können endlich auch gleichzeitig nach der Tiefe und Länge zunehmen und so die erforderliche Querschnittsfläche hervorbringen. Hierbei wird man entweder eine gleichmäfsige Zunahme der Länge voraussetzen und die Tiefe berechnen, oder so umgekehrt, oder auch, man wird ein sich gleich bleibendes Verhältnifs für die Länge und Tiefe voraussetzen. Sollen sich z. B. in allen Absätzen die Länge und Tiefe wie an den Bogenanfängen verhalten, dann ist für die Querschnittsfläche f_n die Pfeilertiefe daselbst mit $z_n . rt_0$, die Pfeilerlänge mit $z_n . rl_0$ zu bezeichnen und

$$z_n . rt_0 \times z_n . rl_0 = f_n \text{ d. g.}$$

$$z_n = \sqrt{\left(\frac{f_n}{rt_0 . rl_0}\right)},$$

Demnach ist die Pfeilertiefe

$$rt_0 . z_n = rt_0 \sqrt{\left(\frac{f_n}{rt_0 . rl_0}\right)} \text{ und}$$

die Pfeilerlänge

$$rl_0 . z_n = rl_0 \sqrt{\left(\frac{f_n}{rt_0 . rl_0}\right)}.$$

Für den aufgestellten besondern Fall haben wir

$rt_0 = 30$ Fufs; $rl_0 = 6,71$ Fufs; $rt_0 . rl_0 = 201,3$ Quadratfufs.

Somit wird

die Tiefe des ersten Absatzes $30\sqrt{\left(\frac{222{,}02}{201{,}3}\right)} = 31{,}506$ Fuſs,

„ Länge „ „ „ $6{,}71\sqrt{\left(\frac{222{,}02}{201{,}3}\right)} = 7{,}047$ „

„ Tiefe „ zweiten „ $30\sqrt{\left(\frac{247{,}73}{201{,}3}\right)} = 33{,}281$ „

„ Länge „ „ „ $6{,}71\sqrt{\left(\frac{247{,}73}{201{,}3}\right)} = 7{,}444$ „

„ Tiefe „ dritten „ $30\sqrt{\left(\frac{278{,}67}{201{,}3}\right)} = 35{,}297$ „

„ Länge „ „ „ $6{,}71\sqrt{\left(\frac{278{,}67}{201{,}3}\right)} = 7{,}895$ „

u. s. f.

Um die für eine durchaus gleichmäſsige Belastung der Pfeilerquerschnittsflächen erforderlichen Querschnitte in verschiedenen Höhen zu erhalten, ist nur die Gleichung III für diese Höhen, welche das y darstellt, zu entwickeln. Für Höhen von 10, 20, 30 ... 60,75 Fuſs ergiebt sich, in Beziehung auf die Figur 98 und für die gemachten Voraussetzungen,

$$log.\, x_{10} = log.\, \frac{1811700}{9000} + \frac{84.10}{9000}\, log.\, 2{,}71828;\ x_{10} = 220{,}99 \text{ Quadratfuſs},$$

$$log.\, x_{20} = log.\, 201{,}3 + \frac{84.20}{9000}\, log.\, 2{,}71828;\ x_{20} = 242{,}61 \quad „$$

$$log.\, x_{30} = log.\, 201{,}3 + \frac{84.30}{9000}\, log.\, 2{,}71828;\ x_{30} = 266{,}35 \quad „$$

$$log.\, x_{40} = log.\, 201{,}3 + \frac{84.40}{9000}\, log.\, 2{,}71828;\ x_{40} = 292{,}40 \quad „$$

$$log.\ x_{50} = log.\ 201{,}3 + \frac{84.50}{9000}\ log.\ 2{,}71828;\ x_{50} = 321{,}01\ \text{Quadratfuſs},$$

$$log.\ x_{60} = log.\ 201{,}3 + \frac{84.60}{9000}\ log.\ 2{,}71828;\ x_{60} = 352{,}41\ \text{„}$$

$$log.\ x_{75} = log,\ 201{,}3 + \frac{84.75}{9000}\ log.\ 2{,}71828;\ x_{75} = 405{,}37\ \text{„}$$

Aus diesen Querschnittsflächen sind, wie bei dem Pfeiler mit Absätzen, die Tiefen und Längen zu ermitteln. Sollen die Pfeilertiefen dieselben bleiben, dann erhält man für die Pfeilerlängen in lothrechten Abständen von 10, 20, 30 ... 75 Fuſs von *HI* Fig. 98

$$rl_{10} = \frac{220{,}9}{30} = 7{,}363\ \text{Fuſs};\quad rl_{50} = \frac{321{,}01}{30} = 10{,}700\ \text{Fuſs};$$

$$rl_{20} = \frac{242{,}61}{30} = 8{,}087\ \text{„}\quad rl_{60} = \frac{352{,}41}{30} = 11{,}747\ \text{„}$$

$$rl_{30} = \frac{266{,}35}{30} = 8{,}878\ \text{„}\quad rl_{75} = \frac{405{,}37}{30} = 13{,}512\ \text{„}$$

$$rl_{40} = \frac{292{,}40}{30} = 9{,}747\ \text{„}$$

Den Pfeileranlauf, der aus diesen Werthen hervorgeht, zeigt der Pfeiler *HIM* Fig. 98.

Soll die Pfeilerlänge dieselbe bleiben und die nöthige Verbreiterung nur in der Tiefe stattfinden, dann wird

$$rt_{10} = \frac{220{,}9}{6{,}71} = 32{,}935\ \text{Fuſs};\quad rt_{50} = \frac{321{,}01}{6{,}71} = 47{,}840\ \text{Fuſs};$$

$$rt_{20} = \frac{242{,}61}{6{,}71} = 36{,}157\ \text{„}\quad rt_{60} = \frac{352{,}41}{6{,}71} = 52{,}520\ \text{„}$$

$$rt_{30} = \frac{266{,}35}{6{,}71} = 39{,}694\ \text{„}\quad rt_{75} = \frac{405{,}37}{6{,}71} = 60{,}413\ \text{„}$$

$$rt_{40} = \frac{292{,}40}{6{,}71} = 43{,}577\ \text{„}$$

Der mit diesen Tiefen sich bildende Pfeileranlauf an den Stirnseiten ist in Figur 100 dargestellt.

Ein geradliniger Anlauf der Brückenpfeiler ist, namentlich bei grofser Höhe derselben, durch die Tragfähigkeit der Pfeilerquerschnittsflächen nicht zu rechtfertigen.

Die Querschnittsfläche eines Pfeilers kann eine rückwirkende Festigkeit besitzen, die an jeder Stelle der Zermalmung oder dem Zerdrücken widersteht, aber der Pfeiler kann nach einer Richtung hin, z. B. parallel den Steinflächen, eine so geringe Länge besitzen, dafs in Folge irgend einer äufsern Ursache, oder in Folge einer zufälligen Druckrichtung durch den Pfeiler, oder auch in Folge eines ungleichen Horizontaldruckes, den die Bogen gewähren, die sich gegen den Pfeiler stützen, ein Pfeilerbruch durch Ausbiegung entsteht. Nächst der erforderlichen rückwirkenden Festigkeit oder der nöthigen Querschnittsfläche mufs somit auch jeder zwischen zwei Bögen stehende Pfeiler einen genügenden Widerstand gegen Ausbiegung, d. h. einen gewissen Grad von Steifigkeit besitzen.

Die horizontale Länge der Brückenpfeiler, nämlich in einer Ebene parallel den Stirnflächen, ist in der Regel beträchtlich geringer, als deren Tiefe. Die Ausbiegung eines Pfeilers kann defshalb, dafern keine regelwidrige Mauerung stattgefunden hat, nur in einer Ebene parallel den Stirnflächen erfolgen. Ueberdiefs wirkt in eben dieser Ebene der Bogenschub auf Pfeilerausbiegung, wenn die Bögen ungleichen Schub bedingen, die sich auf einen Pfeiler aufschliefsen. Aus diesen Gründen werden wir nur die Pfeilersteifigkeit für eine den Stirnflächen parallele Ebene betrachten.

Stützen sich, wie in Fig. 101 angedeutet ist, zwei Bogen gegen einen Pfeiler und man legt einen Horizontaldruck V gegen den letztern an, dann tritt unter Umständen eine Pfeilerausbiegung oder Kantung ein, wie sie die Figur 101 zeigt. Um A findet nur eine Drehung, bei C eine Drehung des gebrochenen Pfeilers und zugleich eine Erhebung und bei F eine Drehung und gleichzeitig eine Erhebung statt. Mit der eintretenden Drehung um die Puncte A, C und F schieben sich entweder die beiden Bögen in ihren Scheitelfugen lothrecht empor, oder sie kanten in ihren Anfängen auf den Pfeilern, die dem brechenden gegenüber stehen. In beiden Fällen wird, für die beginnende Kantung des Pfeilers, die Bewegung des Punctes F

ohne Fehler als eine lothrecht aufsteigende in Rechnung zu bringen sein.

Um die zwei Bogenhälften Fig. 101, die sich bei der beginnenden Pfeilerkantung gegen den Punct F stützen, in ihren Scheitelfugen lothrecht empor zu schieben, ist in F ein lothrecht aufwärts gerichteter Druck von

$$U + (C + C_1)\,\varphi$$

erforderlich, wenn mit U das Gewicht zwischen F und den Scheiteln der Bögen, die sich gegen den brechenden Pfeiler stützen, mit C und C_1 die Scheiteldrücke der Bögen und mit φ der Reibungscoefficient bezeichnet wird. Der Druck ferner, der in F lothrecht aufwärts angelegt werden mufs, um eine Kantung der gegen den brechenden Pfeiler sich stützenden Bögen um ihre Anfänge auf den Gegenpfeilern einzuleiten, ist sehr nahe für die Tiefe 1

$$(5)\quad \frac{WS}{l+S} + W_1 + lYw = Nw,$$

wenn mit l die Pfeilerlänge bei F, mit W das Gewicht der rechten Bogenhälfte, mit W_1 das der linken oder jener Bogenhälfte, die nach der Richtung der Pfeilerausbiegung liegt, mit S die lichte Spannweite des von F aus zur Rechten liegenden Bogens, mit Y die Höhe der Mauermasse über F und mit w das Eigengewicht des Mauerwerks dargestellt wird.

Mit Hinsicht darauf, dafs sich unsere Bestimmung nur auf die beginnende Pfeilerausbiegung beziehen soll, und mit Hinsicht auf defsfallsige Versuche, die wir anstellten, kann für die Pfeilerausbiegung nur der letztgefundene Druck in (5) in Rechnung gebracht werden.

Während die Kantung des Pfeilers in der Weise, wie sie die Figur 101 darstellt, vor sich geht, erhebt sich der Schwerpunct G des untern Pfeilertheiles B_1D_1 um eine Höhe s, der Schwerpunct g des obern Pfeilertheiles ED_2 um eine Höhe s_1, ferner die Ecke F mit dem Drucke Nw um eine Höhe y lothrecht empor und der horizontal gerichtete Druck V durchläuft nach seiner Richtung hin den Weg $CC_2 = e$. Somit ergiebt sich, wenn man das Gewicht des untern Pfeilertheiles B_1D_1 mit Q, das des obern ED_2 mit Q_1 darstellt, und wenn V keine Pfeilerkantung bewirken soll,

$$(6) \quad Ve \leqq Qs + Q_1 s_1 + yNw.$$

Behufs der weitern Verwendung dieser Gleichung ist zuvor die Bestimmung der Längen e, s, s_1 und y erforderlich, zu der wir jetzt verschreiten wollen.

Die lothrechte Erhebung der Ecke C, für $AC = D$, $\angle CAB = \eta$ und den sehr kleinen Erhebungswinkel, ausgedrückt durch den Bogen δ für den Radius 1, ist

$$(7) \quad C_2C_1 = D \left\{ \sin(\eta + \delta) - \sin\eta \right\} = D\delta \cos\eta.$$

Die zugehörende horizontale Verschiebung der Ecke C ergiebt sich zu

$$(8) \quad e = CC_2 = D \left\{ \cos\eta - \cos(\eta + \delta) \right\} = D\delta \sin\eta.$$

Mit der Bewegung der Ecke C nach C_1 erhebt sich der Kantungspunct F bis F_1 hin. Diese Erhebung der Ecke F entsteht auch, wenn der Fufspunct C der Diagonale CF von C bis C_2 horizontal vorgerückt, womit F nach F_2 geht, und wenn eben dieser Fufspunct von C_2 bis C_1 lothrecht emporgehoben wird, was eine Aufsteigung der Ecke F von F_2 bis F_1 um $F_2F_1 = C_2C_1$ bedingt. Es sei die Diagonale $CF = D_1$ und der Richtungswinkel derselben mit einer Vertikale durch F gleich η_1. Hiermit wird

$$FD = D_1 \cos\eta_1; \quad CD = D_1 \sin\eta_1$$

$$(9) \quad C_2D = D_1 \sin\eta_1 - D\delta \sin\eta.$$

Rückt der Fufspunct C der Diagonale horizontal bis C_2, dann mindert sich der Richtungswinkel η_1 um einen sehr kleinen Winkel, dessen Bogenmaafs δ_1 sein mag, so dafs $\angle C_2F_2D = \eta_1 - \delta_1$ wird. Mit Benutzung des letztgenannten Winkels erhalten wir ferner

$$CC_2 = D_1 \left\{ \sin\eta_1 - \sin(\eta_1 - \delta_1) \right\} = D_1\delta_1 \cos\eta_1 \text{ d. g. nach (8)}$$

$$(10) \quad . \; \delta_1 = \frac{D\delta \sin\eta}{D_1 \cos\eta_1}.$$

Ferner

$$(11) \quad FF_2 = D_1 \left\{ \cos(\eta_1 - \delta_1) - \cos\eta_1 \right\} = D_1\delta_1 \sin\eta_1 = D\delta \sin\eta \, tg\,\eta_1;$$

(12) $y = FF_1 = FF_2 + C_2C_1 = D\delta \sin\eta \, tg\,\eta_1 + D\delta \cos\eta.$

Jede von A ausgehende Linie wird bei der Kantung des Pfeilers um A den Bogen δ und gleichzeitig jede von F ausgezogene den Bogen δ_1 beschreiben.

Die Entfernung, welche der Schwerpunct G des untern Pfeilertheiles von A hat, sei λ und der Richtungswinkel der Linie AG mit einer Horizontale sei ψ. Bei dieser Bezeichnung ergiebt sich die mit der Kantung entstehende Erhebung des Schwerpunctes zu

$$(13)\quad s = \lambda\left(\sin(\psi+\delta) - \sin\psi\right) = \lambda\delta\cos\psi.$$

Der Abstand gF, den der Schwerpunct g des obern Pfeilertheiles vom Kantungspuncte F habe, sei λ_1 und der Richtungswinkel der Linie gF mit einer Vertikale durch F hin ψ_1. Im nicht gekanteten Zustande ist der lothrechte Abstand des Schwerpunctes g von F

$$FI = \lambda_1 \cos\psi_1,$$

in der gekanteten Lage ist der lothrechte Abstand des Schwerpunctes von F_1

$$F_1I_1 = \lambda_1 \cos(\psi_1 - \delta_1),$$

also die Erhebung des Schwerpunctes

$$(14)\quad s_1 = II_1 = FI = FI_1 = \lambda_1\cos\psi_1 - (F_1I_1 - F_1F)$$
$$= D\delta \sin\eta \, tg\,\eta_1 + D\delta\cos\eta - \lambda_1\delta_1 \sin\psi_1$$
$$= D\delta\sin\eta\left(tg\,\eta_1 + cotg\,\eta - \frac{\lambda_1 \sin\psi_1}{D_1\cos\eta_1}\right)$$

Die Werthe für e, s, s_1, y und Nw in die Gleichung (6) gesetzt und beide Theile durch $D\delta \sin\eta$ dividirt, giebt

$$\text{V.}\quad V \leqq \frac{Q\lambda\cos\psi}{D\sin\eta} + Q_1\left(tg\,\eta_1 + cotg\,\eta - \frac{\lambda_1\sin\psi_1}{D_1\cos\eta_1}\right) + (tg\,\eta_1 + cotg\,\eta)\left\{\frac{WS}{l+S} + W_1 + lYw\right\}.$$

Für einen gegebenen Pfeiler ändern sich mit η die Winkel η_1, ψ, ψ_1, die Gewichte Q und Q_1, sowie D und D_1.

Die Pfeilerkantung wird in einem Puncte C beginnen, für welchen V ein Kleinstes ist; der Werth des Winkels η und der aller

davon abhängigen Gröfsen ist folglich so zu bestimmen, dafs der zweite Theil der Gleichung V ein Kleinstes wird.

Um aus der allgemeinen Gleichung V genäherte Werthe und Verhältnifszahlen zu erhalten, nehmen wir den Pfeiler Figur 101 in der Kantungsebene als ein Rectangel an, setzen dessen Länge $AB = l$ und dessen Höhe $AF = nl$, setzen ferner den Abstand des Punctes C, in welchem die Ausbiegung beginnt, von B gleich $m.nh$ und führen endlich wieder für

$$\frac{WS}{l+S} + W_1 + lYw$$

die Bezeichnung Nw ein.

Mit diesen Annahmen wird

$$\lambda = \tfrac{1}{2} D;\ \lambda_1 = \tfrac{1}{2} D_1;\ \eta = \psi;\ \psi_1 = \eta_1, \text{ ferner}$$

$$Q = mnl^2w;\ Q_1 = l^2nw\,(1-m);$$

$$tg\,\eta = mn;\ tg\,\eta_1 = \frac{1}{n(1-m)}.$$

Durch Einführung dieser Werthe in die Gleichung V erhalten wir

$$\text{VI.}\quad \frac{V}{w} \leqq \frac{l^2}{m} + \frac{N}{mn\,(1-m)}.$$

Der kleinste Werth des V, den die Ausbiegung des Pfeilers zu bewirken vermag, wird erhalten, wenn man m so wählt, dafs sich der zweite Theil der Gleichung VI als ein Kleinstes herausstellt. Nach der Lehre vom Maximum und Minimum erhält man diesen Werth, wenn man den ersten Differenzialquotienten des zweiten Theiles der vorstehenden Gleichung gleich o setzt; diefs giebt

$$(15)\quad -\frac{l^2}{m^2} - \frac{N}{n}\,\frac{(1-2m)}{m_2\,(1-m)^2} = o.$$

Aus dieser Bedingungsgleichung folgt für das Minimum der Gleichung VI

$$\text{VII.}\quad m = \left(1 + \frac{N}{nl^2}\right) - \sqrt{\frac{N}{nl^2}\left(1 + \frac{N}{nl^2}\right)}$$

und es ist m stets gröfser als 0,5.

Wenden wir die Formeln VI und VII auf einen besondern Fall an. — Die Figur 102 stellt einen der höchsten Pfeiler und die zugehörenden Bögen des Congleton-Viaductes der Manchester-Birmingham-Eisenbahn über den Flufs Dane dar. Der eben genannte Viaduct besteht aus überhaupt 41 durchaus gleichen Kreisstichbögen mit 60 Fufs lichter Spannweite und 21 Fufs lichter Stichhöhe. Die innere und äufsere Wölblinie der aus Ziegelsteinen hergestellten Stützbögen sind concentrisch und die durchaus gleiche Höhe derselben beträgt 3 Fufs. Die Brückenbahn liegt 2 Fufs über dem Scheitel der äufsern und 5 Fufs über dem Scheitel der innern Wölblinie. Die Pfeiler haben sämmtlich eine Länge von 10 Fufs und eine Tiefe von 31 Fufs, ihre Höhe aber ist verschieden; die gröfste Höhe, von der jedoch nur einige vorhanden sind, beträgt vom Kämpfer bis zur Sockelschicht 70 Fufs. Die Stützbögen, deren Stirnmauern und Hintermauerung, sowie die Pfeiler sind von Ziegelsteinen mit Ausnahme der Kämpfer, der Pfeilersockel und der Geländer, die aus Hausteinen bestehen. Nehmen wir die Ueberfüllung der Bögen, einschliefslich des steinernen Geländers, als gleich schwer mit Ziegelmauerung, dann ergiebt aus den vorstehenden Maafsen, in Beziehung auf die Formeln VI und VII für die Tiefe von 1 Fufs

$$W = W_1 = 394\,w;\ S = 60 \text{ Fufs};\ l = 10 \text{ Fufs};\ n = \frac{70}{10} = 7;$$

$$wlY = 290\,w;\ Nw = 1021{,}857\,w.$$

Nach VII wird nun

$$m = 0{,}5638 \text{ und nach VII}$$

$$V \leqq 770{,}97\,w.$$

Für eine Tiefe des Pfeilers von 31 Fufs und wenn 1 Kubikfufs des Mauerwerks 84 Pfund wiegt, erhält man die gesammmte Steifigkeit des Pfeilers zu

$$V \geqq 2007605{,}88 \text{ Pfd.}$$

Die Gleichung (16) zeigt schon, dafs stets m gröfser als ½ sein müsse, was sich mit dem vorstehend gewählten Beispiele ebenfalls herausstellen mufs. Für eine Pfeilerhöhe von 70 Fufs fanden wir

$$m = 0{,}56.$$

Für eine Pfeilerhöhe von 60 Fuſs, also $n = \frac{60}{10} = 6$ giebt die Formel VII

$$m = 0{,}5599 = 0{,}56;$$

für eine Pfeilerhöhe von 50 Fuſs oder für $n = \frac{50}{10} = 5$ wird

$$m = 0{,}55;$$

für eine Pfeilerhöhe von 40 Fuſs oder $n = \frac{40}{10} = 4$ wird

$$m = 0{,}54;$$

für eine Pfeilerhöhe von 30 Fuſs oder $n = \frac{30}{10} = 3$ wird

$$m = 0{,}53;$$

für eine Pfeilerhöhe von 20 Fuſs oder $n = \frac{20}{10} = 2$ wird

$$m = 0{,}52;$$

und für eine Pfeilerhöhe von 10 Fuſs oder $n = \frac{10}{10} = 1$ wird

$$m = 0{,}51.$$

Bei den bisherigen Untersuchungen über die Steifigkeit der Pfeiler setzten wir voraus, es erfolge z. E. in Figur 101 die Kantung in den Eckpuncten A, C und F, was aber selbst bei dem festesten Materiale nicht möglich ist. Die Kantungspuncte B, E und H Figur 103, um welche ein Pfeiler die Kantung einleitet, müssen von den zugehörenden Eckpuncten A, D und G um so entfernter liegen, je weniger tragfähig das Material ist. Bezeichnen wir vorläufig die Abstände AB, ED und GH Figur 103 der Kantungspuncte B, E und H von den zugehörenden Eckpuncten A, D und G mit c, c_1, c_2, behalten ferner einen Pfeiler bei, dessen vertikale Querschnittsfläche, parallel den Stirnflächen der zugehörenden Bögen, ein Rectangel mit der Länge $AC = l$ und der Höhe $AG = nl$ ist, und setzen wiederum den lothrechten Abstand des Kantungspunctes E von B gleich mnh, dann ist für die Formel V

$$V \leqq \frac{Q\lambda \cos\psi}{D \sin\eta} + Q_1\left(tg\,\eta_1 + cotg\,\eta - \frac{\lambda_1 \sin\psi_1}{D_1 \cos\eta_1}\right) + (tg\,\eta_1 + cotg\,\eta)\,Nw.$$

$$Q = mnl^2w;\ Q_1 = (1-m)\,nl^2w;$$

$$tg\,\psi = \frac{mnl}{l-2c}\ \lambda = (\tfrac{1}{2}\,l - c)\,sec\,\psi;$$

$$tg\,\psi_1 = \frac{l-2c_2}{nl(1-m)};\ \lambda_1 = \tfrac{1}{2}\,ln\,(1-m)\,sec\,\psi_1;$$

$$tg\,\eta = \frac{l-c-c_1}{mnl};\ D = (l-c-c_1)\,sec\,\eta;$$

$$tg\,\eta_1 = \frac{l-c_1-c_2}{nl\,(1-m)};\ D_1 = nl\,(1-m)\,sec\,\eta_1;$$

$$Nw = \frac{WS}{S+l-c_2} + \frac{W_1S_1}{S_1+c_2} + Ylw.$$

Der Natur der Sache nach kann es sich bei der Bestimmung der Steifigkeit eines Pfeilers nur um einen Näherungswerth für denselben handeln. Mit Rücksicht hierauf nun werden wir in den Stand gesetzt, für die lothrechte Entfernung des mittlern Kantungspunctes *E* vom tiefsten B anzunehmen

$m = 0,5 + n$ Hunderttheilchen, d. h.

ist der Pfeiler 3 mal so hoch als lang, dann ist genähert

$$m = 0,53.$$

Jetzt fragt es sich: Welchen Abstand haben die Kantungspuncte *B*, *E* und *H* von ihren zugehörenden Eckpuncten? Wenn die Kantung beginnt, vertheilt sich zwar immer noch der Druck Nw über die Fläche *GI*, doch in der Weise, daſs dieser Vertheilung ein Punct *H* als Mittelpunct aller Drücke zugehört. In gleicher Art vertheilt sich bei dem Beginn der Ausbiegung der Druck $Nw + Q_1$ über die Fläche *FD* und der Druckvertheilung entspricht ein Punct *E* als Mitteldruck, und ebenso vertheilt sich der Druck $Nw + Q_1 + Q$ über die Grundfläche *AC*, daſs ihr der noch unbekannte Kantungspunct *B* als Mittelpunct des Druckes entspricht.

In den Kantungspuncten selbst wird offenbar die Flächeneinheit am stärksten belastet, doch kann dieser Druck nicht gröfser sein, als die rückwirkende Festigkeit γ des Mauerkörpers. Hiernach und mit Berücksichtigung der Bestimmungen auf Seite 255 etc. wird es uns möglich, die Abstände c, c_1, c_2 der Kantungspuncte von ihren zugehörenden Eckpuncten aufzusuchen. — Gemäfs Seite 255 erleidet die Flächeneinheit bei B Figur 82 den Druck

$$\frac{a}{z} + \frac{x\,(b-a)}{z\,l}.$$

Setzen wir hierin die Werthe für a und b von Seite 257, setzen hierbei l_1 für λ und ferner $l - l_1$ für x, so erhalten wir den Druck, der auf die Flächeneinheit im Puncte E kommt, durch welchen die Druckrichtung hindurchgeht, zu

$$\frac{4p}{l^3}\left\{l_2 - 3ll_1 + 3l_1^{\,2}\right\}.$$

Dieser Druck mufs der rückwirkenden Festigkeit γ des Mauerkörpers gleich sein d. g.

$$\gamma = \frac{4p}{l^3}\left\{l^2 - 3ll_1 + 3l_1^{\,2}\right\}$$

und hieraus folgt

$$\text{VIII.}\quad l_1 = l\left\{\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{12}\left(\frac{l\gamma}{p} - 1\right)}\right\}.$$

Diese Formel giebt den Abstand $IH = l_1$ des Kantungspunctes H von der Ecke I, wenn $l = IG$, p gleich dem Drucke Nw, der auf die Fläche GI kommt, und für γ die rückwirkende Festigkeit des Mauerkörpers gesetzt wird. Ebenso geht

l_1 in FE über, wenn $l = FD$ und $p = Nw + Q$, und

l_1 in BC über, wenn $l = AC$ und $p = Nw + Q$

gesetzt wird.

Der Abstand $c_2 = GH$ eines Kantungspunctes H von der zunächst gelegenen Ecke ist also

$$\text{IX.}\quad c_2 = \frac{l}{2}\left\{1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(\frac{l\gamma}{p} - 1\right)}\right\}.$$

In dem Ausdrucke

$$\frac{l\gamma}{p} = \frac{\gamma}{\left(\frac{p}{l}\right)}$$

bezeichnet $\frac{p}{l}$ die Belastung, die bei gleichmäfsiger Vertheilung auf die Flächeneinheit kommen würde, mithin ist

$$\frac{l\gamma}{p}$$

die Zahl, die anzeigt, wie vielmal die rückwirkende Festigkeit der Querschnittsfläche z. B. in *GI* gröfser ist als die Last *Nw*, die eben diese Fläche trägt.

Wird die gesammte Festigkeit der Pfeilerquerschnittsfläche, z. B. bei *GI* Fig. 103, durch die überstehende Last in Anspruch genommen, wird also

$$\frac{l\gamma}{p} = 1,$$

dann giebt uns die Formel IX

$$c_2 = \frac{l}{2} \text{ d. h.}$$

der Kantungspunct liegt in der Mitte der Pfeilerlänge. Besteht die eben vorausgesetzte Beziehung in den übrigen Querschnittsflächen *ID* und *AC*, dann mufs auch für diese der Kantungspunct in der Mitte liegen. Nehmen wir dagegen an, es werde die rückwirkende Festigkeit der Pfeilerquerschnittsfläche *GI* durch die überstehende Last nur zum zehnten Theile beansprucht, es sei also

$$\frac{l\gamma}{p} = 1,$$

dann ergiebt sich nach IX

$$c_2 = \frac{l}{2}\,(1 - 1{,}732) = -0{,}366 \text{ d. h.}$$

eine Kantung um einen Punct zwischen *G* und *I* findet nicht, sondern nur eine ungleiche Drückung der Fläche *GI* hat statt und der Punct H_1 der eigentlichen Kantung liegt um

$$HH_1 = 0{,}336 \times GI$$

aufserhalb GI nach der Richtung des kantenden Druckes. Sobald die Festigkeit der Querschnittsflächen DF und AC durch die überstehenden Lasten ebenfalls nur zum zehnten Theile in Anspruch genommen wird, müssen die Kantungspuncte E_1 und B_1 gleichfalls aufserhalb der Flächen DF und AC liegen, und ferner auch hier sein

$$DE_1 = 0{,}366 \times FD;\ AB_1 = 0{,}366 \times AC.$$

Für den Fall, dafs die Kantung, etwa die der Querschnittsfläche GI, in der Ecke G eintritt, mufs $c_2 = o$ werden; d. g.

$$1 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\frac{l\gamma}{p} - 1\right);\ \frac{l\gamma}{p} = 4. \text{ d. h.}$$

Der Punct der Kantung der Fläche GI, und so auch der jeder andern Fläche, fällt genau auf die Ecke, sobald ¼ der rückwirkenden Festigkeit ihrer Querschnittsfläche durch die Belastung beansprucht wird.

Aus den vorstehenden Erörterungen entnehmen wir, dafs die Steifigkeit eines Pfeilers sehr wesentlich von der Zahl abhängt, die angiebt, der wievielste Theil von der rückwirkenden Festigkeit des Mauerkörpers durch die Belastung in Anspruch genommen wird und dafs mit eben dieser Zahl die Steifigkeit wächst; ferner, dafs (mit Hinsicht auf den besondern Fall, den wir auf Seite 332 behandelten) schon eine Pfeilerlänge, die durchaus $^1/_{10}$ der Pfeilerhöhe beträgt, einen für die Praxis genügenden Grad von Steifigkeit giebt, selbst wenn durch die Belastung ¼ der rückwirkenden Festigkeit des Mauerkörpers verwendet wird. Endlich zeigt uns noch die Formel IX, dafs der Abstand c_2 des Kantungspunctes von der zugehörenden Ecke als ein Vielfaches der Länge der Kantungsfläche auftritt.

Setzen wir in der Formel IX die beständige Zahl

$$\text{X.} \begin{cases} \tfrac{1}{2}\left\{1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(\frac{\gamma p}{l} - 1\right)\right\} = f, \text{ so wird} \\ c_2 = fl. \end{cases}$$

Allgemein ist demnach in Beziehung auf Figur 103, wenn wir den Pfeiler von durchaus gleicher Länge l annehmen,

$$c_2 = GH = f_2 l;\ c_1 = ED = f_1 l \text{ und } c = AB = fl.$$

Bei gleicher Länge und Tiefe des Pfeilers kann f nicht für alle Querschnittsflächen denselben Werth haben, wefshalb wir f_2, f_1 und f setzten. Für einen Pfeiler von durchaus gleicher Länge erhalten wir nun, mit Hinsicht auf V Seite 330,

$$\text{XI.} \quad V = \frac{Q\lambda \cos\psi}{D \sin\eta} + Q_1 \left(tg\,\eta_1 + colg\,\eta - \frac{\lambda_1 \sin\psi_1}{D_1 \cos\eta_1} \right) + (tg\,\eta_1 + colg\,\eta)\,Nw,$$

und es ist, wenn die Pfeilerhöhe das nfache der Breite beträgt, für eben diese Formel

$$Q = mnl^2w;\; Q_1 = (1-m)\,nl^2w;$$

$$tg\,\psi = \frac{mn}{1-2f};\; \lambda = l\,(\tfrac{1}{2} - f)\sec\psi;$$

$$tg\,\psi_1 = \frac{1-2f_2}{n(1-m)};\; \lambda_1 = \tfrac{1}{2}\,ln\,(1-m)\sec\psi_1;$$

$$tg\,\eta = \frac{1-f-f_1}{mn};\; D = l\,(1-f-f_1)\sec\eta;$$

$$tg\,\eta_1 = \frac{1-f_1-f_2}{n(1-m)};\; D_1 = nl\,(1-m)\sec\eta_1;$$

$$N = \frac{WS}{S+l-f_2l} + \frac{W_1S_1}{S_1+f_2l} + Ylw.$$

S_1 hat dieselbe Bedeutung für W_1, als S für W.

In allen vorstehenden Ausdrücken ist näherungsweise

$$m = 0{,}5 + n_1 \text{ Hunderttheilchen}$$

wenn n_1 die Zahl darstellt, die angiebt, wie oft der horizontale Abstand des mittlern Kantungspunctes E vom Kantungspuncte H oder B, also von der lothrechten Entfernung HB der äufsern Kantungspuncte H und B, enthalten ist.

Ist die Flächeneinheit der Pfeilerquerschnittsfläche allenthalben gleichmäfsig belastet, dann ist f in X für alle Querschnittsflächen unveränderlich, also der Abstand des Kantungspunctes für jede Kantungsfläche derselbe Theil der zugehörenden Pfeilerlänge. Hiermit

sind die Kantungspuncte B und H Fig. 103 zu finden. Der Kantungspunct E liegt über dem Mittel der Pfeilerhöhe. Nimmt man seine Lage vorläufig in der Mitte der Pfeilerhöhe an, bestimmt seinen mittlern horizontalen Abstand von B und H, und dividirt damit in die lothrechte Pfeilerhöhe, so erhält man als Quotient n_1, womit die mittlere Kantungsebene und der mittlere Kantungspunct selbst näher zu bestimmen sind. Die Ableitung der übrigen Gröfsen, welche die Lösung der allgemeinen Formel XI fordert, kann ich wohl als bekannt voraussetzen.

Zufolge unserer bisherigen Betrachtungen erscheint die Steifigkeit eines Pfeilers als sehr beträchtlich, und zwar um so gröfser, ein je kleinerer Theil der rückwirkenden Festigkeit durch die Pfeilerbelastung in Anspruch genommen wird und je länger der Pfeiler, verglichen mit seiner Höhe, ist. An sich braucht ein Pfeiler keine Steifigkeit, aber sie ist erforderlich zur Aufhebung eines ungleichen Schubs der Bögen, die sich gegen einen solchen lehnen. Dieser ungleiche Schub kann durch ungleich grofse Bögen, die sich gegen jenen stützen, er kann ferner durch eine regelwidrige Schliefsung der Bögen entstehen und kommt immer durch die Belastung eines Bogens zu Stande. Die mögliche Ungleichheit des Schubs, die bei gleich grofsen Bögen auf den gemeinschaftlichen Pfeiler übergehen kann, wird nur selten erheblich sein. Bei ungleichen Bögen kann diese Ungleichheit des Schubs jedoch grofs werden. Hier mufs durch Vermehrung der Pfeilerlänge, abgesehen von der erforderlichen rückwirkenden Festigkeit, die nöthige Steifigkeit geschafft werden. Die Lasten endlich, die über Brückenbögen wegschreiten, geben immer Schub gegen die zugehörenden Pfeiler, doch ist in der Regel dessen Einwirkung auf die vorhandene Pfeilersteifigkeit nur gering. Für dieselben Bögen, die sich gegen einen Pfeiler stützen, und für Querschnittsflächen des letztern, deren rückwirkende Festigkeit durch die überstehenden Massen etwa nur zum zehnten Theile in Anspruch genommen wird, mindert sich zwar die Steifigkeit des Pfeilers mit der Zunahme der Höhe des letztern, indefs nimmt auch die Einwirkung eines ungleichen Bogenschubs auf die Steifigkeit des Pfeilers mehr als im umgekehrten Verhältnisse der Zunahme der Höhe des letztern ab. Somit dürfte nur für ganz ungewöhnliche Pfeilerhöhen und für Mauerwerk von nur geringer

rückwirkender Festigkeit die Steifigkeit der Pfeiler in Frage kommen, während sie für geringere Pfeilerhöhen immer in genügender Gröfse vorhanden sein wird, besonders wenn die rückwirkende Festigkeit des Pfeilers erheblich gröfser als der Druck ist, der auf die verschiedenen Querschnittsflächen des letztern kommt.

Im Widerspruch mit den vorstehenden Bemerkungen scheinen die Wahrnehmungen der Praxis zu stehen. Aus diesen folgert man nämlich: es müsse ein Pfeiler um so mehr Anlauf erhalten, je höher derselbe geführt werde. Diese Folgerung ist zuverläfsig eine irrige für einen regelrechten Mauerverband, d. h. dann, wenn die Lagerflächen der Steine immer in einer Ebene liegen und nahe gleich hoch mit Mörtel erfüllt sind, oder wenn sich in verschiedenen Linien, die man durch den Pfeiler nach seiner Höhe zieht, gleich viel Lagerflächen befinden; dagegen wird sie nahezu wahr, wenn in den einzelnen Horizontalschichten nicht gleich hohe Steine liegen, oder wenn sich in Linien, die aus verschiedenen Puncten nach der Höhenrichtung des Pfeilers gezogen werden, ungleich viel Lagerflächen vorfinden. Im letztern Falle kommen ungleich viel drückbare Flächen, nämlich mit Mörtel erfüllte Lagerflächen, auf gleiche lothrechte Höhen des Pfeilers. Eine nothwendige Folge hiervon ist, dafs sich die überstehenden Lasten nicht gleichmäfsig über die Pfeilerquerschnittsflächen verbreiten können, sich vielmehr in Richtungen stützen, in welchen die geringste Anzahl von Lagerflächen oder die geringste Drückung vorhanden ist. Hieraus entsteht nun gar oft eine Ueberdrückung eben dieser Lagerflächen, ein Zerdrücken hohl liegender Steine, und ferner eine völlige Zerstörung der Pfeiler durch Spiefsung oder Abrutschung oder durch Ausbiegung.

Die Standfähigkeit eines Pfeilers, parallel zu den Stirnflächen der zugehörenden Bögen genommen, zu deren Betrachtung wir nun übergehen, kann nicht in Frage kommen, wenn sich zwei Bögen gegen einen solchen lehnen, denn die Bögen selbst verhindern ein Umfallen des Pfeilers. Die Standfähigkeit eines Pfeilers kommt aber in Frage, wenn sich nur ein Bogen gegen denselben anlehnt, wie diefs bei Widerlagspfeilern oder auch dann geschieht, wenn von den zwei Bögen eines Pfeilers der eine noch nicht vollendet oder einer derselben in Folge irgend einer Ursache niedergebrochen ist. Die freie Lage eines Pfeilers auf der einen Seite und der ein-

seitige Horizontalschub auf der andern bedingen ein Bestreben, den Pfeiler in der Nähe seiner Grundfläche durch Kantung umzuwerfen. Diesem Bestreben kann die genügende rückwirkende Festigkeit der Pfeilerquerschnittsflächen für die überstehenden Lasten, aber auch die Pfeilersteifigkeit allein genügend nicht entgegenwirken. Summarisch haben wir bereits in dem Abschnitte XI über die Standfähigkeit eines Pfeilers gegen den Horizontalschub eines anliegenden Bogens gehandelt, so dafs uns nur noch die gründlichere Auffassung und Durchführung ihrer Bestimmung übrig bleibt. Hierzu denken wir uns einen Pfeiler wie in Figur 104, gegen den sich irgend ein Bogen anlehnt. Beginnt ein Kanten des Pfeilers um irgend einen Punct H, dann fängt auch der Bogen an, sich in einer freien Stützlinie seiner Massenanordnung zu stützen, welche den geringsten Horizontalschub gewährt. Die Richtung des so auf den Pfeiler übergehenden Bogenschubs sei BD und B der Punct, in welchem eben diese Richtung die Vertikale durch den Bogenanfang F durchschneidet. Statt des Bogenschubs in der Richtung BD können wir uns von B aus den Horizontaldruck $C = BE$ des Bogens als Horizontaldruck und das Gewicht W des Bogens zwischen seinem Scheitel A und der Vertikale durch F als Vertikaldruck BF denken. Der Horizontaldruck hat die Kantung um H zu bewirken. Hierbei stützt sich der Bogen einerseits gegen B und anderseits gegen den Scheitel A. Die Kantung selbst schliefst eine Erhebung aller Massen zwischen der Horizontalebene durch IG, in welcher der Kantungspunct liegt, und der Vertikalebene durch den Scheitel A in sich.

Das Gewicht des über IG stehenden Pfeilertheiles sei P und der Schwerpunct desselben g. Die Entfernung gH des letztern vom Kantungspuncte bezeichnen wir mit λ, die Richtung der Linie gH mit einer Horizontale durch ψ und mit δ den sehr kleinen Bogen für den Radius 1, um welchen sich der Pfeiler kantet. Durch die Kantung erhebt sich der Schwerpunct g des Pfeilers um

$$h = \lambda \left(\sin(\psi + \delta) - \sin\psi \right) = \lambda\,\delta \cos\psi$$

lothrecht empor.

Ebenso beträgt die vertikale Erhebung des Punctes B durch die Kantung um H

$$h_1 = D\delta \cos\eta$$

und die horizontale Bewegung des Punctes B

$$v = D\delta \sin \eta ,$$

wenn mit D die Entfernung des Punctes B vom Kantungspuncte H und mit η der Richtungswinkel der Linie BH mit einer Horizontale dargestellt wird.

Das Moment des Horizontalschubs ist

$$CD\delta \sin \eta$$

und das Moment der Massen, die emporgehoben werden,

$$P\lambda\delta \cos \psi + WD\delta \cos \eta .$$

Soll keine Kantung zu Stande kommen, dann mufs sein

$$CD\delta \sin \eta \leqq P\lambda\delta \cos \psi + WD\delta \cos \eta \text{ d. g.}$$

$$CD \sin \eta \leqq P\lambda \cos \psi + WD \cos \eta \text{ oder}$$

$$P\lambda \cos \psi \geqq CD \sin \eta - WD \cos \eta .$$

Den Abstand des Kantungspunctes H von der nächstgelegenen Ecke erhalten wir nach IX dieses Abschnittes zu

$$c = \frac{l}{2}\left\{1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(\frac{l\gamma}{p} - 1\right)}\right\},$$

wenn l die Pfeilerlänge IG, γ die rückwirkende Festigkeit der Flächeneinheit des Querschnittes IG und p die gesammte Belastung darstellt, die auf die Fläche IG fällt. Mit diesem Werthe, und wenn man ferner mit u den horizontalen Abstand des Pfeilerschwerpunctes vom Puncte der Kantung und endlich mit t den vertikalen, mit v aber den horizontalen Abstand des Punctes B vom Puncte der Kantung darstellt, erhält man:

$$tg\, \psi = \frac{s}{u};\; tg\, \eta = \frac{t}{v};\; \lambda = \frac{u}{\cos \psi};\; D = \frac{v}{\cos \eta} \text{ d. g.}$$

$$\lambda \cos \psi = u;\; D \cos \eta = v \text{ und } D \sin \eta = t.$$

Hiermit verwandelt sich die oben gefundene Gleichung

$$P\lambda \cos \psi \geqq CD \sin \eta - WD \cos \eta \text{ in}$$

$$Pu \geqq Ct - Wv.$$

Diese Gleichung stimmte bis auf den Punct der Kantung genau mit der unter (III) Seite 59 überein, giebt aber in ihrer Anwendung nothwendig ganz andere Resultate, als die zuletzt angezogene mit dem bei ihrer Begründung vorausgesetzten Puncte der Kantung.

Stellen wir mit u den horizontalen Abstand des Pfeilerschwerpunctes von der Ecke G, ferner mit v den horizontalen und mit t den vertikalen Abstand des Punctes B von der Ecke G dar, dann geht die zuletzt gefundene Formel über in

$$\text{XII.} \quad P(u-c) \geqq Ct - W(v-c)$$

Hierfür ist aber, wenn $IG = l$, wenn $p = W + P$ die gesammte Belastung, die auf IG kommt, und wenn γ die rückwirkende Festigkeit des Pfeilerkörpers bezeichnet,

$$c = \frac{l}{2}\left\{1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(\frac{l\gamma}{p} - 1\right)}\right\}.$$

Nach der Formel XII ist die Standfähigkeit eines Pfeilers wesentlich von der beanspruchten rückwirkenden Festigkeit desselben in der kantenden horizontalen Fläche abhängig. Soll $c = o$ werden, also die Kantung um die Ecke G erfolgen, dann mufs nach Seite 337 die Last

$$p = W + P$$

ein Viertel der rückwirkenden Festigkeit des Pfeilers betragen. Die Standfähigkeit des Pfeilers nimmt also zu, wenn die rückwirkende Festigkeit wächst, dagegen ab, wenn sich die rückwirkende Festigkeit des Pfeilers verringert. Also nicht die Längenmaafse eines Pfeilers allein, sondern zugleich dessen rückwirkende Festigkeit bedingen seine Standfähigkeit. Hiermit findet auch das Ergebnifs der Praxis seine wissenschaftliche Begründung, dafs Pfeiler von denselben Abmessungen und für dieselben Bögen von einem gewissen Materiale sich als standfähig, von einem andern aber nicht als standfähig gezeigt haben.

Nach XII erhalten wir auch für die Standfähigkeit eines Pfeilers den Ausdruck

$$P_1(u_1 - c_1) \geqq t_1 C_1 - W_1(v_1 - c_1).$$

Ist der Pfeiler und Bogen, auf welchen sich diese Gleichung bezieht, mit demselben Materiale hergestellt, als jener, für welchen die Gleichung XII gilt, und unterscheiden sich die gedachten Bögen und Pfeiler nur dadurch, dafs die Längen und Höhen des zuletzt eingeführten q mal so grofs als die des ersten sind, besitzen aber beide gleiche Tiefe 1, dann geht die letzte Gleichung über in

$$q^3 P\,(u-c) \geqq q^3 tC - q^3 W(v-c),$$

weil

$$P_1 = q^2 P;\; u_1 - c_1 = q\,(u-c);\; t_1 = qt;\; C_1 = q^2 C;\; W_1 = q^2 W;$$
$$(v_1 - c_1) = q\,(v-c)$$

ist. Somit sind Pfeiler und Bögen gleichmäfsig standfähig, wenn ihre Querschnittsflächen parallel den Stirnflächen, im Sinne der Geometrie genommen, ähnlich und wenn sie aus demselben Materiale gleichmäfsig gut hergestellt sind.

Einen Brückenpfeiler wollen wir stabil oder standfähig nennen, wenn seine Standfähigkeit durch den Schub des sich anlehnenden Bogens nicht aufgehoben, seine Standfähigkeit also durch den Bogenschub nicht gefährdet wird.

Soll das Bestehen einer Brücke gesichert sein, dann müssen wenigstens die Enden oder Widerlagspfeiler die hierzu erforderliche Standfähigkeit besitzen; aber auch für die Mittelpfeiler ist eine stabile Beschaffenheit wünschenswerth. Sind die Mittelpfeiler einer Brücke nicht stabil, dann werden mit dem Bruche eines Bogens alle die Bögen und Pfeiler niederbrechen, die sich innerhalb der Widerlagspfeiler befinden. Bei langen Ueberbrückungen, deren Pfeiler man der Materialersparnifs wegen nicht sämmtlich stabil machen will, erscheint es somit räthlich, wenigstens einzelne stabile Pfeiler einzuschalten, damit der Niederbruch eines Bogens nicht den Einsturz des ganzen Viaductes bedinge. Die Standfähigkeit eines Pfeilers vergröfsert sich übrigens an sich und mittelbar mit der Zeit, nämlich mit der eintretenden Bindung der Hinter- und Uebermauerung des Bogens, durch die Bindung des Pfeilermauerwerks, ferner durch lange Trottoirplatten, durch lange Bekrönungsgesimse und durch Geländer. Wegen der Wirkung dieser Ursachen werden Pfeiler sich später als stabil zeigen, die es kurz nach ihrer Herstellung nicht gewesen sein würden.

Die Widerlagspfeiler haben auf der der Brücke zugekehrten Seite den Bogenschub, auf der entgegengesetzten Seite gar häufig den Druck angeschütteter Dämme auszuhalten. Der Bogenschub und der Erddruck sind gegen einander gerichtet, so dafs der wirksame Druck der Differenz jener gleich ist. Im Allgemeinen kann es nicht angerathen werden, auf diese theilweise Aufhebung der Schübe gegen den Widerlagspfeiler dessen nöthige Standfähigkeit zu gründen, weil namentlich der Erddruck sich nicht immer gleich bleibt, vielmehr bei ungewöhnlicher Durchnässung beträchtlich zunimmt, bei grofser Austrocknung dagegen geringer wird. Der Widerlagspfeiler hat überdiefs den Bogenschub zu halten, der aus der Bogenbelastung entspringt. Sicher wird es daher immer sein, die Standfähigkeit eines Widerlagspfeilers für den einseitigen Bogenschub, einschliefslich jenes Schubs, der aus Lasten entspringt, die über die Brücke weggehen, sowie für den einseitigen Bodendruck genügend grofs zu machen.

Die Standfähigkeit einer Brücke, insofern sie von den Widerlagspfeilern abhängt, ist gesichert, wenn sich die letztern gegen festen oder sogenannten gewachsenen Boden anlehnen, noch mehr aber, wenn die Widerlager durch Felsen gebildet werden.

Bei flach gespannten Bögen, also bei solchen, die viel Horizontalschub geben, brechen wohl auch zunächst die Endbögen einer Brücke in Folge einer Verschiebung der in der Nähe des Bogenkämpfers liegenden Pfeilerschichten nieder. Der Bogenstand ist hier, wie wir bereits auf Seite 58 bemerkten, durch eine horizontal fortlaufende Mauerung gesichert, deren Reibung oder deren Bindung gröfser als der Bogenschub ist.

Die Erörterungen des gegenwärtigen Abschnittes lassen sich kürzlich in folgende Sätze zusammenfassen:

1) Die Querschnittsflächen eines Pfeilers müssen vom Kämpfer nach dem Fufse hin der überstehenden Last entsprechen, wenn eine durchaus gleichmäfsige Beanspruchung der rückwirkenden Festigkeit stattfinden soll. Diese Zunahme der Pfeilerquerschnittsflächen kann genähert durch Aufführung des Pfeilers in Absätzen, sicherer und zugleich mit der gröfsten Materialersparnifs aber dadurch erreicht werden, dafs man die Gröfse beliebig vieler Querschnitte mittels der Formel III

Seite 320 bestimmt und diesen entsprechend den Pfeileranlauf stetig anordnet. — Eine reine pyramidale Form der Pfeiler kann keine gleichmäfsige Belastung der Pfeilerquerschnittsflächen bedingen. — Bei Pfeilern von geringer Höhe und aus genügend tragfähigem Material kann man von einer Zunahme der Pfeilerquerschnittsflächen absehen.

2) Die Steifigkeit eines Pfeilers hängt sehr wesentlich von der beanspruchten Tragfähigkeit der verschiedenen Pfeilerquerschnittsflächen ab. Je gröfser die rückwirkende Festigkeit aller Pfeilerquerschnitte ist und ein je geringerer Theil derselben von der Last aufgezehrt wird, die darüber steht, desto steifer ist der Pfeiler. Es hängt die Steifigkeit eines Pfeilers inniger von der überschüssigen rückwirkenden Festigkeit der Querschnittsflächen desselben ab, als man zu glauben scheint; jene wird stets *o*, wenn die letztere *o* ist. Tragen die verschiedenen Pfeilerquerschnitte die überstehenden Lasten mit Sicherheit, dann besitzt auch in der Regel der Pfeiler die genügende Steifigkeit.

3) Ein Pfeiler kann nur Steifigkeit zeigen, wenn sich zwei Bögen gegen denselben lehnen. Er bedarf aber auch der Steifigkeit in diesem Falle, um nicht durch Ausbiegung niederzubrechen, wenn der Schub der sich zugekehrten Bögen gegen den Pfeiler ungleich ist. Eine Ungleichheit des Bogenschubs tritt bei gleichgeformten Bögen in nur geringem Grade, bei Bögen von ungleicher Spannweite oder verschiedener Stichhöhe in höherem Maafse, die Ungleichheit des Bogenschubs tritt aber auch durch Lasten ein, die über die Brücke wegschreiten.

4) Die Standfähigkeit der Pfeiler gegen einseitigen Bogenschub hängt wesentlich von der rückwirkenden Festigkeit der Querschnittsfläche, für welche die Standfähigkeit bestimmt werden soll und noch von der Belastung ab, die auf eben diese Fläche kommt; sie wird um so gröfser, ein je geringerer Theil der rückwirkenden Festigkeit durch die Belastung verbraucht wird, welche auf die Fläche fällt, für die die Standfähigkeit zu ermitteln ist.

5) Die Standfähigkeit ausgeführter Brückenpfeiler gegen ein-

seitigen Bogenschub wird mit der Zeit in geringerem Grade beansprucht, sie wird aber auch an sich gröfser und zwar

a) durch die Bindung des Mörtels in der Hinter- und Uebermauerung des Bogens, der den einseitigen Schub giebt;
b) durch Geländer, die den Bogen überspannen;
c) durch den Zusammenhang der Trottoirplatten und Bekrönungsgesimse und
d) durch die Bindung des Mörtels im Pfeiler selbst.

Zwei und zwanzigster Abschnitt.

Ueber den Aufwand an Material bei verschieden weit gespannten Brückenbögen.

Für den ausführenden Ingenieur ist die Beantwortung der Frage: Mit welcher Spannweite oder mit welchem Verhältnifs der Spannweite zur Stichhöhe der Bögen wird der gesammte Materialaufwand für eine Brücke am kleinsten? nicht ohne Wichtigkeit. Die Antwort auf diese Frage zerspaltet sich in mehre Theile. Erst müssen wir gewisse Vorerörterungen durchführen, bevor wir eine die gestellte Frage erschöpfende Gesammtantwort zu geben vermögen.

Eine gewisse Spannweite *AB* Figur 105 können wir mit gothischen Spitzbögen *AC* und *BC* (abgesehen von ihrer Tauglichkeit für Brückenbögen), mit einem Halbkreis *DCE*, mit einem Kreisstichbogen *FCG* u. s. w. überspannen. Von allen Formen der die Weite *AB* überspannenden Bögen wird jener den geringsten Materialaufwand bedingen, welcher sich der durch den Scheitel *C* gezogenen horizontalen Linie bis zu einer gewissen Grenze hin am meisten nähert. Mit der Ersparnifs an Material für die Ueberspannungsweite *AB* erwächst zugleich eine minder grofse Belastung der Pfeiler, folglich auch eine Ersparnifs am Material für deren Herstellung, von welcher wir jedoch vorerst absehen wollen.

Der Radius R der innern kreisstichbogenförmigen Wölblinie FG des Stützbogens, mit dem die Weite AB überspannt werden kann, hängt von der rückwirkenden Festigkeit des Wölbmaterials ab. Für eine gesammte Scheitelhöhe RH ist der Scheiteldruck, den ein kreisbogenförmiger Stützbogen giebt, bekanntlich

$$C = NR^2 w,$$

wenn N eine mit von H abhängige Zahl bedeutet. Nehmen wir die Höhe des Materials über dem Scheitel des Stützbogens, nämlich Uebermauerung und Bekiefsung, das nicht mit stützt, sondern nur getragen sein will, zu b an und bezeichnen die zu beanspruchende Festigkeit des Wölbmaterials für die Flächeneinheit mit $m\gamma$, dann besteht

$$NR^2 w = 1\,(RH - b)\, m\gamma.$$

Hieraus folgt

$$R = \tfrac{1}{2}\,\frac{Hm\gamma}{Nw} + \sqrt{\left\{\tfrac{1}{4}\,\frac{H^2 m\gamma}{Nw} - b\right\}\frac{m\gamma}{Nw}}.$$

Die halbe Masse des Stützbogens für die Tiefe 1 ist

$$W = R^2 \left\{(1+h)\sin\psi - \tfrac{1}{2}\sin\psi\cos\psi - \tfrac{1}{2}\psi\right\}$$

und ferner, wenn der Radius des die Weite DE überspannenden Halbkreises r gesetzt wird,

$$\sin\psi = \frac{r}{R}.$$

Für den halbkreisförmigen Bogen besteht ebenfalls, wenn für diesen n und h dieselbe Bedeutung haben, die wir den Buchstaben N und H für den Stichbogen beilegten,

$$nr^2 w = 1\,(rh - b)\, m\gamma$$

und hieraus folgt

$$rh - b = \frac{nr^2 w}{m\gamma},$$

$$rh = \frac{nr^2 w}{m\gamma} + b.$$

Die halbe dem halbkreisförmigen Bogen zugehörende Masse ist

$$W_1 = (r + rh)\, r - \frac{r^2 \pi}{4} = r^2\left(1 + h - \frac{\pi}{4}\right).$$

Ob und welche Massenersparnifs mit dem stichbogenförmigen Stützbogen erzielt wird, das giebt die Differenz

$$W_1 - W$$

an.

Bisher war es nicht üblich, die Höhe der Stützbögen in ihrem Scheitel dem Drucke proportional zu bestimmen, den sie daselbst zu tragen haben. Die übliche Ableitungsweise der Scheitelhöhen von Stützbögen giebt diese für kleinere Radien verhältnifsmäfsig gröfser an als für gröfsere, wefshalb denn auch die Ersparnifs minder erheblich erschien, die man mit der Ueberspannung einer gewissen Weite durch einen flachen oder Kreisstichbogen, statt mit einem halbkreisförmigen, erhielt. Die Ersparnifs, die ein kreisstichbogenförmiger Stützbogen, im Vergleich mit einem halbkreisförmigen, bei der Ueberspannung einer gewissen Weite, gewährt, wird noch beachtenswerther, wenn man erwägt, dafs der Wölbbogen des erstern viel kürzer und die Fläche seiner Stirnmauern viel geringer als bei dem halbkreisbogenförmigen Stützbogen ausfällt, und dafs ferner ein flacher Kreisstichbogen kaum einer Hintermauerung mit regelmäfsigem Material bedarf, die bei dem halbkreisbogenförmigen Stützbogen wenigstens durch die Stirnmauern geboten werden mufs.

Wenn auch die Ersparnifs beachtenswerth ist, die ein kreisstichbogenförmiger Stützbogen als Stellvertreter eines halbkreisbogenförmigen giebt, so wird doch häufig der viel gröfsere Horizontalschub, den der Kreisstichbogen bedingt, Veranlassung werden, dafs man von der mit ihm erzielten Materialersparnifs ganz absieht, oder dafs man überhaupt nicht so flach spannt, als es die rückwirkende Festigkeit des Materials zuläfst.

Für gegebene Ueberbrückungsbögen gewährt die lichte Spannweite der Bögen selbst den erheblichsten Einflufs auf den Materialaufwand, was sich für gleichmäfsig gestaltete Bögen sehr leicht nachweisen läfst. Gesetzt, in Fig. 107 sei die lichte Weite AC mit einem halbkreisförmigen Bogen überspannt, die für diesen Bogen erforderliche Scheitelhöhe sei BB_1 und die eben demselben nöthige Pfeilerlänge $AD = CE$. Statt des Bogens ABC können wir auch zwei halbkreisförmige FGH und IKL einführen, von welchen jeder halb so weit spannt als jener, und können die ganze Pfeilerlänge

dergestalt vertheilen, dafs wir aus der Hälfte von *AD* und *CE* die Länge des Mittelpfeilers bilden. Um die hierbei sich herausstellende Materialersparnifs zu bestimmen, setzen wir die ganze horizontale Länge $DE = L$, die Höhe $DM = H$ und den Radius der lichten Spannweite des gröfsern Bogens gleich R. Hiermit beträgt die über *DE* stehende Masse für die Tiefe 1

$$M = L \,.\, H - \frac{R^2 \pi}{4} = L \,.\, H - 1{,}5708\, R^2.$$

Mit den zwei kleinern Bögen ergiebt sich die über *DE* stehende Masse für die Tiefe 1 zu

$$m = L.H - \left\{ 2r \,.\, r + \frac{r^2\pi}{2} \right\} = L.H - 4r^2 - r^2\pi \text{ d. g.}$$

wegen $r = \frac{1}{2} R$,

$$m = L \,.\, H - 1{,}7854\, R^2.$$

Offenbar ist m kleiner als M, obschon für die kleinern Bögen die Scheitelhöhe des gröfsern beibehalten wurde. Es mufs sich somit m noch kleiner als M ergeben, wenn die Scheitelhöhe der kleinern Bögen angemessen kleiner als die des gröfsern genommen wird. Ein vermehrter Aufwand für die Pfeiler kann, wenn man kleinere Bögen für gröfsere einführt und dabei nur auf deren rückwirkende Festigkeit sieht, auch nicht erforderlich werden, weil die Pfeiler der kleinern Bögen verhältnifsmäfsig nicht mehr, sondern weniger zu tragen bekommen als die gröfsern Pfeiler. Noch gröfser als wie oben nachgewiesen, wird sich ferner die Ersparnifs für die Ueberbrückungslänge *DE* Fig. 107 gestalten, wenn wir die lichte Spannweite *AC* mit drei, vier etc. halbkreisförmigen Bögen überspannen. Hieraus müssen wir denn folgern, dafs eine gewisse Ueberbrückungslänge um so weniger Materialaufwand erheischt, je weniger grofs die lichte Spannweite der Bögen gewählt wird. Dieser Satz kann indefs nur bis zu einer gewissen Spannweite herab bei einer gegebenen Ueberbrückungshöhe wahr sein. Hätte derselbe allgemeine Geltung, dann würde eine unendlich kleine Spannweite für jede Ueberbrückungshöhe den geringsten Materialaufwand bedingen. Mit unendlich kleinen Spannweiten stehen auch Pfeiler von unendlich geringer Länge in Verbindung, deren Steifigkeit o

sein wird. Weil aber jeder Brückenpfeiler eine gewisse Steifigkeit besitzen mufs, und diese, aufser von der beanspruchten Festigkeit des Pfeilermaterials, ganz besonders vom Verhältnisse der Pfeilerlänge zur Pfeilerhöhe abhängig erscheint, so wird die kleinste zulässige Spannweite bei gegebenen Ueberbrückungshöhen mit von der Höhe der Ueberbrückung selbst bedingt werden; es wird nämlich eine gröfsere Ueberbrückungshöhe gröfsere Spannweiten erfordern, um die gröfste Materialersparnifs zu bedingen, als eine kleinere. Erwägen wir ferner, dafs Brückenbögen eine nahe gleich hohe Ueberschüttung im Scheitel besitzen und dafs die mit der Spannweite sich ändernde Höhe eines Stützbogens eben daselbst einen nur geringen Einflufs auf Materialaufwand haben kann, so erkennen wir: dafs die Spannweite, die den geringsten Materialaufwand bedingt, mit Hinsicht auf die Pfeilersteifigkeit als wesentlich von der Ueberbrückungshöhe abhängig angesehen werden kann und dafs eben dieselbe für eine Pfeilerlänge in der Kämpferhöhe zu bemessen ist, für welche der Pfeiler noch die genügende Steifigkeit erhält.

Die Pfeilersteifigkeit ist, wie wir im vorgehenden Abschnitte gesehen haben, von der beanspruchten rückwirkenden Festigkeit des Pfeilermauerwerks, aber auch von dem Verhältnisse der Pfeilerlänge zu seiner Höhe abhängig. Die rückwirkende Festigkeit, die ein Pfeilerkörper überhaupt erlangt, entspringt nicht allein aus der rückwirkenden Festigkeit des zu seiner Herstellung verwendeten Materials, sondern hauptsächlich aus der Art seiner Verbindung oder Lagerung oder, mit demselben Materiale lassen sich, bei gleichen Dimensionen, Pfeiler von sehr ungleicher rückwirkender Festigkeit, also auch von sehr ungleicher Steifigkeit herstellen. Sowohl die rückwirkende Festigkeit, als auch die Steifigkeit erreicht für ein gewisses Baumaterial den höchsten Grad, wenn die zwischen den Lagerflächen befindlichen Mörtelschichten so dünn sind, als es deren Bestimmung, nämlich die gleichmäfsige Berührung der Steine zu vermitteln, gestattet, und überdiefs ganz besonders dann, wenn die Aufführung des Pfeilers dergestalt schichtenweise erfolgt, dafs die Steine einer Schicht immer von durchaus gleicher Höhe sind, also auch unter und über den Steinen einer jeden Schicht sich eine durchaus gleich hohe Mörtellage über die

ganze Pfeilerquerschnittsfläche erstreckt. Weil die Last nahe dieselbe ist, die der nämliche Pfeilerquerschnitt zu tragen bekommt, der Pfeiler mag in vorbemerkter Weise oder minder sorgfältig ausgeführt sein, so wird auch der vom Pfeilergewichte beanspruchte Theil der rückwirkenden Festigkeit der Querschnittsflächen eines Pfeilers, mithin auch dessen Steifigkeit bis zu einer gewissen Grenze hin nur von der practischen Ausführung oder der Mauerung desselben abhängig sein.

Aus den vorstehenden Bemerkungen erhellt nun, dafs mit Zuverlässigkeit das Verhältnifs durch Rechnnng nicht festgestellt werden kann, das zwischen der Höhe eines Pfeilers und seiner Länge in der Kämpferhöhe bestehen mufs, damit der Pfeiler selbst für eine gewisse aufliegende Bogenbelastung eine genügende Steifigkeit erhält. Diese Bestimmung wird durch Rechnung nur dann möglich sein, wenn man den Grad der beanspruchten rückwirkenden Festigkeit des Pfeilermauerwerkes genau kennt.

Sehr gewöhnlich beurtheilt man die Steifigkeit eines Pfeilers allein nach dem Verhältnisse, das zwischen seiner Länge in der Kämpferhöhe und seiner Gesammthöhe besteht. Dafs dieser Maafsstab im Allgemeinen kein richtiger ist, sondern nur bei gleichmäfsig guter Mauerung, bei demselben Materiale und bei verhältnissmäfsiger Belastung Geltung haben kann, wird durch den vorgehenden Abschnitt, aber auch durch die Erfahrung zur Genüge dargethan. An dem alten Aquaducte oder der Brücken-Wasserleitung von Spoleto finden sich einige Pfeiler, die mindestens die zwanzigfache Pfeilerlänge zur Höhe haben. An der Canalbrücke von Cycylte, die den Canal von Ellesmere in England über ein tiefes Thal wegführt, ist die Pfeilerlänge in der Kämpferhöhe nahe der achtzehnte Theil der Pfeilerhöhe. Aehnliche Verhältnisse finden sich bei den Pfeilern einiger Kettenbrücken, namentlich in Frankreich, über welche die Tragketten der Brückenbahn weggehen. Bei den eben genannten Bauwerken zeigt sich die Steifigkeit der Pfeiler als völlig genügend. Gleichsam im Widerspruch mit diesen Thatsachen stehen neuere Erfahrungen, namentlich bei dem Eisenbahnbrückenbau. Hier ist es öfterer vorgekommen, dafs Brückenbögen schon während der Ausführung wegen mangelnder Pfeilersteifigkeit niederbrachen, obschon die Pfeilerlänge mehr als ein Zehntel der Pfeilerhöhe betrug. Da,

wo derartige Einstürze nicht durch den Bogenschub, sondern allein wegen mangelnder Pfeilersteifigkeit vorkommen, war diese durch schlechte Mauerung an sich oder dadurch bedingt, dafs man die Aufsenflächen der Pfeiler mit höhern, den Kern aber mit minder hohen Steinen oder überhaupt so hergestellt hatte, dafs die Lagerflächen der Steine nicht zusammenhängende Flächen bildeten, sich vielmehr in einigen Vertikalen mehr, in andern aber weniger Mörtelfugen vorfanden.

Die Steifigkeit, die ein Pfeiler in Folge seiner Belastung, seiner Mauerung und seiner Dimensionen gewähren kann, besteht in der Wirklichkeit nur dann, wenn sich derselbe gegen einen Grund stützt, der gar nicht oder doch wenigstens nicht ungleichmäfsig nachgiebt oder einsinkt. Für einen Pfeilergrund, der gar nicht nachgiebt, z. B. dann, wenn sich der Pfeiler auf einen Felsen aufsetzt, erscheint dessen Steifigkeit als ein Gröfstes der Pfeilerdimensionen, der Mauerung, des Baumaterials und der Belastung. Diese Steifigkeit des Pfeilers wird aber sehr gemindert, wenn derselbe im Grunde eine ungleichmäfsige Stützung findet, etwa wenn der Grund auf der einen Seite drückbarer als auf der gegenüber liegenden ist. Hierbei nämlich kommt die Linie der mittlern Stützung der einen Pfeilerseite näher zu liegen, als der andern, was gleichsam die Länge des Pfeilers vermindert, und es wird überdiefs die Pfeilerqnerschnittsfläche ungleichmäfsig belastet.

Gemäfs der letzten Bemerkung mufs das zulässige Verhältnifs zwischen der Länge eines Pfeilers in der Kämpferhöhe und der lothrechten Höhe von hier bis zur Gründung aufser von der Festigkeit des Baumaterials, von der Art seiner Vermauerung, von der überstehenden Belastung, die der Pfeiler zu tragen hat, etc., noch ganz besonders von der Beschaffenheit des Grundes abhängen. Bei genügend festem Baumaterial, bei guter Mauerung und bei einem Grunde, der eine ungleichmäfsige Setzung nicht gestattet, etwa dann, wenn die Pfeilergrundfläche auf Felsen zu stehen kommt, wird es noch möglich sein, die Pfeilerlänge in der Kämpferhöhe zu $1/_{20}$ der Ueberbrückungshöhe zu nehmen. Je unzuverlässiger der Grund ist, je weniger sorgfältig die Mauerung des Pfeilers geführt werden soll, je unebener die Lagerflächen der Bausteine sind, desto gröfser mufs die Pfeilerlänge, im Vergleich zur Ueberbrückungs-

höhe, genommen werden. Bei schlechter Beschaffenheit des Grundes kann es dahin kommen, dafs sich eine Pfeilerlänge in der Kämpferhöhe von $^1/_{10}$ der Ueberbrückungshöhe als noch viel zu klein herausstellt.

Bei mangelhafter Beschaffenheit des Grundes wird die den Pfeilern nöthige Steifigkeit nicht am angemessensten durch eine massenhafte Gestaltung derselben, sondern ungleich zuverlässiger durch Erweiterung der Fufsflächen erreicht. Mit dieser Anordnung vertheilt sich die Pfeilerlast auf eine gröfsere Fläche des Grundes, was unter Umständen die ungleichförmige Setzung des Grundes ganz verhindert; man vermindert aber auch damit die Last des Pfeilers selbst, was ferner weit günstiger auf die Tragfähigkeit des Grundes zurückwirkt.

Mit der Feststellung der Pfeilerlänge für eine gegebene Ueberbrückungshöhe ist auch deren Spannweite bestimmt, wenn man sich die Form der innern Wölblinie als gegeben denkt; denn die Belastung jedes Pfeilers in der Kämpferhöhe durch die überstehende Bogenmasse darf nicht gröfser sein, als es die zu beanspruchende Festigkeit des Pfeilers selbst gestattet: folglich wird die Spannweite, die eben diese Belastung hervorbringt, die zulässige Spannweite selbst für die gewählte Form der innern Wölblinie geben, die zugleich die gröfste Materialersparnifs bedingt. Je flacher die Stützbögen einer Ueberbrückung gewählt werden, um so entfernter kommen die Pfeiler zu stehen und um so erheblicher wird sich die Ersparnifs an Material und Arbeit gestalten, weil flache Tragbögen erst bei weitern Spannungen die zulässige Pfeilerbelastung geben, die mit weniger flachen schon bei einer geringern Spannweite erreicht wird. Hierbei ist jedoch der Nachtheil nicht unbeachtet zu lassen, den flachere Stützbögen mit ihrem gröfsern Horizontalschub hervorbringen können. So lange alle Bögen geschlossen und die Endwiderlager dem Schub genügend zu widerstehen vermögen, wirkt zwar der letztere nur auf die Festigkeit der Wölbsteine der Stützbögen ein. Doch mit dem irgendwie herbeigeführten Bruch eines Bogens kommt der Bogenschub als einseitiger Schub auf die Pfeiler zwischen welchen sich der gebrochene Bogen befand und nimmt die Standfähigkeit oder Stabilität eben dieser Pfeiler in Anspruch. Ist der einseitige Schub gegen die Pfeiler, zwischen wel-

chen sich kein Bogen mehr befindet, gröfser als deren Stabilität, dann brechen diese und mit denselben auch die angrenzenden Bögen nieder u. s. f.

Ereignisse der letztgenannten Art werden umgangen, wenn man durch Erhebung der innern Wölblinie den Horizontalschub des Stützbogens so vermindert, dafs dessen einseitige Wirkung gegen einen Pfeiler die eben demselben zugehörende Standfähigkeit nicht erschöpft. Statt dieser Anordnung pflegt man auch die Bogenreihe, welche die Ueberbrückung bildet, durch eingeschaltete stabile Pfeiler in Gruppen von zwei, drei oder mehrern Bögen einzutheilen. Bei dieser Anordnung wird die irgendwie herbeigeführte Zerstörung eines Bogens immer nur das Bestehen jener Bögen und Pfeiler gefährden, die der nämlichen Gruppe angehören, in welcher der gebrochene Bogen liegt. Die zahlreichen Bögen einer Ueberbrückung durch stabile, überhaupt massenhaftere Pfeiler in Gruppen zu theilen, bedingt in der Regel ein gefälliges architectonisches Bild. Sieht man jedoch hiervon ab und hat nur die Erreichung des geringsten Kostenaufwandes, in Verbindung mit einer genügenden Standfähigkeit der Pfeiler für den einseitigen Bogenschub bei der Herstellung im Auge, dann wird sehr gewöhnlich die Verbindung der Pfeiler nur mit solchen Bögen als zulässig erkannt werden, die überhoben sind oder deren innere Wölblinie einen Bogen bildet, dessen lichte Stichhöhe mehr als die Hälfte der lichten Spannweite beträgt.

Könnte man von zufälligen Einwirkungen, welchen die Pfeiler von Ueberbrückungen ausgesetzt sind, ganz absehen, wäre denselben nicht ein bestimmtes Maafs von überschüssiger Steifigkeit für eben diese zu verleihen, dann würden sich die Pfeiler und Bögen für eine gewisse Form der innern Wölblinie, hinsichtlich ihrer Dimensionen, sehr nahe wie die Ueberbrückungshöhen verhalten, d. h. die doppelte, die dreifache etc. Ueberbrückungshöhe würde mit zweifach, dreifach etc. so weit spannenden Bögen, mit doppelt und dreimal so langen Pfeilern herzustellen sein, um die geringste Materialersparnifs zu bewirken. Das constante Maafs von Pfeilersteifigkeit für zufällige Einwirkungen macht, dafs die doppelte Ueberbrückungshöhe nicht ganz mit doppelt so weit spannenden Bögen und nicht mit doppelt so langen Pfeilern, dagegen, dafs die halbe Ueberbrückungshöhe mit mehr als halb so langen Pfeilern versehen

werden mufs, um mit dem geringsten Materialaufwande den gleichen Ueberschufs von Pfeilersteifigkeit zu erhalten, den die Pfeiler jener Ueberbrückung besitzen, die wir uns als zur Vergleichung gegeben dachten. Die angeführten Beziehungen gelten übrigens nur dann, wenn dasselbe Material bei gleichmäfsiger Vermauerung und bei gleichmäfsiger Beanspruchung seiner rückwirkenden Festigkeit zur Verwendung gelangt.

Was wir bisher über Pfeilerhöhen, Pfeilerlängen und Spannweiten angeführt haben, hat wohl seine Richtigkeit; indefs wird man oft durch die Lage und anderweite Bestimmungen einer Ueberbrückung genöthigt, mehr oder weniger von diesen Gesetzen abzuweichen. Hat man z. B. bei der Gründung der Pfeiler mit Wasserhaltung zu thun und erfordert diese die Herstellung von Fangedämmen, dann wird es gar nicht selten billiger werden, stärkere Pfeiler und weitere Spannungen zu wählen, als sie in Folge der Ueberbrückungshöhe erforderlich sind. Dasselbe tritt auch dann ein, wenn die Ueberbrückung einen Strom übersetzt, dessen Querschnittsfläche durch die Brückenpfeiler die geringste Verengerung erfahren und welche möglichst grofse Durchgangsöffnungen für Eis, für Flöfse und für Schiffe gewähren soll. Stärkere Pfeiler, als sie eine Ueberbrückung für ihre nächste Bestimmung erheischt, werden oft noch nothwendig, wenn die Pfeiler zufälligen äufsern Einwirkungen von Erheblichkeit ausgesetzt sind, z. B. dann, wenn deren Aufsenseiten abgestofsen oder leicht durch den Einflufs der Witterung geschwächt werden können, ferner wenn sie Erddruck erleiden, wenn sie in Folge ihrer Lage, etwa in engen Thälern, zeitweise dem Druck lebhafter Wasserströmungen ausgesetzt sind u. s. w.

Drei und zwanzigster Abschnitt.

Bestimmung, Gesetze der Stützung und practische Regeln für die Construction steinerner Bogenbrücken.

1) Allgemeine Bestimmung einer Brücke.

Eine Brücke soll für ihr eigenes Gewicht und für die gröfste Last, die auf einmal dieselbe überschreiten kann,

völlig genügende Festigkeit besitzen, sie soll fähig sein, der Einwirkung der Witterung und sonstigen Elementarereignissen möglichst lange widerstehen zu können, auch soll die Zerstörung eines Theiles derselben nicht den Einsturz des übrigen Brückenkörpers nach sich ziehen.

Die Stützungsfähigkeit einer Brücke für das Gewicht ihrer Masse und für überschreitende Lasten hängt von ihren Dimensionen, von der Form ihrer Stützbögen und Pfeiler, von der rückwirkenden Festigkeit des verarbeiteten Steinwerkes, von der Schliefsung der Bögen, von der Widerstandsfähigkeit des Grundes, auf welchem die Pfeiler stehen, und der Widerstandsfähigkeit der Widerlager für den Bogenschub ab.

Die Beständigkeit eines Brückenkörpers gegen den Einflufs der Witterung, namentlich gegen Hitze und Frost, gegen Trockenheit und Nässe wird hauptsächlich durch die Beschaffenheit der Bausteine, aber auch durch die Bedeckung des Brückenkörpers bedingt. Steine, die, mit Wasser gesättigt, zerfrieren, wieder andere, die durch den Einflufs von Wasser und feuchter Luft verwittern, und ferner Ziegelsteine, die Salze ausblühen lassen und sich dabei schaalenförmig ablösen, müssen als untaugliches Material zur Herstellung der tragenden oder stützenden Theile von Brücken, also zur Herstellung der Pfeiler, der Stützbögen und der Stirnseiten bezeichnet werden.

Durchnässungen eines Brückenkörpers können dessen Bestehen in mehrfacher Weise mehr und weniger gefährden. So wird das durch einen Brückenpfeiler sickernde Wasser alle jene Körper lösen und fortführen, die der zur Verwendung gelangte Mörtel als Verunreinigungen gar nicht selten enthält, wenn diese im reinen oder im Kohlensäure haltigen Wasser löslich sind. Ferner wird die zeitweilige Durchnässung eines Brückenkörpers die Verwitterungsfähigkeit der verwendeten Bausteine fördern. Nicht minder zerstörend kann die Durchnässung eines Brückenbogens auf dessen Halt einwirken, wenn sich das Wasser durch Frost in Eis verwandelt. Ist auch der Baustein an sich durch den Frost nicht zerstörbar, so wird doch der daraus gebildete Mauerkörper durch das zwischen den Steinen sich bildende Eis verschoben und zerrissen werden. Die Entwässerung eines Brückenkörpers, d. s. Vorkehrungen, welche

das auf die Brückenbahn niederfallende Wasser rasch abführen uud eine erhebliche Durchnässung verhindern, ist somit von grofser Wichtigkeit für dessen Erhaltung.

Zu Elementarereignissen, denen eine Brücke zu widerstehen fähig sein mufs, rechnen wir vornehmlich heftige Stürme und ferner bei Flufs- und Strombrücken aufsergewöhnliche Wasserfluthen, welche die Brücke zu Zeiten durchströmen. Orkane oder Stürme, wie heftig sie auch sein mögen, werden nur sehr selten und dann immer nur aufsergewöhnlich hohe Brücken von geringer Tiefe umwerfen, wohl aber können grofse Wasserfluthen, die durch eine Brücke hindurch strömen, deren Bestehen gefährden. Sie kann von dem durchströmenden Wasser umgeworfen werden, wenn die Bögen nicht Raum genug für dessen Durchflufs bieten, wenn es sich defshalb vor der Brücke beträchtlich anstaut oder sie gar übersteigt und wenn hierbei der Wasserspiegel hinter der Brücke beträchtlich tiefer liegt als vor derselben. Ein eigentliches Umwerfen einer Brücke durch das anströmende Wasser gehört zu den grofsen Seltenheiten, meist zerstören Hochwässer eine Brücke mittelbar dadurch, dafs sie den Grund der Pfeiler schadhaft machen, oder denselben unterwaschen.

Der oben aufgestellten Anforderung: eine Brücke so zu construiren, dafs die Zerstörung eines Theiles derselben, z. E. eines Brückenbogens, nicht den Einsturz des ganzen Brückenkörpers innerhalb der Widerlager herbeiführe, ist bei Thalbrücken stets, bei Strombrücken aber nicht immer zu genügen. Die Selbstständigkeit jedes Bogens einer Strombrücke wird dann nicht mit Zuverlässigkeit im Allgemeinen herzustellen sein, wenn die zulässige Höhe der Ueberbrückung den höchsten Wasserstand nicht beträchtlich überragt und wenn es eine zu erfüllende Bedingung ist, durch den Einbau der Brücke, selbst bei der gröfsten Fluthhöhe des Wassers, den Strom nur wenig anzustauen.

2) Allgemeines über die Beschaffenheit und Lage der Strom- und Thalbrücken.

Eine Flufs- oder Strombrücke soll für alle Wasserstände des Stromes, die möglicherweise eintreten können, eine Durchgangsöffnung oder einen sogenannten Fluthraum bieten, der einen nur geringen Anstau des Wassers vor der Brücke

bedingt, d. h. eine Strombrücke soll möglichst weit gespannt und mit möglichst schwachen Pfeilern versehen sein, nicht in einer Stromenge liegen, die gröfste Fluthhöhe überragen und endlich eine Richtung haben, die winkelrecht gegen den Stromlauf steht; dagegen wird es rathsam sein, ein gegebenes Thal an der engsten Stelle zu überbrücken und nur Spannweiten zu nehmen, die der geringste Materialaufwand oder die Widerlagsverhältnisse bedingen, ohne damit dem zeitweilen im Thale niederfliefsenden Wasser ein erhebliches Hindernifs zu bieten.

Das Vorbemerkte über die Beschaffenheit und die Lage von Strom- und Thalbrücken ist leicht näher zu begründen, sowie für besondere Fälle in engere Grenzen einzuschliefsen. Eine Strombrücke wird immer die natürliche Querschnittsfläche des Flufses an der Ueberbrückungsstelle verengen und somit einen Anstau des Wassers vor der Brücke bedingen, der jedoch geringer ist, als man denselben gewöhnlich anzugeben pflegt. Mit der Zunahme der Stauhöhe vermehrt sich der Druck des Wassers gegen die Brückenpfeiler, ferner die Geschwindigkeit, mit der das Wasser zwischen den letztern hindurchströmt, und endlich das Ueberschwemmungsprofil vor der Brücke.

Von den angeführten Uebelständen, die aus dem Anstau des Wassers vor einer Brücke entspringen, fürchtet man die Zunahme der Ueberschwemmung für jene Fluren und Ortschaften am meisten, die oberhalb der Brücke liegen. — Der Anstau des Wassers vor einer Brücke kann durch diese unmittelbar, aber auch mittelbar veranlafst werden. Eine Brücke bedingt unmittelbar einen Anstau, wenn ihre Durchgangsöffnung beträchtlich kleiner als das kleinste natürliche Fluthprofil des Stromes in der Nähe der Ueberbrückung ist: ferner kann sie mittelbar einen Anstau des Wassers hervorbringen, wenn ihre Bögen eine so geringe Spannweite haben, dafs sich Körper, die Hochfluthen bringen, wie Eis, Stammholz etc., vor derselben festsetzen oder einen Schutz bilden. Schmale Strompfeiler und grofse Spannweiten der Bögen sind das beste Mittel, den unmittelbaren und mittelbaren Stau einer Brücke herabzuziehen. Wie weit man aber hierbei gehen kann und mufs, das läfst sich im Allgemeinen nicht bestimmen. Die zuläfsige Spannweite der Bögen hängt, bei einer vorgeschriebenen Stichhöhe derselben, vom Wölbmateriale,

und ebenso die Länge der Pfeiler winkelrecht gegen die Richtung des Stromes von der Festigkeit der Steine und von der Pfeilerhöhe ab. — Einigen Einflufs auf die Stauhöhe übt auch die Form der Vor- und Hinterköpfe der Pfeiler. Je ruhiger die Vorköpfe das Wasser theilen und mit je geringerer Wirbelbewegung es an den Hinterköpfen wieder zusammenfliefst, um so geringer wird die von der Gestalt der Vor- und Hinterköpfe herrührende Stauhöhe sein. — Legt man eine Brücke unterhalb einer natürlichen Stromenge an und giebt ihr eine der letztern gleiche Durchgangsöffnung, dann wird die vor der Brücke entstehende Anstauung eine nur geringe Vermehrung der Stauhöhe der vorliegenden Stromenge bedingen. Noch geringer mufs sich die wahrnehmbare Anstauung gestalten, wenn man die Brücke zwischen zwei natürliche Strömungen legen und ihre Durchgangsöffnung wenigstens dem kleinsten Fluthprofile gleich machen kann, das in ihrer nächsten Nähe besteht.

Das Fluthprofil eines nicht zwischen lothrechten Felswänden oder Futtermauern liegenden, sondern mit mehr oder weniger flachen Ufern versehenen Flusses wächst rascher, als die Stromhöhe, d. h. die doppelte Fluthhöhe findet ein mehr als doppelt so grofses Fluthprofil innerhalb der natürlichen Ufer. Ein gleiches Bewandnifs hat es mit der Durchgangsöffnung einer Brücke nur dann, wenn sie sich über das ganze Ueberschwemmungsprofil erstreckt. Nimmt die Brücke eine geringere Länge, als das Ueberschwemmungsprofil ein, dann findet, wenn der Wasserspiegel die Brückenlänge überschritten hat, die von hieraus statthabende doppelte, dreifache Fluthhöhe nur die doppelte, dreifache Durchgangsöffnung durch die Brücke, ja, wenn die Fluthhöhe die Bogenanfänge übersteigt, wird die doppelte Fluthhöhe noch weniger als die doppelte Durchgangsöffnung durch die Brücke haben. Eine erhebliche Zunahme der Stauhöhe mit der Fluthhöhe wird demnach verhindert, wenn die Brücke das gröfste natürliche Fluthprofil an der Ueberbrückungsstelle überspannt und wenn die Bogenanfänge wo möglich noch über dem höchsten Wasserspiegel liegen. Für etwas steile Ufer kann der eben ausgesprochene Satz: die Brückenlänge der Länge des gröfsten Ueberschwemmungsprofils gleich zu machen und die Bogenanfänge wo möglich über den höchsten Wasserstand zu legen, als eine Bedingung angesehen werden, die man zu erfüllen streben mufs. Anders verhält es sich bei

sehr flachen Ufern, deren Ueberschwemmungsprofil, nämlich winkelrecht gegen den Strom genommen, oft ungewöhnlich lang ist. Stehen nur geringe Fluthhöhen mit beträchtlich langen Ueberschwemmungsprofilen in Verbindung, wie diefs fast immer der Fall ist, dann genügt eine Brücke, die erheblich kürzer sein kann, als die Länge des der höchsten Fluth entsprechenden Profils, und die erst in Verbindung mit angeschütteten Erddämmen das Ueberschwemmungsprofil der höchsten Fluth übersetzt. Um bei dieser Bauform keinen zu grofsen Anstau herbeizuführen, wird eine Verbreiterung des natürlichen Flufsbettes in der Ebene seiner Sohle bis zur Brückenlänge, sowohl oberhalb als auch unterhalb der Brücke erforderlich. Nicht minder wirksam als diese Verbreiterung der Flufssohle zeigen sich Durchlässe, die man in den Dämmen anbringt, welche in Gemeinschaft mit der Brücke das höchste Fluthprofil übersetzen.

Die Ueberbrückung eines Stromes winkelrecht zum Wasserlauf bietet der Vortheile mehre, und wo es möglicherweise geschehen kann, soll man diese Richtung beibehalten. Ist man aber durch nicht zu beseitigende Umstände, wie diefs bei Eisenbahnbrücken öfters vorkommt, genöthigt, einen Strom in schiefer Richtung zu überbrücken, dann müssen auch die Brückenbögen selbst schief gemacht werden, damit die Tiefe der Pfeiler in die Richtung des Wasserlaufes fällt; denn wollte man die einen Strom schief übersetzende Brücke mit geraden Bögen versehen, dann kämen die Pfeiler gleichsam verwendet gegen die Stromrichtung zu stehen, oder sie würden eine Tiefenseite dem Wasserlaufe entgegenstellen.

Der Anstau eines Stromes, der mit dem Einbau einer Brücke nothwendig herbeigeführt werden mufs, verdient nicht blos wegen der Zunahme des Ueberschwemmungsprofiles, sondern auch wegen seiner Einwirkung auf die Brücke selbst Beachtung. — Es mufs in jeder Minute durch eine Brücke ebensoviel Wasser fliefsen, als durch jeden höher liegenden Querschnitt des Flufses in derselben Zeit hindurchströmt. Diefs aber kann unter mehrfachen Abänderungen geschehen, und zwar

a) wenn das Wasser während seines Durchganges zwischen den Pfeilern nur eine gröfsere Geschwindigkeit ohne wahrnehmbare Erhöhung, etwa in Folge eines wehrartigen Niederfalles, der dem Flufsbette hinter der Brücke zukommt, zeigt,

b) wenn das Wasser ohne wahrnehmbaren Anstau in Folge einer Vertiefung des Flufsbettes zwischen und hinter den Pfeilern mit nahe unveränderter Geschwindigkeit an seiner Oberfläche fortfliefst und

c) wenn sich das Wasser vor der Brücke anstaut und mit dem so bewirkten gröfsern Querschnitt durch die Pfeiler hindurchgeht.

Bei geringen Wasserhöhen werden wohl alle diese Formen des Wasserdurchflusses durch Brücken wahrgenommen; bei grofsen Wasserhöhen zeigt sich indefs immer ein mehr oder weniger grofser Anstau vor der Brücke und als Wirkung desselben eine Geschwindigkeit des Wassers zwischen den Pfeilern, die von der Sohle bis zum Wasserspiegel des nicht gestauten Wassers herauf gröfser ist, als vor der Brücke, während der Wasserspiegel zwischen den Pfeilern oft eine nur geringe Abnahme an Geschwindigkeit wahrnehmen läfst. Der Zuwachs an Geschwindigkeit, den das Wasser von der Flufssohle aus bis nahe zur Höhe des nicht durch Stauung geänderten Wasserspiegels zwischen den Pfeilern annimmt, ist oft sehr beträchtlich und es entspringt aus derselben ein Bestreben, das Flufsbette zwischen den Pfeilern und hinter der Brücke auszuwaschen. Diese Auswaschung oder Austiefung findet in der That auch statt und bewirkt einen unter *b* angedeuteten Wasserlauf, wenn das Gerinne zwischen den Pfeilern nur aus Kiefs oder Steingerölle besteht, dagegen unterbleibt sie, wenn die Stromrinne zwischen den Pfeilern und hinter denselben durch eine Felslage oder durch eine angemessen starke Steinpflasterung gebildet wird.

Bei einer weder von der Natur noch durch die Kunst gebildeten Versteinerung der Flufssohle vor, unter und hinter der Brücke müssen Auswaschungen zwischen den Pfeilern und hinter denselben während einer Hochfluth entstehen, die viel gröfser sind, als man sie gewöhnlich halten dürfte. Die durch Auswaschungen entstehenden Vertiefungen einer Flufssohle unter und hinter einer Brücke während eines Hochwassers sind durch Messungen zwar nicht unmittelbar nachgewiesen, doch fällt es nicht schwer, dieselben als viel gröfser darzuthun, als sie sich nach Verlauf einer Hochfluth noch zeigen. — Den ersten Hinweis auf das Bestehen einer gröfsern Tiefe des Flufsbettes unter und hinter einer Brücke während einer Hochfluth, als nach deren Verlauf, giebt die geringe Stauhöhe, die sich bei Hochfluthen selbst

vor allen den Brücken herausstellt, deren Flufsbette aus grobem Kiefs oder Geschiebe besteht, obschon die Durchflufsöffnung jener, bei vorausgesetzter Unveränderlichkeit der Flufssohle, oft beträchtlich geringer ist, als das bestehende Fluthprofil des Stromes. So hat sich z. B. zur Zeit des ungewöhnlich grofsen Hochwassers der Elbe im Jahre 1844 für die Eisenbahnbrücke bei Riesa nur eine Stauhöhe von ½ bis 1 Zoll durch das sorgfältigst geführte Nivellement des in Riesa stationirten königl. Wasserbau-Conducteurs Herrn Georgi herausgestellt. Diese Thatsache erscheint als eine Unmöglichkeit, wenn nicht während der Hochfluth selbst eine namhafte Austiefung des Flufsbettes zwischen den Pfeilern der Brücke und hinter derselben bestanden hat. — Vor der alten Elbbrücke in Dresden zeigte sich, ebenfalls während der vorgenannten Hochfluth, eine Stauhöhe von nur 1 Fufs. Auch dieser geringe Anstau weist zuverlässig auf eine während der Hochfluth bestandene sehr erhebliche Vertiefung des Flufsbettes unter und hinter der Brücke hin und läfst sich mittelbar durch Folgerungen darthun. Als eine Wirkung der Hochfluth des Jahres 1844 auf die alte Elbbrücke zu Dresden ergab sich eine Senkung eines Pfeilers und eine dadurch bedingte Beschädigung der Bögen, die sich gegen eben diesen Pfeiler stützten, ferner der Niederbruch eines Hinterhauptes von einem andern Pfeiler, das sich bis zur Ebene der Brückenbahn erhob und von da ab eine Steinmasse, als Fundament eines aufgerichteten Crucifix von Broncegufs, trug, und endlich ein Jahr später die Lostrennung eines noch andern Hinterhauptes vom zugehörenden Pfeiler. Die eigenthümliche Gründung der Pfeiler der vorgenannten Brücke, sie besteht nämlich aus grofsen unregelmäfsigen Steinstücken, jedoch gut mit Mörtel verbunden, sowie die Bauform der Pfeiler selbst, die vom *o* Wasserstand aufwärts nicht massiv sind, sondern nur aus Hausteinen gebildete und mit Kiefs erfüllte Röhren darstellen, sowie endlich der Umstand, dafs die Vorder- und Hinterhäupter der Pfeiler, sowie ein Steingürtel um die Fufsschichten der Pfeiler viel später als die letztern und ohne alle tiefere Gründung aufgeführt sind, läfst aus der stattgehabten Zerstörung des Pfeilers und der Hinterhäupter keinen Schlufs auf die Auswaschungstiefe während der Hochfluth selbst machen. Doch sie mufs sehr bedeutend gewesen sein, und die Annahme, sie habe bis zur Sohle der Steinwurfgründung des beschädigten Pfeilers hinabgereicht, erscheint als gar nicht unmöglich,

zumal das Gerinne zwischen den Pfeilern keine Spur einer künstlichen Befestigung nachweist. Auf die grofse Tiefe der Auswaschung zwischen den Pfeilern und hinter der Brücke während der Hochfluth selbst lassen folgende Thatsachen schliefsen. Das aus Broncegufs hergestellte Crucifix, das das noch während der Hochfluth niedergebrochene Hinterhaupt eines Pfeilers trug, ist nach Verlauf der Hochfluth mit aller Sorgfalt gesucht, aber nicht aufgefunden worden. Wegen seines grofsen specifischen Gewichtes kann es keine erhebliche Entfernung von dem Puncte seines Niederfalles in das Wasser angenommen haben, noch weniger kann es auf eine grofse Entfernung fortgeführt sein. Man hält dafür, es sei tief versandet; eine Ansicht, die auch wir theilen. — Ferner: Nach Verlauf der Hochfluth zeigte sich, etwa ¼ Stunde Wegs unterhalb der alten Elbbrücke, das Bette der Weifseritz völlig mit Steingerölle bis zur Gröfse von 1 Kubikfufs erfüllt und sogar an einigen Stellen in der Form eines künstlich angeschütteten Steindammes von gegen 3 Fufs Höhe mit ganz regelmäfsiger Böschung auf der dem Wasserlauf zugekehrten Seite. — Endlich: Ebenfalls nach Verlauf der Hochfluth des Jahres 1844 wurde oberhalb der alten Elbbrücke zu Dresden zur Uebung des Militärs eine Pontonbrücke (nicht zu verwechseln mit der später errichteten Schiffbrücke) geschlagen. Bei Wegnahme derselben nach einem 8wöchentlichen Bestand fanden sich mehre Anker bis zu einer Tiefe von gegen 6 Ellen unter der Oberfläche des Flufsbettes und mufsten, weil die Ankertaue rissen, im Sande verbleiben. Diese grofse Versandung der Anker wird nur durch Ablagerung von Kiefs und Gerölle in der Bestandzeit der Pontonbrücke, während welcher sich der Wasserstand mehr und mehr erniedrigte, erklärlich. — Die Stromgeschwindigkeit nun, welche die Steine zu dem vorerwähnten Steindamme herbeischaffte und zuverlässig durch die Brücke selbst hindurchführte, war auch fähig, das weder von der Natur noch von der Kunst befestigte Flufsbett zwischen den Pfeilern und hinter denselben während der höchsten Fluth bis zu einer grofsen Tiefe auszuwaschen, die durch die Lage des jedenfalls versandeten Crucifix nahezu angegeben wird; denn die Nichtwahrnehmung einer besonders grofsen Austiefung zwischen den Pfeilern nach Verlauf der Hochfluth kann nicht gegen eine beträchtliche Auswaschung während der Hochfluth zeugen, weil sie sich mit deren Verlauf eben so mit Gerölle wieder erfüllt, als sich

das ausgetiefte Flufsbette, auf das die Anker der vorbemerkten Pontonbrücke zu liegen kamen, durch nicht ferner vom Strom bewegtes Steinwerk und Kiefs erhöhte, und endlich, als sich der mehrgenannte Steindamm selbst nur durch Abnahme der Wassergeschwindigkeit ablagerte.

Die vorbemerkten Andeutungen werden zur Genüge darthun, dafs die Einwirkung des Wasserstaues oder die Durchgangsöffnung einer Brücke, die kleiner als das gröfste Fluthprofil des Stromes ist, auf deren Stand selbst den nachtheiligsten Einflufs üben kann. Offenbar hängt die mögliche Unterwaschung des Gerinnes einer Brücke aufser von der Höhe des Wasserstandes an sich und dem Verhältnisse ihrer Durchgangsöffnung zum entsprechenden Fluthprofile des Stromes noch von der Geschwindigkeit ab, mit der sich das Wasser gegen die Brücke bewegt. Mit der Abnahme der Durchgangsöffnung einer Brücke und mit der Zunahme der Stromgeschwindigkeit mufs sich folglich die austiefende Wirkung des Wassers bei seinem Durchgange zwischen den Pfeilern jener vermehren. Die Geschwindigkeit des Wasserlaufes selbst wächst bekanntlich mit dem Gefälle des Flufsbettes und mit seiner geradlinigen Richtung. In Niederungen fliefsen die Ströme sogar bei den gröfsten Fluthhöhen, die sie dort erreichen, verhältnifsmäfsig nur langsam, sie fliefsen aber, von steilen Ufern umschlossen und in der Nähe von Gebirgen mit um so gröfserer Geschwindigkeit, je gröfser ihr Wasserstand wird. Demnach müssen im Allgemeinen die in Niederungen über Ströme geführten Brücken einer geringern Unterwaschung ausgesetzt sein als jene, die sich an Stromstellen mit steilen Ufern oder auch da befinden, wo der Strom von Gebirgen eingeengt, sich nicht ausbreiten kann und wo ihm überdiefs die letztern oft Wasser in grofsen Mengen zuführen.

Der Druck endlich, den eine Brücke vom durchströmenden Wasser erleidet, ist so lange nicht zu beachten, oder ihrem Bestehen nicht gefährlich, so lange deren Durchgangsöffnung, etwa durch Holz oder Eis, nicht verstopft ist und so lange nicht das Wasser die Stirnflächen der Bögen erreicht. Nur in den zuletzt gennanten Fällen, die jedoch zu den Seltenheiten gehören, oder nur durch eine ganz ungeschickte Anlage der Brücke hervorgerufen werden, kann der entstehende Wasserdruck gegen die Brücke eine Verschiebung derselben auf ihrem Grunde oder ein Umwerfen derselben einleiten.

Die manchfachen Rücksichten, die bei der Anlage und der Construction einer Strombrücke genommen werden müssen, kommen bei blosen Thalüberbrückungen, wie sie Eisenbahnen so häufig erfordern, gar nicht in Betracht. Während bei Strombrücken die Construction und Ausführung darauf gerichtet sein mufs, eine möglichst geringe Stauhöhe oder eine Durchgangsöffnung zu erreichen, die nicht viel kleiner als das Fluthprofil des Stromes ist, alle sonstigen Rücksichten aber, wie die Selbstständigkeit der Bögen in den Hintergrund zu stellen sind, hat man bei Thalbrücken in der Regel ganz freie Hand, nämlich die Spannweiten und Pfeiler so zu wählen, dafs die Selbstständigkeit jedes Bogens und Pfeilers mit dem geringsten Aufwand an Material und Arbeit erreicht, übrigens auch der Bau genau dem zur Verfügung stehenden Material angepafst werden kann. Einige Schwierigkeiten kann indefs die Gründung der Thalbrücken bieten, von der wir zu sprechen später die Gelegenheit haben werden. Dafs man übrigens Thalbrücken, dafern man die Wahl hat und nicht die Gründungsverhältnisse eine Abänderung nothwendig machen, immer über die engste Thalstelle zu führen hat, liegt zu nahe, als dafs eine nähere Begründung der Vortheile hier anzuschliefsen, erforderlich sein dürfte.

3) Ueber Transport von Gestein durch den Lauf des Wassers.

Der Transport von Sand, Kiefs und losem Gestein, das auf dem Bette eines Flusses liegt, durch die Geschwindigkeit des Wassers, ist eine Thatsache. Die Erfahrung lehrt, dafs gröfsere Stromgeschwindigkeiten auch gröbern Sand, Kiefs und gröfsere Steine bewegen, und mit Hilfe der Wissenschaft läfst sich darthun, dafs n mal so grofse Körper durch eine $\sqrt{n}$ mal so grofse Stromgeschwindigkeit unter gleichen Umständen auf dem Flufsbette fortgeschafft werden.

Es wird von Interesse an sich und wichtig für die Praxis sein, die letzte Behauptung darzuthun. Denken wir uns zu diesem Ende auf dem Bette eines Flusses einen z. B. kugelig gestalteten Stein mit der Querschnittsfläche 1, mit dem Inhalte oder Gewichte 1, die Stromgeschwindigkeit aber als v, und ferner endlich, es werde der Stein durch diese Stromgeschwindigkeit eben bewegt. Ein Stein von doppelter Gröfse hat die vierfache Querschnittsfläche und das achtfache

Gewicht, er bedarf also für die Einheit seiner Querschnittsfläche den $^8/_4$ = doppelten Druck unter gleichen Umständen zur Fortbewegung als der erste Stein. Die Stromgeschwindigkeit, die diesen Druck gegen den doppelt so grofsen Stein äufsert, sei v_2, dann ist, weil der Stofs des Wassers dem Quadrate seiner Geschwindigkeit proportional ist

$$1 : 2 = v^2 : v_2^2 \text{ d. g.}$$
$$v_2 = v\sqrt{2}$$

Für einen nmal so grofsen Stein erhalten wir in vorstehender Weise die Geschwindigkeit des Wassers, die dessen Transport unter übrigens gleichen Umständen besorgt, zu

$$(1)\ v_n = v\sqrt{n}.$$

Wenn wir die Geschwindigkeit immer noch mit v darstellen, die einen Körper von der Dicke 1 auf dem Flufsbette zu bewegen beginnt, so erhalten wir nach dem Gesetze, das die Gleichung (1) ausdrückt, die unter gleichen Umständen erforderliche Geschwindigkeit zur Bewegung eines

2 mal so grofsen Körpers zu	$v\sqrt{2} = 1{,}414\ v$;
3 „ „ „ „ „	$v\sqrt{3} = 1{,}732\ v$;
4 „ „ „ „ „	$v\sqrt{4} = 2\ v$;
5 „ „ „ „ „	$v\sqrt{5} = 2{,}236\ v$;
6 „ „ „ „ „	$v\sqrt{6} = 2{,}449\ v$;
7 „ „ „ „ „	$v\sqrt{7} = 2{,}646\ v$;
8 „ „ „ „ „	$v\sqrt{8} = 2{,}828\ v$;
9 „ „ „ „ „	$v\sqrt{9} = 3\ v$;
16 „ „ „ „ „	$v\sqrt{16} = 4\ v$;
25 „ „ „ „ „	$= 5\ v$;
36 „ „ „ „ „	$= 6\ v$;

etc.

Die soeben dargestellten Beziehungen gelten, wie schon bemerkt, nur für ähnlich gestaltete und gleich dichte Körper bei gleichen Bewegungsverhältnissen, nicht aber für unähnliche von gleichem Gewichte oder von gleicher Dicke.

Von zwei Steinen wird immer jener die kleinere Stromgeschwindigkeit zu seiner Bewegung unter sonst gleichen Verhältnissen bedürfen, für welchen der Quotient aus der dem Wasserstofse gebotenen Fläche, dividirt durch das Eigengewicht, den kleinsten Quotienten

giebt. Ebendeſshalb müssen kugelige und würfelige Körper durch viel geringere Stromgeschwindigkeit fortgeschafft werden, als flache und plattenförmige von gleichem Gewichte. Hierzu kommt noch, daſs sehr nahe kugelige Steine eine rollende Bewegung annehmen, plattenförmige aber nur fortgeschoben werden können. — Eine Formel, ähnlich der unter (1) können wir auch für unähnlich geformte Körper aufstellen, wenn die Art der Fortbewegung dieselbe, nämlich entweder eine rollende oder eine gleitende, ist. Zu diesem Ende setzen wir die dem Wasserstoſse von zwei Körpern gebotenen Flächen f und F, ihre Gewichte q und Q, und die Stromgeschwindigkeiten, die zu ihrer Fortschaffung auf dem Fluſsbette unter gleichen Verhältnissen erforderlich sind, v und V. Der eine Stein bedarf zu seiner Fortbewegung eines Druckes für die Einheit der dem Wasser gebotenen Stoſsfläche, der $\frac{q}{f}$, der andere eines Druckes für die Einheit seiner dem Wasserstoſse gebotenen Fläche, der $\frac{Q}{F}$ proportional ist. Weil nun ferner der Wasserstoſs dem Quadrate der Geschwindigkeit des Wassers proportional ist, so erhalten wir

$$v^2 : V^2 = \frac{q}{f} : \frac{Q}{F} \quad \text{d. g.}$$

$$(2)\; V = v\sqrt{\left(\frac{Qf}{Fq}\right)}.$$

Statt der Gewichte Q und q können auch die körperlichen Inhalte gesetzt werden, wenn die Steine nahe gleiches specifisches Gewicht haben.

Es sind uns keine Versuche bekannt, welche die Gröſse der Steine mit allen erforderlichen Nebenumständen darstellen, die von einer gewissen Stromgeschwindigkeit bewegt werden, auſser Angaben, wie sie z. B. Umpfenbach in seiner Theorie des Neubaues, der Herstellung und Unterhaltung der Kunststraſsen, Berlin bei August Rücker, 1830, Seite 6, angiebt. An der eben angezogenen Stelle heiſst es wörtlich: „Nach gemachten Erfahrungen enthält das Bett kleiner Gewässer:

bei 8″ Geschwindigkeit in der Secunde des Hochwassers an der Oberfläche feinen Lehm oder Schlamm,

bei 1′ Geschwindigkeit des Hochwassers in der Secunde an der Oberfläche feinen Sand,

bei 1½′ Geschwindigkeit des Hochwassers in der Secunde an der Oberfläche körnigen Sand,

bei 2′ Geschwindigkeit des Hochwassers in der Secunde an der Oberfläche sehr feinen Kiefs,

bei 3′ Geschwindigkeit des Hochwassers in der Secunde an der Oberfläche Kiefs von 1″ Durchmesser,

bei 5′ Geschwindigkeit des Hochwassers in der Secunde an der Oberfläche Kiefs von 2″ Durchmesser,

bei 7′ Geschwindigkeit des Hochwassers in der Secunde an der Oberfläche Steine von ⅙ Kubikfufs,

bei 10′ Geschwindigkeit des Hochwassers in der Secunde an der Oberfläche Steine von 1 Kubikfufs,

bei 15′ Geschwindigkeit des Hochwassers in der Secunde an der Oberfläche Steine von 2 Kubikfufs und

bei 30′ Geschwindigkeit des Hochwassers in der Secunde an der Oberfläche Steine von 10 — 15 Kubikfufs.

Ob für die vorstehenden Angaben die Massen und Geschwindigkeiten nur geschätzt oder genau bestimmt wurden, ob die Steine, die auf dem Flufsbette verblieben, lose lagen oder ob sie zum Theil eingeklemmt waren, ob sie ähnlich gestaltet waren oder nicht, ob die Flufsbette gleiche oder verschiedene Beschaffenheit hatten etc. etc.? ist nicht erwähnt. Ungeachtet der Mängel, welche die Umpfenbach'sche Zusammenstellung für unsere Zwecke hat, wollen wir sie doch etwas näher nach dem unter (1) aufgestellten Gesetze untersuchen. In Ermangelung einer genauern Kenntnifs der Form der Steine, die bei den bemerkten Geschwindigkeiten auf den Flufsbetten liegen blieben, und sonstiger Umstände, nehmen wir sie als ähnliche Körper von kugeliger Form an und berechnen demgemäfs für jene, deren Gröfse durch Kubikinhalt gegeben ist, die entsprechenden Durchmesser, und ferner endlich setzen wir voraus, die Gröfse der auf den Flufsbetten bei den bemerkten Geschwindigkeiten liegen gebliebenen Steine habe mit dem Wasserstofse im Gleichgewichte gestanden. Mit diesen Voraussetzungen ergiebt sich als Stromgeschwindigkeit

für Steine von 2 Zoll Durchmesser $3\sqrt{2} = 4{,}242$ Fufs,
" " " ⅙ Kubikfufs $3\sqrt{8{,}19} = 8{,}585$ "
" " " 1 " $3\sqrt{14{,}9} = 11{,}58$ "
" " " 2 " $3\sqrt{18{,}77} = 12{,}99$ "

wenn wir die Stromgeschwindigkeit von 3 Fufs, die sich zur beginnenden Bewegung eines 1zölligen Steines als hinreichend herausstellte, der Berechnung zum Grunde legen. Somit ergiebt sich für die Geschwindigkeit eines Stromes, die den Transport einleitet

	berechnet	beobachtet
für Steine von 1 Zoll Durchmesser	— Fufs	3 Fufs
" " " 2 " "	4,242 "	5 "
" " " ⅙ Kubikfufs	8,586 "	7 "
" " " 1 "	11,58 "	10 "
" " " 2 "	12,99 "	15 "

Mit Rücksicht auf die unvollständigen Angaben und der defshalb nöthig gewordenen Annahmen für die vorgeführten Rechnungen, namentlich die vorausgesetzte ähnliche Gestalt der Steine, müssen wir die berechneten Geschwindigkeiten mit den beobachteten als sehr übereinstimmend erkennen, ganz besonders, wenn wir ferner erwägen, dafs in der Regel die Steine eines Flufsbettes um so mehr einer kugeligen Gestalt entbehren und sich der würfelförmigen, für noch gröfsere Geschwindigkeiten aber der plattenförmigen nähern, je gröfser sie den Abmessungen nach sind.

Mit der gegebenen Zusammenstellung der berechneten und beobachteten Stromgeschwindigkeiten, welche zur Bewegung gewisser Steine erforderlich sind, haben wir nicht die Absicht gehabt, die Wahrheit des unter (1) aufgestellten Gesetzes darzuthun, gegen das in seiner Allgemeinheit keine Einwendung zu machen sein dürfte, sondern nur die genäherte Ermittelung der Geschwindigkeit, die einen mehr kugeligen oder würfeligen Stein zu bewegen beginnt. Wir halten uns in dieser Beziehung, sowohl in Folge der Umpfenbach'schen Angaben, als auch der gemachten Berechnung, für berechtigt, anzunehmen, es beginne die schiebende Bewegung eines Steines von 1 Zoll Durchmesser oder Dicke, dessen Gestalt zwischen der einer Kugel und eines Würfels liegt, auf einem mit Steingerölle bedeckten Flufsbette bei einer Geschwindigkeit des Stromes von etwa 3 Fufs.

Hiernach und nach (1) auf Seite 367 erhalten wir die Stromgeschwindigkeit zur beginnenden Bewegung eines Steines, der seiner Gestalt nach zwischen einer Kugel und einem Würfel liegt, bei

4	Zoll	Durchmesser	zu $3 \times 2 = 6$	Fuſs,
9	„	„	„ $3 \times 3 = 8$	„
16	„	„	„ $3 \times 4 = 12$	„
25	„	„	„ $3 \times 5 = 15$	„
36	„	„	„ $3 \times 6 = 18$	„
49	„	„	„ $3 \times 7 = 21$	„
64	„	„	„ $3 \times 8 = 24$	„
81	„	„	„ $3 \times 9 = 27$	„
100	„	„	„ $3 \times 10 = 30$	„

Die vorstehenden Erörterungen geben eine anderweite Bestätigung für das, was wir bereits auf Seite 364 angeführt haben, und liefern uns überdieſs die Regeln, welche bei der Versteinerung oder Pflasterung der Ufer und der Bette, z. B. der Gerinne zwischen Brückenpfeilern, der Sturzbette bei Wehren etc. befolgt werden müssen, um sie gegen die zerstörende Wirkung des Wassers zu sichern. Diese Regeln sind ganz einfach und folgende:

Je gröſser die Strömung ist, welcher eine Pflasterung widerstehen soll, um so gröſser sind womöglich die einzelnen Steine zu wählen, die man verwendet; plattenförmige Steine müssen sich hierbei besser als würfelförmige zeigen. — Mit je kleinern Steinen eine Pflasterung für eine gegebene gröſste Stromgeschwindigkeit dauerhaft ausgeführt werden soll, desto dichter müssen sie aneinander gesetzt und um so sorgfältiger müssen die noch bleibenden Fugen mit kleinern Steinen ausgezwickt oder ausgeschlagen werden und um so gesicherter muſs der Anfang sowie das Ende der Pflasterfläche gegen Unterwaschung gewahrt werden. Räthlich ist es immer, wenn man nicht durchaus angemessen groſse Steine verwenden kann, solche wenigstens für die Begrenzung der Pflasterflächen und womöglich auch für einzelne Schichten in Anwendung zu bringen, die winkelrecht zum Wasserlauf gerichtet sind.

Bloser Steinwurf, der bisweilen zur Befestigung der Stromufer und der Strompfeiler von Brücken verwendet wird, muſs aus um so gröſsern Steinen bestehen, je gröſser die Geschwindigkeit

des Wassers ist, dem derselbe zu widerstehen hat. Die Dimensionen jener Steine, die dem Wasserstofse zunächst ausgesetzt sind, wird man genügend genau nach der Zusammenstellung auf Seite 371 bemessen können.

4) Ueber die Berechnung der Stauhöhe eines Stromes, die durch den Einbau einer Brücke in denselben entsteht.

Gerstner giebt im zweiten Bande seines Handbuches der Mechanik Seite 332 für die Bestimmung der Stauhöhe eines Stromes, die durch den Einbau einer Brücke entsteht, die Formel

$$(1)\quad \tfrac{2}{3}\, x \sqrt{2gx} + a\sqrt{(c^2 + 2gx)} - \frac{abc}{m\,(b - n\beta)} = o$$

in welcher x die gesuchte Stauhöhe, a die Stromtiefe, b die Strombreite und c die Geschwindigkeit des Wassers in einer Secunde vor dem Einbau der Brücke, ferner β die Länge oder Breite eines Strompfeilers winkelrecht gegen den Lauf des Wassers, n die Anzahl der Pfeiler, g die Beschleunigung des freien Falles $=$ 30,2 Meter $=$ 34,91 sächs. Fufs $=$ 31,25 preufs. Fufs und m den Zusammenziehungscoefficienten des Wassers bei seinem Eintritt zwischen die Pfeiler darstellt. Ebenfalls zur Bestimmung der Stauhöhe, die durch den Einbau einer Brücke in einen Strom entsteht, giebt Hofrath Kaiser in seinem Handbuche der Mechanik (Karlsruhe 1842, Verlag der Braun'schen Hofbuchhandlung) Seite 518 die Formel

$$x = \frac{M^2}{2gB^2h^2}\left\{\frac{B^2h^2}{m^2b^2(x+h)^2} - 1\right\},$$

in welcher x die gesuchte Stauhöhe, g die Beschleunigung des freien Falles, m den Zusammenziehungscoefficienten, B die Breite und h die Tiefe des Stromes vor, dagegen b die Breite des Wasserdurchflusses in der Brückenlinie nach dem Einbau der Brücke, ferner M die Wassermenge, die in 1 Secunde durch den Querschnitt des Stromes in der Brückennähe fliefst, bedeutet.

Den Werth des Zusammenziehungscoefficienten giebt Kaiser zu

0,95 für abgerundete oder zugespitzte Pfeiler,
0,90 „ stumpfwinkelig „ „
0,85 „ Pfeiler, die dem Strome eine gerade Fläche entgegenstellen, und zu
0,7 „ Pfeiler, die nahe an einander stehen und dem Wasserstofse eine gerade Fläche bieten.

Selten kommt man in den Fall, m kleiner als 0,95 annehmen zu müssen.

Das Bedürfnifs, die Stauhöhe eines Stromes für eine über denselben gehende Brücke zu berechnen, kommt nur bei erst herzustellenden vor; denn bei bereits ausgeführten Brücken kann die Stauhöhe, die sich bei verschiedenen Wasserständen und Geschwindigkeiten ergiebt, gemessen werden, sie ist ja der Höhenunterschied der Wasserspiegel vor und hinter der Brücke. Die unmittelbare Messung der Stauhöhe ist ein Verfahren, das jedenfalls der Rechnung vorzuziehen ist.

Früher war es Gebrauch, bei der Berechnung der Stauhöhe von der Ansicht auszugehen: es nehme die Höhe des Wassers bei seinem Durchgange durch eine Brücke in dem Maafse zu, in welchem die Querschnittsfläche des Stromes durch die Brücke verkleinert werde, eine Ansicht, die durchaus irrig ist und Stauhöhen giebt, die unter allen Umständen gröfser als jene sind, die sich wirklich ergeben. Das Fehlerhafte der bemerkten Bestimmungsweise liegt darin, dafs bei derselben nicht auf die vermehrte Geschwindigkeit Rücksicht genommen wird, die das gestaute Wasser jenem ertheilt, das vom Strombette aus bis zum Spiegel des nicht gestauten Wassers liegt. Bei der Formel (2) ist hierauf ebenfalls nicht Rücksicht genommen, wefshalb wir nur die unter (1) zur Berechnung der Stauhöhe empfehlen können.

In der von Gerstner aufgestellten und in (1) dargestellten Formel zur Bestimmung der Stauhöhe ist abc das Wasserquantum, das in 1 Secunde durch einen Querschnitt des Stromes in der Nähe der Ueberbrückungsstelle, also in der nämlichen Zeit auch durch die Brücke selbst fliefst. Dieses Wasserquantum wollen wir mit M darstellen. Ferner, der Nenner $b - n\beta$ bezeichnet die Breite des ge-

sammten Wasserdurchflusses durch die Brücke und a die zugehörende Wasserhöhe vom Flufsbette bis zum Spiegel des nicht gestauten Wassers. Jene Breite wollen wir mit s, und diese Höhe mit h ausdrücken. Mit diesen Bezeichnungen geht die Gleichung (1) über in

$$\text{I.}\quad \tfrac{2}{3}\, x \sqrt{2gx} + h\sqrt{(c^2+2gx)} - \frac{M}{ms} = o.$$

Diese Formel gilt zunächst nur für einen durchaus gleich hohen Wasserstand. Dieser aber ist weder vor dem Einbau einer Brücke im Strome im Allgemeinen vorhanden, noch kann er mit dem Bau der Brücke durchgängig hergestellt werden, in keinem Falle aber ist er auf die Dauer zu erhalten. Näherungsweise indefs ist der Wasserstand zwischen je zwei Pfeilern von gleicher Höhe anzunehmen. Bezeichnen wir demgemäfs die Wasserhöhen zwischen den Pfeilern von der einen Landseite nach der andern hin auf einander folgend mit h_1, h_2, $h_3 \ldots$, die zugehörenden lichten Abstände der sich zugekehrten Pfeilerflächen, deren Richtung wir als lothrecht annehmen, mit s_1, s_2, $s_3 \ldots$ und die Wassermengen mit N_1, N_2, $N_3 \ldots$, die zwischen den Pfeilern hindurchgehen, dann ist

$$\tfrac{2}{3}\, x s_1 \sqrt{2gx} + h_1 s_1 \sqrt{(c^2+2gx)} - \frac{N_1}{m} = 0,$$

$$\tfrac{2}{3}\, x s_2 \sqrt{2gx} + h_2 s_2 \sqrt{(c^2+2gx)} - \frac{N_2}{m} = 0,$$

$$\tfrac{2}{3}\, x s_3 \sqrt{2gx} + h_3 s_3 \sqrt{(c^2+2gx)} - \frac{N_3}{m} = 0$$

u. s. w.

Die Geschwindigkeit c eines Stromes ist nicht in allen Breiten dieselbe, was in den vorstehenden Ausdrücken angedeutet sein sollte. Der Unterschied ist indefs so gering, dafs er für die vorliegende genäherte Berechnung aufser Beachtung gelassen werden kann. Die Summe der oben stehenden Gleichungen giebt, weil

$$N_1 + N_2 + N_3 = M$$

oder gleich der Wassermenge sein mufs, die in einer Secunde durch einen Querschnitt des Stromes hindurchgeht,

$$\text{II.}\quad \tfrac{2}{3}\, x\, (s_1 + s_2 + s_3 \ldots) \sqrt{2gx} + (h_1 s_1 + h_2 s_2 + h_3 s_3 \ldots) \times \sqrt{(c^2 + 2gx)} - M = o.$$

In dieser Gestalt ist die Gerstner'sche Formel auch zur Berechnung der Stauhöhe für Brücken verwendbar, deren sich zugekehrte Pfeilerflächen beliebige Entfernungen s_1, s_2, $s_3 \ldots$ und ferner Wasserstände h_1, h_2, $h_3 \ldots$ vom Spiegel des nicht gestauten Wassers bis zur Sohle des Stromes zwischen sich haben, die gleichfalls ganz verschieden sein können.

Aus den Formeln I und II ist die gesuchte Stauhöhe noch am leichtesten durch Versuchsrechnungen zu bestimmen, d. h. dadurch, dafs man so lange Werthe für x einsetzt, bis man jenen gefunden hat, welcher der für den besondern Fall bestehenden Bedingungsgleichung entspricht. Ebenso sucht Gerstner an der angezogenen Stelle seines Handbuches die Stauhöhe x eines Flusses von 780 Fufs Breite für eine Wassertiefe von 6 Fufs und für eine Stromgeschwindigkeit von 4 Fufs in 1 Secunde, die unter diesen Verhältnissen durch den Einbau einer Brücke mit 5 gleich weit von einander abstehenden Strompfeilern, jeder von 12 Fufs Länge, entsteht. Für die Gleichung I erhält man aus den vorstehenden Werthen

$$c = 4 \text{ Fufs},\ h = 6 \text{ Fufs},\ s = 780 - 5.12 = 720 \text{ Fufs},$$
$$M = 780 \times 6 \times 4 : 720 = 26.$$

Ueberdiefs ist für östreichisches Maafs $g = 31{,}03$ Fufs, wofür Gerstner 31 Fufs gesetzt hat. Derselbe nimmt ferner $m = 1$ an. Mit allen diesen Werthen giebt die Gleichung I

$$\tfrac{2}{3}\, x \sqrt{62x} + 6 \sqrt{(16 + 62x)} - 26 = 0.$$

und es wird aus derselben statt 0 erhalten

für	$x = 1;$	$+ 32{,}240;$
„	$x = 0{,}1;$	$+ 2{,}436;$
„	$x = 0{,}05;$	$+ 0{,}281;$
„	$x = 0{,}0437;$	$+ 0{,}0006,$

so dafs die gesuchte Stauhöhe ist

$$x = 0{,}0437 \text{ Fufs} = 0{,}5244 \text{ Zoll}.$$

Eine zweite Aufgabe, zu deren Lösung wir die Formel II in Anwendung bringen müssen, ist folgende: Eine Stromstelle, durch welche bei einer Geschwindigkeit des Wassers von 3 Fufs in

1 Secunde 3654 Kubikfufs, dagegen bei einer Geschwindigkeit des Hochwassers von 10 Fufs 65480 Kubikfufs Wasser in 1 Secunde durchfliefsen, soll überbrückt werden. Es fragt sich, welcher Anstau des Wassers vor der Brücke bei den angegebenen Geschwindigkeiten entsteht, wenn die lichten Abstände der Pfeiler vom linken Stromufer nach dem rechten hin auf einander folgend $s_1 = 40$ Fufs, $s_2 = 80$ Fufs, $s_3 = 80$ Fufs, $s_4 = 40$ Fufs, ferner wenn für die Geschwindigkeit von 3 Fufs die Wassertiefe unter dem ersten Bogen 5 Fufs, unter dem zweiten 6 Fufs, unter dem dritten 5 Fufs, unter dem vierten 0 Fufs, und wenn endlich bei einer Geschwindigkeit von 10 Fufs zur Zeit der Hochfluth die Wassertiefe unter dem ersten Bogen 25 Fufs, unter dem zweiten 26 Fufs, unter dem dritten 25 Fufs und unter dem vierten 20 Fufs beträgt? — Für sächsisches Fufsmaafs ist $g = 34{,}91$ Fufs und m sei 0,95. Die zur Geschwindigkeit von 3 Fufs gehörenden Werthe in II gesetzt, giebt wegen

$$s_1 + s_2 + s_3 = 40 + 80 + 80 = 200$$

(s_4 fällt weg, weil durch diese Spannweite ohne Stau kein Wasser geht und weil mit der geringen Stauhöhe, die zu erwarten steht, durch eben dieselbe ein gleichfalls nur geringer Wasserdurchflufs entstehen kann.)

$$s_1h_1 + s_2h_2 + s_3h_3 = 200 + 480 + 400 = 1080,$$

$$c = 3 \text{ und } M = 3654,$$

$$\tfrac{2}{3}\, x \,.\, 200 \sqrt{69{,}82\, x} + 1080 \sqrt{(9 + 69{,}82\, x)} - \frac{3654}{0{,}95} = 0.$$

Diese Gleichung giebt für $x = {}^1/_{19}$ Fufs statt 0 den Werth $+ 12{,}1$ und für $x = {}^1/_{20}$ statt 0 den Werth $- 16{,}9$, folglich ist die gesuchte Stauhöhe sehr nahe

$$x = 0{,}0513 \text{ Fufs.}$$

Für die bei der Hochfluth bestehende Geschwindigkeit des Wassers von 10 Fufs ist

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 40 + 80 + 80 + 40 = 240,$$

$$s_1h_1 + s_2h_2 + s_3h_3 + s_4h_4 = 1000 + 2080 + 2000 + 800 = 5880,$$

$$c = 10,\ M = 65480, \text{ folglich}$$

$$\tfrac{2}{3}\, x \,.\, 240 \sqrt{69{,}82\, x} + 5880 \sqrt{(100 + 69{,}82\, x)} - \frac{65480}{0{,}95} = 0$$

Diese Gleichung entwickelt für $x = 0{,}51$ Fufs statt 0 den Zahlenwerth 34 und für $x = 0{,}5$ statt 0 den Werth — 156. Demgemäfs ist die mit der Hochfluth eintretende Stauhöhe vor der Brücke genügend genau

$$x = 0{,}51 \text{ Fufs.}$$

Die Stauhöhe, die uns die Rechnung giebt, wird sich nach erfolgtem Einbau einer Brücke nur dann zeigen, wenn die Stromrinne zwischen den Pfeilern keiner Auswaschung fähig ist, dagegen wird die sich ergebende Stauhöhe geringer als die berechnete werden, wenn die Stromrinne bis zu der Geschwindigkeit hin ausgetieft werden kann, für welche jene berechnet wurde.

5) Statische Bestimmung der Stützbögen, der Pfeiler und der Widerlager einer Brücke.

Die Bestimmung eines jeden Stützbogens einer Brücke ist: sein eignes Gewicht, das der überstehenden Hinter- und Uebermauerung, das der Bekiefsung etc. etc. und das der Lasten, die über ihn wegschreiten, entweder ausschliefslich oder doch wesentlich in seiner Richtung zu stützen.

Aus den vorgenannten Bestimmungen eines Stützbogens folgen auch dessen Beschaffenheiten im Allgemeinen und zwar die: dafs die Form eines Stützbogens seiner besondern Bestimmung entsprechen und dafs ein solcher überdiefs die Festigkeit besitzen mufs, um dem Drucke mit Sicherheit widerstehen zu können, der nothwendig in der Richtung desselben eintritt, wenn er seiner Bestimmung gemäfs stützt.

Die Bestimmung eines jeden Pfeilers ist: sein eignes Gewicht und das der Bögen zu stützen, die sich gegen einen solchen lehnen, für zufällige äufsere Einwirkungen noch steif genug zu sein und wo möglich dem einseitigen Bogenschub zu widerstehen, den er empfängt, wenn einer der Bögen, die dem Pfeiler zugehören, niederbricht.

Die Belastung eines jeden Pfeilers einer Brücke durch die sich gegen denselben lehnenden Bögen ist dem Gewichte der Bögen vom Pfeiler bis zu deren Scheitelpuncten hin gleich. Die Wahrheit dieser Angabe ist im Allgemeinen auf Seite 40 und 30 nachgewiesen.

Die Bestimmung eines Widerlagers ist: das Gewicht des Bogens bis zum Scheitel hin, sowie den Horizontalschub eben

des Bogens zu stützen, der sich gegen das Widerlager lehnt. Bisweilen gesellt sich hierzu noch die Bestimmung, gegen den Erddruck sicher zu stehen, den angeschüttete Erddämme üben.

6) Allgemeines über die Form der Stützbögen.

Jeder Stützbogen mufs, um seiner Bestimmung genügen zu können, eine materielle und stetig gekrümmte Fläche, dessen mittlere Wölblinie folglich eine durchaus stetig gekrümmte Linie oder ein Rundbogen sein, wogegen jeder Stützbogen, der im Scheitel eine freistehende Mauer tragen soll, aus zwei materiellen und gekrümmten Flächen zu bestehen hat, die im Scheitel oder bei dem Anschlufs an die überstehende Scheitelbelastung beiderseits mit einer Vertikale einen Winkel einschliefsen müssen, der kleiner als 90^0 ist, d. h. die mittlere Wölblinie eines jeden Stützbogens, der im Scheitel eine frei überstehende Last zu tragen hat, mufs ein Spitzbogen sein.

Der Nachweis dafür, dafs nur die Rundbogengestalt für Brückenstützbögen zulässig ist, wenn sie ihrer Bestimmung zu entsprechen fähig und diese nicht von der Bindefähigkeit des Mörtels entlehnen sollen, ist bereits im vierten, fünften und sechsten Abschnitte niedergelegt, aber auch besonders im siebenten Abschnitte abgehandelt; denn ein Stützbogen mufs wenigstens vom Scheitel ab die Richtung der Stützlinie körperlich darstellen, in welcher die Massenstützung möglich ist. Ebenso lehren die vorerwähnten Abschnitte, dafs die im Scheitel zusammenfallenden Hälften eines Stützbogens einen Winkel, der kleiner als 180^0 ist, einschliefsen müssen, wenn der Scheitel selbst eine überstehende Last stützen soll; denn auch hier gilt der Satz: dafs der Stützbogen wenigstens vom Scheitel ab die Richtung einer Stützlinie körperlich darstellen mufs, in der die Massenstützung erfolgen kann.

Die Wahrheit der eben aufgestellten Regel: dafs Brückenstützbögen nur rundbogenförmig sein können, wenn sie ohne Mitwirkung des Mörtels oder ohne beträchtliche Uebermauerung bestehen sollen, deutet die Ausführung von Spitzbögen ganz bestimmt an; denn sie steigen im Scheitel empor und brechen in Folge dessen nieder, wenn ihre Höhe im Scheitel und in dessen Nähe nicht grofs ist.

Erhalten sich Spitzbögen ohne grofse Uebermauerung, dann sind sie entweder im Scheitel so hoch, dafs die stetig gekrümmte Stützlinie, die der zu stützenden Masse zugehört, noch in die Masse des Stützbogens fällt, oder die Bindefähigkeit des Mörtels gestattet eine Stützungsrichtung, die aufserhalb des eigentlichen Stützbogens liegt.

Die grofse Mehrzahl der Stützbögen von bestehenden Brücken ist rundbogenförmig ausgeführt, doch ist daraus keineswegs die Folgerung zu ziehen, es sei diefs im klaren Bewusstsein der oben stehenden Gesetze geschehen. Jedenfalls hat man die Rundbogenform, namentlich für Strombrücken, nur wegen der gröfsern Spannweite gewählt, die sie, im Vergleich mit der Spitzbogenform, selbst bei geringer Ueberbrückungshöhe herzustellen gestattet; denn bei überbrückten Höhen, welche die Anwendung von Spitzbögen gestatten, finden wir diese noch in der neuesten Zeit angewendet.

Die Rundbogenform selbst, die einem Stützbogen gegeben werden kann, ist manchfaltig abzuändern. Die gangbarste Form ist die kreisbogenförmige, nicht wegen der Vortheile, die sie in Beziehung auf die Stützungsfähigkeit bietet, sondern wegen ihrer bequemen Darstellung in der Zeichnung, wegen der Leichtigkeit der Anfertigung kreisförmiger Lehrbögen, und ferner wegen der Gewöhnung an diese Form. Die vorgeblich von der Erfahrung entlehnte Meinung, ein kreisförmiger Stützbogen gewähre die gröfste Zuverlässigkeit mit Hinsicht auf Stützung, ist in ihrer Allgemeinheit eben so irrig, als der von Künstlern gemachte Schlufs: Was schön ist, das ist auch zweckmäfsig; weil nun halbkreisförmige Wölb- oder Stützbögen die schönste Form geben, so müssen sie auch die zweckmäfsigsten sein.

Aufser der Kreisbogenform sind bei Stützbögen noch elliptische, parabolische und dergleichen Formen üblich, auch setzt man sie aus Kreisstückbögen, eine unter der Benennung Korblinie bekannte Form, zusammen. Die eine Form mag der Erreichung eines gewissen Zweckes förderlicher sein, als die andere, aber in Beziehung auf besondere Stützungsfähigkeit ist im Allgemeinen keine vorzüglicher, als eine andere. Was die oft gerühmten guten Eigenschaften der Korblinie für Brückenbögen insbesondere anlangt, so sind sie nicht wahrhaft erweislich; die Korblinien sind nur Stellver-

treter elliptischer Linien und diesen höchstens der leichtern bildlichen Darstellung halber vorzuziehen.

Jeder vorgeschriebene Wölbbogen, dessen mittlere Richtung flacher als ein gleich weit spannender Halbkreis ist, giebt mehr, dagegen jeder Wölbbogen, der bei gleicher Spannweite mit einem Halbkreise diesen übersteigt, giebt weniger Schub und auch weniger Druck in der Richtung des Wölbbogens, als ein halbkreisförmiger. Sieht man von der Schönheit der Formen ab, dann werden die Stützbögen um so flacher zu wählen sein, je mehr Oeffnung man zwischen den Pfeilern und Bögen bei einer gegebenen Ueberbrückungshöhe herstellen oder je weniger Material man zur Anfertigung der Bögen verwenden will. Kommt aber die Gröfse des Bogenschubs oder der Druck in der Richtung eines Stützbogens, etwa wegen geringer Festigkeit des Baumaterials, in Erwägung, dann wird man Stützbögen nehmen müssen, die den gleich weit spannenden Halbkreis um so mehr zu übersteigen haben, je kleiner der Bogenschub und je kleiner der Bogendruck werden soll.

Die vorgeschriebene Form eines Stützbogens bedingt eine Stützungsrichtung, die im Allgemeinen (Seite 313) nur in der Scheitelnähe eine freie Stützlinie der zu stützenden Massen ist. Damit der Stützbogen ferner in seiner Richtung stütze, ist eine Hintermauerung erforderlich, welche die hierzu nöthige horizontale Hinterstützung gewährt. Eine diese Bedingung erfüllende Hintermauerung wird aber für die Bogenmasse überflüssig sein, wenn der Stützbogen selbst eine Richtung hat, die mit einer freien Stützlinie der zu stützenden Massen zusammenfällt. Eine solche nun ist für jede lichte Spannweite und lichte Höhe, sowie für jede Scheitelhöhe herzustellen (m. s. Seite 247). Flache Kreisbögen oder Kreisstichbögen nähern sich unter Umständen dieser Form sehr und können oft als Stellvertreter frei stützender, d. h. solcher Bögen genommen werden, welche die Stützung allein in ihrer Richtung bewirken. Den Stützbögen die Gestalt frei stützender Bögen zu geben, empfiehlt sich ganz besonders dann, wenn das hinter und über die Bögen zu bringende Material nicht fähig ist, einem vorgeschriebenen Bogen die nöthige horizontale Hinterstützung zu gewähren.

7) Regeln zur Auffindung der Stützlinie eines gegebenen kreisbogenförmigen Brückenbogens mit massiver Hintermauerung und Ueberfüllung.

Der mit einer kreisbogenförmigen innern Wölblinie versehene Brückenbogen, dessen Stützlinie gefunden werden soll, sei Fig. 108. Das practische Verfahren, durch das die Richtung der Stützung gefunden wird, ist folgendes:

a) Die Scheitelhöhe AB des gegebenen Brückenbogens wird durch den Radius der innern Wölblinie dividirt und der Quotient statt h in die bereits auf Seite 199 angeführten Gleichungen

$$x_{10} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}00003820 + 0{,}01507685\,h\right\};$$

$$x_{20} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0005769 + 0{,}05842889\,h\right\};$$

$$x_{30} = \frac{wr}{C}\left\{0{,}0026742 + 0{,}125\,h\right\};$$

$$x_{40} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0074461 + 0{,}2065880\,h\right\};$$

$$x_{50} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0153656 + 0{,}2934121\,h\right\};$$

$$x_{60} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0257168 + 0{,}375\,h\right\};$$

$$x_{70} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0364769 + 0{,}441511\,h\right\};$$

$$x_{80} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0447796 + 0{,}4849232\,h\right\};$$

$$x_{90} = \frac{wr^3}{C}\left\{0{,}0479351 + 0{,}5\,h\right\}.$$

eingesetzt.

b) Die Zahlenwerthe aller dieser Gleichungen werden mit einem beliebigen Factor multiplicirt, so dafs z. B. für eine halbkreisförmige innere Wölblinie der Zahlenfactor der Gleichung x_{90} in nahe 1 übergeht.

c) Die innere Wölblinie *AC* wird vom Scheitel *A* aus von 10 zu 10^0 getheilt und durch die so erhaltenen Theilpuncte werden Perpendikel 1, 2, 3 ... gefällt.

d) Nachdem für die Länge des Radius der innern Wölblinie, diesen als 1 genommen, ein tausendtheiliger Maafsstab gefertigt ist, nimmt man die mit dem Verfahren unter *b* erhaltenen Zahlen als Maafse von diesem Maafsstabe ab, trägt sie von einer Horizontale *TN* aus, die durch den Mittelpunct *T* der halben Scheitelhöhe des Stützbogens gelegt ist, auf die Perpendikel durch 1, 2, 3, 4 ... und führt durch die so gefundenen Puncte eine stetig gekrümmte Linie, die wir die vorläufige freie Stützlinie nennen.

e) Durch die nach *d* bestimmten Puncte, wie b_1, d_1, der vorläufigen freien Stützlinie werden bis zum Perpendikel durch *T* Horizontalen gezogen, durch die Anschnittspuncte b_2, d_2 werden aus *T* Kreisbögen b_2b_3, d_2d_3 ... bis zu einer Geraden *TM* geführt, die Chorden b_2b_3, d_2d_3 ... derselben von der Horizontale *TN* aus durch den Scheitel *T* auf die zugehörenden Perpendikel aufgetragen oder ab = Chorde b_2b_3, cd = Chorde d_2d_3 ... gemacht und durch die so bestimmten Puncte b_1, d_1 ... P_1, O_1 eine krumme Linie gelegt, die ebenfalls eine freie Stützlinie der gegebenen Massenanordnung ist.

f) Dadurch, dafs man den Schenkel *MT* des Proportionalwinkels *MTD* dem Schenkel *TD* näher oder entfernter legt, läfst sich mit dem unter *e* genannten Verfahren eine freie Stützlinie herstellen, die vom Mittelpuncte *T* der Scheitelhöhe des Stützbogens aus innerhalb des Stützbogens liegt und die mittlere Wölblinie des letztern in einem Puncte *P* tangirt. Diese Linie, die leicht durch Anwendung des unter *e* beschriebenen Verfahrens bestimmt werden kann, ist die gesuchte freie Stützlinie, in deren Richtung sich

die Bogenmasse vom Scheitel T bis zum Puncte P auf der einen und ebenso auf der andern Seite, bei regelrechter Beschaffenheit und Schliefsung des Stützbogens, stützt.

g) Ist der Stützbogen von P ab angemessen hintermauert, dann geschieht von hier aus die Stützung in der Richtung der mittlern Wölblinie bis zur Vertikale durch den Endpunct C der innern Wölbline, wobei Horizontalschub von P bis E hin gegen EQ abgesetzt werden mufs. Von E aus erfolgt die Stützung in der Richtung der Tangente EE_1.

h) Der Scheiteldruck in T oder der Horizontalschub, den ein Bogen Fig. 108 übt, bleibt derselbe, dessen Stützung mag von P aus in der Richtung der mittlern Wölblinie PE unter Absetzung von Horizontaldruck oder in der Richtung der freien Stützlinie PO_1 geschehen. Der Horizontaldruck selbst wird gefunden, wenn man in die allgemeine Gleichung, welche der Bestimmung eines Punctes der vorläufigen freien Stützlinie zum Grunde liegt, die entsprechende Abscisse der Linie der Stützung einsetzt und auf C reducirt. Liegt der Punct O_1 in einem Perpendikel, das vom Scheitel der innern Wölblinie um 90^0 absteht, dann ist (m. s. Seite 381)

$$C = \frac{wr^3}{QO_1}(0{,}0479351 + 0{,}5\,h)$$

Läge dagegen O_1 in einem Perpendikel, dessen Abstand vom Scheitel A der innern Wölblinie 50^0 umfasste, dann wäre nach Seite 381

$$C = \frac{wr^3}{QO_1}(0{,}0153656 + 0{,}2934121\,h).$$

i) Der Stützbogen Fig. 108 kann sich bei C gegen einen etwas nachgebenden Pfeiler anlehnen. Besteht diese Voraussetzung, dann bildet sich ein geringerer Bogenschub oder Horizontaldruck im Scheitel als jener ist, der bei regelrechter Beschaffenheit statt hat. Als Kleinstes des so entstehenden Bogenschubs wird man im Allgemeinen jenen annehmen müssen, der entsteht, wenn die Stützung

in der Richtung einer freien Stützlinie FE erfolgt, die durch den Scheitel F der äufsern Wölblinie geht und die innere in einem Puncte H berührt. Die Auffindung dieser geschieht auf folgende Weise: Man trägt die vorläufige freie Stützlinie vom Scheitel F der äufsern Wölblinie an und bestimmt aus derselben nach e jene freie Stützlinie, welche die innere in einem Puncte H tangirt. Den Bogenschub oder Horizontaldruck, den die Stützung in dieser Richtung bedingt, findet man ebenso, wie diefs unter h angegeben ist.

k) Der Krümmungshalbmesser oder der Radius ϱ jenes Kreises, mit welchem die Linie eines Brückenbogens im Scheitel gleiche Krümmung hat oder zusammenfällt, wird aus der Gleichung (m. s. Seite 51)

$$\varrho = \frac{C}{rhw}$$

gefunden, in welcher C den Scheiteldruck und rh die gesammte Bogenhöhe im Scheitel darstellt.

l) Der Winkel α_n, den die Richtung der freien Stützlinie in irgend einem Puncte b mit einer horizontalen Linie einschliefst, ist aus der Gleichung (m. s. Seite 15)

$$tg\,\alpha_n = \frac{W}{C}$$

zu bestimmen, in welcher C den Horizontalschub und W das Bogengewicht darstellt, das zwischen der Vertikale durch den Scheitel A und jener durch b enthalten ist.

m) Der Richtungswinkel ψ der mittlern Wölblinie in einem Puncte, z. B. in E, der vertikal über C liegt, wird aus der Gleichung

$$\sin\psi = \frac{r}{R}\sin\mu$$

gefunden, in welcher r den Radius der innern, R den Radius der mittlern Wölblinie und μ den Bogen der innern Wölblinie in Gradmaafs darstellt, der zwischen dem Scheitel A und dem Perpendikel durch den Punct E oder C liegt.

n) Der Druck D_n, der in einem Puncte einer freien Stützlinie stattfindet, deren Richtung daselbst mit einer Horizontale den Winkel α_n einschliefst, ist durch die Gleichung

$$D_n = \frac{C}{\cos \alpha_n}$$

gegeben (m. s. Seite 16, III).

o) Den Druck D_n, der in einem Puncte der mittlern Wölblinie stattfindet, wo sie als vorgeschriebene Stützlinie mit horizontaler Hinterstützung wirkt, und wo ihre Richtung mit einer Horizontale den Winkel ψ einschliefst, giebt (m. s. Seite 40, II) die Formel

$$D_n = \frac{W}{\sin \psi},$$

wenn W das Gewicht zwischen diesem Puncte und dem Scheitel darstellt.

p) Soll der mit einer kreisförmigen innern Wölblinie versehene Stützbogen Fig. 108 durchgängig in der Richtung einer freien Stützlinie stützen, dann ist dessen äufsere Wölblinie so zu gestalten, dafs die gefundene freie Stützlinie nahe die Mittellinie zwischen dieser und der innern Wölblinie bildet, wie diefs die Figur auf der rechten Bogenhälfte angiebt.

Die vorstehenden als Regeln aufgestellten Sätze sind, aufser wo ihre Abstammung angemerkt ist, dem 19. Abschnitte über die Bestimmung der freien Stützlinie entlehnt. Zur weitern Erhärtung wollen wir dieselben auf zwei besondere Fälle anwenden.

Erstes Beispiel. Der Radius der innern Wölblinie eines halbkreisförmigen Stützbogens sei $r = 27,5$ Ellen, die durchaus gleiche Höhe des Stützbogens sei 2 Ellen und die Gesammthöhe des Brückenbogens im Scheitel sei 4 Ellen. Es sollen die Grenzpuncte, bis zu welchen hin der Stützbogen in der Richtung einer freien Stützlinie wirkt, es soll der Horizontalschub oder Scheiteldruck, es soll die Gröfse und Richtung des gesammten Bogenschubs etc. etc. gefunden werden.

Nach *a* ist die Scheitelhöhe des Bogens für den Radius 1 der innern Wölblinie

$$h = \frac{4}{27,5} = 0,145$$

und für die Abscissen erhält man:

$$x_{10} = 0,002224 \frac{r^3 w}{C}; \quad x_{20} = 0,009049 \frac{r^3 w}{C};$$

$$x_{30} = 0,020799 \frac{r^3 w}{C}; \quad x_{40} = 0,037402 \frac{r^3 w}{C};$$

$$x_{50} = 0,057910 \frac{r^3 w}{C}; \quad x_{60} = 0,080092 \frac{r^3 w}{C};$$

$$x_{70} = 0,100496 \frac{r^3 w}{C}; \quad x_{80} = 0,115092 \frac{r^3 w}{C};$$

$$x_{90} = 0,120435 \frac{r^3 w}{C}.$$

Nach *b* sind die Zahlenwerthe der vorstehenden Gleichungen mit irgend einem Factor zu multipliciren, den wir zu 10 annehmen wollen. Mit Weglassung des Factors $\frac{r^3 w}{C}$ ergiebt sich so

$$x_{10} = 0,02224; \quad x_{20} = 0,09049; \quad x_{30} = 0,20799;$$
$$x_{40} = 0,37402; \quad x_{50} = 0,57910; \quad x_{60} = 0,80092;$$
$$x_{70} = 1,00496; \quad x_{80} = 1,15092; \quad x_{90} = 1,20435.$$

Nachdem, wie *c* vorschreibt, die innere Wölblinie *AC* Fig. 108 in 9 gleiche Theile getheilt, durch die Theilpuncte Perpendikel 1, 2, 3, 4, ... 8, 9 geführt sind, für den Radius der innern Wölblinie als Einheit ein tausendtheiliger Maafsstab gefertigt und durch den Mittelpunct der Scheitelhöhe des Stützbogens eine Horizontale *TN* geführt ist, nimmt man, gemäfs *d*, die letztgefundenen Zahlenwerthe für x_{10}, x_{20}, x_{30}, ... x_{90} vom Maafsstabe ab, trägt sie auf einander folgend von *TN* aus auf die Perpendikel 1, 2, 3 ... und stellt durch Verbindung aller dieser Puncte die vorläufige freie Stützlinie *TO* her.

Gemäfs der Vorschrift, die *e* giebt, in Verbindung mit der unter

f, sind von den einzelnen Puncten der vorläufigen freien Stützlinie Perpendikel auf *TD* zu fällen und durch alle diese Puncte aus *T* Kreisbögen bis zu einer Linie *TM* zu ziehen. Damit die Chorden der eben genannten Bögen auf einander folgend von *TN* aus auf die Perpendikel 1, 2, 3, 4, ... 8, 9 getragen, die Linie der Bogenstützung geben, nämlich jene freie Stützlinie, die sich von *T* aus über die mittlere Wölblinie erhebt und letztere in einem Puncte *P* tangirt, ist der Proportionalwinkel *TDM* nach Maafsgabe der Figur zu gestalten.

Der sich herausstellende Punct *P*, in welchem die freie Stützlinie die mittlere Wölblinie tangirt, liegt zwischen den Perpendikeln 5 und 6. Ohne erheblichen Fehler kann derselbe im Perpendikel 6 liegend angenommen werden, so dafs auf beiden Seiten des Scheitels die Stützung der Wölbmasse in einer freien Stützlinie bis zu Perpendikeln reicht, die vom Scheitel der innern Wölblinie um 60 Grad abstehen.

Damit von *P* ab die wesentliche Stützung in der Richtung des Stützbogens erfolgen kann, mufs derselbe vom Kämpfer aus bis zu eben diesem Puncte *P* angemessen und überhaupt so hintermauert sein, dafs hiermit die geforderte Hinterstützung für den sich absetzenden Horizontaldruck geboten wird.

Nach der Vorschrift unter *h* ist der Horizontaldruck, weil die Abscisse QO_1 des Endpunctes O_1 der freien Stützlinie auf dem zugehörenden tausendtheiligen Maafsstabe gemessen $0{,}708\,r = 0{,}708 \times 27{,}5$ beträgt,

$$C = \frac{wr^3}{0{,}708\,r}\,(0{,}120435) = 0{,}17011\,wr^2 = 128{,}65\,w.$$

Die Stützlinie, die nach *i* den kleinsten Horizontalschub bedingt, ist *FHG* und DTM_1 der Proportionalwinkel, der zu ihrer Herleitung aus der vorläufigen freien Stützlinie gebraucht werden mufs. Der Berührungspunct *H* eben dieser Stützlinie mit der innern Wölblinie steht vom Scheitel der letztern, zufolge der Zeichnung, um 60^0 ab. Für eben diese Stützlinie ist der Horizontalschub, weil ihr Endpunct *G* von ihrem Scheitel *F* den vertikalen Abstand $GR = 0{,}856\,r$ hat,

$$C_1 = \frac{wr^3}{0{,}856\,r}\,(0{,}120435) = 0{,}1407\,wr^2 = 106{,}40\,w.$$

Die Gleichung unter k giebt den Krümmungshalbmesser der freien Stützlinie der Bogenmasse im Scheitel zu

$$\varrho = \frac{128,65\,w}{4\,w} = 32,16 \text{ Ellen.}$$

Dagegen ist der Krümmungshalbmesser der Stützlinie FHG

$$\varrho_1 = \frac{106,40\,w}{4\,w} = 26,6 \text{ Ellen.}$$

Für den Richtungswinkel α_n, den der Endpunct O_1 der freien Stützlinie TPO_1 in O_1 mit einer Horizontale bildet, ist nach l

$$tg\,\alpha_n = \frac{W}{C},$$

folglich auch

$$cotg\,\alpha_n = \frac{C}{W}.$$

Nun ist das Gewicht der Bogenmasse zwischen dem Scheitel A und der Vertikale durch C für die Tiefe 1

$$\left\{(27,5 + 4)\,27,5 - \frac{27,5^2\pi}{4}\right\} w = 272,29\,w,$$

mithin

$$cotg\,\alpha_n = \frac{128,65\,w}{272,29\,w} = 0,47247;\ \alpha_n = 64^0\,43'.$$

Für $O_1S = 1$ und $SS_1 = 0,472$ giebt die Linie $S_1O_1O_2$ die gesuchte Tangente O_1O_2 des Endpunctes O_1 der freien Stützlinie TPO_1.

Die Tangente EE_1 des Punctes E der mittlern Wölblinie in der Vertikale durch den Endpunct C der innern Wölblinie ist leicht durch Construction zu bestimmen, weil sie winkelrecht auf dem Radius ED steht.

Für den Winkel α_n ferner, den die freie Stützlinie FHG in ihrem Endpuncte G mit einer Horizontale einschliefst, erhält man endlich

$$cotg\,\alpha_n = \frac{106,40\,w}{272,29\,w} = 0,39076;\ \alpha_n = 68^0\,39'.$$

Die Tangente GG_1 selbst wird gefunden, wenn man $GU = 1$, $UU_1 = 0{,}391$ macht und U_1 mit G verbindet.

Nach *n* ist der Druck, der im Endpuncte O_1 der freien Stützlinie TPO_1 nach der Richtung der Tangente O_1O_2 stattfindet,

$$D_n = \frac{128{,}65\,w}{\cos 64^0\,43'} = 301{,}22\,w.$$

Ebenso ergiebt sich der Druck in der Richtung der Tangente GG_1 vom Endpuncte G der freien Stützlinie FHG zu

$$D_n = \frac{106{,}40\,w}{\cos 68^0\,39'} = 292{,}26\,w.$$

Zufolge *m* ist der Richtungswinkel ψ der mittlern Wölblinie im Durchschnittspuncte E mit der Vertikale durch den Endpunct C der innern Wölblinie

$$\sin\psi = \frac{27{,}5}{29{,}5}\sin 90^0;$$

und nach *o* der Druck in der Richtung der Tangente EE_1 des Endpunctes E der mittlern Wölblinie, wenn die Stützung des Bogens zwischen P und E in der Richtung der mittlern Wölblinie des Stützbogens als vorgeschriebene Stützlinie erfolgt

$$D_n = \frac{W}{\sin\psi} = \frac{272{,}29\,w \times 29{,}5}{27{,}5} = 292{,}09\,w.$$

Damit der Stützbogen auch von P aus in der Richtung der freien Stützlinie die Bogenmasse zu stützen vermöge, ist nach *p* die äufsere Wölblinie zwischen P und O_1 so zu gestalten, wie diefs in der rechten Bogenhälfte auf Figur 108 angedeutet ist.

Zweites Beispiel. Für den Brückenbogen Fig. 109 sei die ganze Scheitelhöhe 1 Meter, die innere Wölblinie im Kreisstichbogen AC mit dem Radius 19,4 Meter; es umfasse die Länge des Bogens AC 30 Grade; ferner reiche der Stützbogen bis zur horizontalen Brückenbahn empor und sei durchgängig massiv hintermauert oder ein Kubikmeter des Raumes zwischen der innern Wölblinie und der Brückenbahn habe allenthalben das Gewicht *w*. Für den eben bezeichneten Brückenbogen soll die Stützlinie, der Scheiteldruck,

der Schub am Anfange des Stützbogens und die Richtung des Schubs eben daselbst bestimmt werden.

Die Scheitelhöhe des Bogens, bezogen auf den Radius 1 der innern Wölblinie, ist

$$h = \frac{1}{19,4} = 0,05208.$$

Diesen Werth in die Formeln für x_{10}, x_{20}, x_{30} auf Seite 381 gesetzt, giebt

$$x_{10} = 0,0008236 \frac{wr^3}{C}; \quad x_{20} = 0,00362 \frac{wr^3}{C}; \quad x_{30} = 0,0091696 \frac{wr^3}{C}.$$

Die Zahlenfactoren dieser Gleichungen mit $\frac{100}{2}$ multiplicirt und den allgemeinen Factor $\frac{wr^3}{C}$ weggelassen, so erhält man

$$x_{10} = 0,04117; \; x_{20} = 0,181; \; x_{30} = 0,458.$$

Diese Werthe von einem tausendtheiligen Maafsstabe, dessen Einheit der Radius der innern Wölblinie ist, abgenommen, von der Horizontale *TN* aus durch den Mittelpunct der Scheitelhöhe auf die Perpendikel 1, 2, 3 getragen, welche die innere Wölblinie von 10 zu 10 Grad theilen und die so gefundenen Puncte durch eine stetig gekrümmte Linie verbunden, giebt die vorläufige freie Stützlinie *TO*. Von den bestimmten Puncten der letztern Perpendikel auf *BD* gefällt, durch die Anschnittspuncte aus *T* Kreisbögen bis zur Linie *TM* geführt, die Chorden dieser Bögen auf die entsprechenden Perpendikel 1, 2, 3 getragen und durch die erhaltenen Puncte eine stetig gekrümmte Linie TO_1 gezogen, giebt die gesuchte Stützlinie, wenn O_1 in der mittlern Wölblinie liegt, was dadurch erhalten wird, dafs man die Chorde des Bogens *DM* gleich QO_1 macht. Die in vorbemerkter Weise bestimmte freie Stützlinie TO_1 erhebt sich zwischen *T* und O_1 über die mittlere Wölblinie.

Der lothrebhte Abstand QO_1 des Endpunctes O_1 der freien Stützlinie von ihrem Scheitel *T* beträgt, auf dem Maafsstabe gemessen, 0,117 *r*. Hiernach ist der Scheiteldruck

$$C = \frac{0,0091696\, wr^3}{0,117\, r} = 0,078373\, wr^2 = 29,496\, w.$$

Das Gewicht des Bogens zwischen den Perpendikeln durch A und C beträgt für die Tiefe 1

$$W = \left\{ (AB + r - r \cos 30^0)\, r \sin 30^0 - \frac{r}{2} (\widehat{30^0} - \sin 30^0 \, sos\, 30^0) \right\} w,$$

$$W = r^2 w \left\{ (0{,}05208 + 1 - \cos 30^0)(\sin 30^0 - \tfrac{1}{2} (\widehat{30^0} - \tfrac{1}{2} \sin 60^0) \right\}$$

$$W = r^2 w \left\{ 0{,}09303 - 0{,}04529 \right\} = 0{,}04774\, r^2 w.$$

Nach l ist für den Winkel α_n, den die freie Stützlinie in O_1 mit einer Horizontale einschliefst,

$$cotg\, \alpha_n = \frac{C}{W} = \frac{0{,}078373\, wr^2}{0{,}04774\, r^2 w} = 1{,}6417;\ \alpha_n = 31^0\, 21'.$$

Die Linie $O_1 R = 1$, $RS1 = 1{,}6417$ gemacht und S_1 mit O_1 verbunden, giebt die gesuchte Tangente $O_1 O_2$ des Endpunctes O_1 der freien Stützlinie TO_1.

Gemäfs n ist der Bogendruck in O_1

$$D_n = \frac{C}{\cos \alpha_n} = 34{,}539\, w.$$

Die Stützung der Masse eines Wölbbogens erfolgt nur dann vom Scheitel der mittlern Wölblinie des Stützbogens aus in einer freien Stützlinie, die der zu stützenden Massenanordnung entspricht und welche in ihrem Fortgange die mittlere Wölblinie tangirt oder wenn hierzu die letztere nicht lang genug ist, welche durch die Anfänge der mittlern Wölblinie geht, wenn der Bogen die hierzu erforderlichen Beschaffenheiten besitzt und vorfindet, d. h. wenn sich die Lagerflächen der Wölbsteine durchaus gleichmäfsig berühren, wenn der Stützbogen von den Berührungspuncten der freien Stützlinie aus mit der Wölblinie angemessen hintermauert ist und wenn das Widerlager des Bogens dem Bogenschub entspricht. Weicht das Widerlager auf der einen oder auf beiden Seiten, dann ändert sich die Stützlinie. Hierbei bricht der Bogen noch nicht nieder, wenn die Widerlager noch für eine freie Stützlinie Widerstand geben, die durch den höchsten Punct des Scheitels vom Stützbogen geht und welche die innere Wölblinie tangirt, oder wenn die letz-

tere für die Berührung nicht lang genug ist, die in den Anfangspunct der innern Wölblinie ausläuft.

Ueber die Richtung der Stützung eines Bogens durch den zugehörenden Stützbogen haben wir bereits umständlich im zwanzigsten Abschnitt, auf den wir jetzt zu verweisen haben, gehandelt.

8) Regeln zur Auffindung der Stützlinie eines gegebenen elliptischen Brückenbogens mit massiver Hintermauerung und Hinterfüllung.

a) Die Scheitelhöhe AB des gegebenen Brückenbogens Fig. 110 wird durch die vertikale Halbachse $B = AC$ der elliptischen Oeffnung dividirt und der Quotient statt h in die folgenden Gleichungen eingesetzt, in welchen $2A = D_1D$ die horizontale Achse der elliptischen Oeffnung darstellt.

$$x_{10} = \frac{A^2Bw}{C}\left\{0{,}00003820 + 0{,}01507685\,h\right\};$$

$$x_{20} = \frac{A^2Bw}{C}\left\{0{,}0005769 + 0{,}05842889\,h\right\};$$

$$x_{30} = \frac{A^2Bw}{C}\left\{0{,}0026742 + 0{,}125\,h\right\};$$

$$x_{40} = \frac{A^2Bw}{C}\left\{0{,}0074461 + 0{,}2065880\,h\right\};$$

$$x_{50} = \frac{A^2Bw}{C}\left\{0{,}0153656 + 0{,}2934121\,h\right\};$$

$$x_{60} = \frac{A^2Bw}{C}\left\{0{,}0257168 + 0{,}375\,h\right\};$$

$$x_{70} = \frac{A^2Bw}{C}\left\{0{,}0364769 + 0{,}441511\,h\right\};$$

$$x_{80} = \frac{A^2Bw}{C}\left\{0{,}0447796 + 0{,}4849232\,h\right\};$$

$$x_{90} = \frac{A^2Rw}{C}\left\{0{,}0479351 + 0{,}5\,h\right\}.$$

b) Aus dem Durchschnittspuncte C der Halbachsen A und B beschreibt man mit der Halbachse CD als Radius den Viertelkreis DE, theilt ihn in 9 gleiche Theile, führt durch die Theilpuncte Perpendikel 1, 2, 3, 4 ... 9, fertigt für die Halbachse CD als 1 einen tausendtheiligen Maafsstab und führt durch den Mittelpunct T der Scheitelhöhe des Stützbogens die Horizontale TN.

c) Die Zahlenwerthe der Gleichungen x_{10}, x_{20} ... werden mit einem Factor multiplicirt, der Reihe nach vom tausendtheiligen Maafsstabe abgenommen, von TN aus auf die Perpendikel 1, 2, 3 ... 9 getragen, die so gefundenen Puncte mit einer stetig gekrümmten Linie verbunden, und man hat die vorläufige freie Stützlinie DO des elliptischen Bogens.

d) Von den durch Constructiou gefundenen Puncten der vorläufigen freien Stützlinie DO werden Perpendikel auf TC gefällt, durch alle Anschnittspuncte aus T Kreisbögen bis zu einer Linie TM geführt, die Chorden der so gebildeten Bögen auf die entsprechenden Perpendikel 1, 2, 3 ... 9 von TN aus angetragen, die hierbei gefundenen Puncte abermals durch eine stetig gekrümmte Linie TO_1 verbunden und man hat wiederum eine freie Stützlinie der Bogenmasse. Die letztere ist die gesuchte freie Stützlinie, wenn sie, wie wir hier voraussetzen, die mittlere Wölblinie des Stützbogens in einem Puncte P tangirt, sich aber zwischen P und O_1 über die mittlere Wölblinie erhebt.

e) Vom Bogenanfange bis zum Puncte P hinauf, in welchem die durch den Mittelpunct T der Scheitelhöhe des Stützbogens gelegte freie Stützlinie die mittlere Wölblinie tangirt, mufs der Stützbogen angemessen hintermauert oder hinterstützt sein, soll die Stützung vom Berührungspuncte bis zum Scheitel in der freien Stützlinie TP, von P aus aber wesentlich in der Richtung der mittlern Wölblinie, unter Absetzung von Horizontaldruck, erfolgen.

f) Trägt man die vorläufige freie Stützlinie TO vom Scheitel G der äufsern Wölblinie des Stützbogens aus an und findet aus dieser, wie in d vorgeschrieben ist, mittels eines Pro-

portionalwinkels CTM_1 eine freie Stützlinie GHI, welche die innere Wölblinie in H tangirt, so hat man jene Stützungsrichtung, für welche, wenn das Widerlager bei D etwas nachgiebt, der Bogen noch bestehen kann.

g) Erfolgt die Stützung des Bogens vom Scheitel aus bis zum Berührungspuncte P hin in der Richtung der freien Stützlinie TPO_1, dann ist der Scheitel- oder Horizontaldruck

$$C = \frac{A^2Bw}{O_1Q}(x_{10}) = \frac{A^2Bw}{O_1Q}(0{,}047935 + 0{,}5\,h).$$

Ebenso ist der Scheiteldruck des Bogens, wenn die Stützung in der Richtung der freien Stützlinie GHI statt hat,

$$C_1 = \frac{A^2Bw}{IQ_1}(x_{10}) = \frac{A^2Bw}{IQ}(0{,}047935 + 0{,}5\,h).$$

h) Für den Winkel α_n, den die Richtung der freien Stützlinie TPO_1 in ihrem Endpuncte O_1 mit einer Horizontale einschliefst, besteht allgemein (m. s. Seite 15)

$$tg\,\alpha_n = \frac{W}{C} \text{ oder } cotg\,\alpha_n = \frac{C}{W},$$

wenn mit C der Scheiteldruck und mit W das Gewicht zwischen der Vertikale durch den Scheitel und der durch den Endpunct O_1 dargestellt wird. Für denselben elliptischen Bogen AD ist für die Tiefe 1

$$W = \left\{A(B + Bh) - \frac{AB\pi}{4}\right\} w = ABw\left\{1 + h - \frac{\pi}{4}\right\} = ABw\,(0{,}2146 + h),$$

also

$$cotg\,\alpha_n = \frac{C}{AB\,(0{,}2146 + h)\,w}.$$

Wenn hierin C_1 statt C gesetzt wird, so erhält man die Cotangente des Winkels, den die freie Stützlinie GHI in ihrem Endpuncte I mit einer horizontalen Linie bildet.

Mit Hülfe der Cotangente des Winkels α_n lässt sich auch die Richtung der Tangente des Punctes O_1 der freien Stützlinie TPO_1 selbst antragen, also die Richtung bestimmen, in welcher der gesammte Bogenschub von O_1 aus vertikal über dem Endpuncte der innern Wölblinie auf den zugehörenden Pfeiler oder das Widerlager übergeht.

Die Tangente FF_1 des Endpunctes F der mittlern Wölblinie des Stützbogens, wenn sie durchaus nahe gleich weit von der innern absteht, wird näherungsweise gefunden, wenn man die Linie FfC bis zur innern Wölblinie zieht, den Winkel pfp_1 halbirt und F_1F rechtwinklig gegen fq richtet. Die hierbei in Betrachtung kommenden Puncte p und p_1 liegen auf der horizontalen Achse $DD_1 = 2A$ und sind die Durchschnittspuncte eines aus dem Endpuncte A der lothrechten Halbachse CA mit der halben horizontalen Achse CD als Radius beschriebenen Kreisbogens.

i) Erfolgt die Stützung des Bogens von T bis P in der Richtung der freien Stützlinie TPO_1, von P aber entweder noch ferner in der freien Stützlinie TPO_1 oder in der Richtung PF der mittlern Wölblinie des Stützbogens, dann ist der gesammte Bogenschub in der Richtung der Tangente des Punctes O_1 wirksam (m. s. Seite 42) und seine Gröſse wird durch die Gleichung

$$D_n = \frac{C}{\cos \alpha_n}$$

gefunden.

Eben diese Formel dient zur Bestimmung des gesammten Bogenschubs, wenn die Stützung des Bogens in der Richtung der freien Stützlinie GHI vor sich geht, nur ist für diese der zugehörende Werth des α_n und C_1 statt C einzusetzen.

k) Der Krümmungshalbmesser der freien Stützlinie TPO_1 im Scheitel ist (m. s. Seite 47)

$$\varrho = \frac{C}{Bhw},$$

wenn C, wie bisher, den Scheiteldruck bei der bestehenden Stützungsrichtung, Bh die ganze Scheitelhöhe des Bogens und w das Eigengewicht der Masse Wölbbogens bezeichnet.

Die vorstehenden Regeln wollen wir auf einen elliptischen Brückenbogen Figur 110 anwenden, dessen lichte Spannweite $DD_1 = 60$ Fufs, dessen lichte Höhe $AB = 20$, dessen Scheitelhöhe $AB = 3$ und für welchen die Höhe des Stützbogens durchaus 2 Fufs betragen soll.

Zufolge der eben gemachten Annahme ist

die horizontale Halbachse $A = 30$ Fufs,

„ vertikale „ $B = 20$ „ ferner

$$h = \frac{3}{20} = 0{,}15.$$

Nach der Vorschrift unter a ist der Werth für h in die Gleichungen für x_{10}, x_{20} ... einzusetzen, wodurch sich ergiebt:

$$x_{10} = \frac{A^2B}{C} \,.\, 0{,}0022997; \quad x_{20} = \frac{A^2B}{C} \,.\, 0{,}0093412;$$

$$x_{30} = \frac{A^2B}{C} \,.\, 0{,}0214242; \quad x_{40} = \frac{A^2B}{C} \,.\, 0{,}0384343;$$

$$x_{50} = \frac{A^2B}{C} \,.\, 0{,}0593774; \quad x_{60} = \frac{A^2B}{C} \,.\, 0{,}0819668:$$

$$x_{70} = \frac{A^2B}{C} \,.\, 0{,}1027035; \quad x_{80} = \frac{A^2B}{C} \,.\, 0{,}1175181;$$

$$x_{90} = \frac{A^2B}{C} \,.\, 0{,}1229351.$$

Zufolge der Vorschrift unter b ist mit der horizontalen Halbachse CD ein Viertelkreis DE zu ziehen, in 9 gleiche Theile zu theilen und durch jeden Theilpunct ein Perpendikel zu fällen.

Gemäfs c sind die Werthe für x_{10}, x_{20} ..., unter Beseitigung des Factors

$$\frac{A^2B}{C},$$

mit einer Zahl zu multipliciren, welche für die graphische Darstellung der vorläufigen freien Stützlinie bequeme Zahlenwerthe liefert. Nehmen wir diesen Factor zu $\frac{100}{12}$ an, so erhalten wir:

$$x_{10} = 0{,}0192;\quad x_{20} = 0{,}0778;\quad x_{30} = 0{,}1785;$$
$$x_{40} = 0{,}3202;\quad x_{50} = 0{,}4948;\quad x_{60} = 0{,}68305;$$
$$x_{70} = 0{,}8558;\quad x_{80} = 0{,}9793;\quad x_{90} = 1{,}0244.$$

Ebenfalls nach *c* sind diese Zahlenwerthe von einem tausendtheiligen Maafsstabe, für welchen die horizontale Halbachse $CD = 1$ ist, abzunehmen, auf einander folgend von der Horizontale *TN* durch die halbe Scheitelhöhe des Stützbogens aus auf die Perpendikel 1, 2, 3 ... 9 anzutragen und, zur Erlangung der vorläufigen freien Stützlinie *TO*, durch eine stetig gekrümmte Linie zu verbinden.

Nach *d* sind von allen durch die Construction erhaltenen Puncten der vorläufigen freien Stützlinie Perpendikel auf die Lothrechte *TC* zu fällen, aus *T* durch die Anschnittspuncte Kreisbögen bis zu einer Linie *TM* zu legen, die Chorden der letztern auf die entsprechenden Perpendikel 1, 2, 3 ... 9 von der Horizontale *TN* aus aufzutragen und die gefundenen Endpuncte durch eine stetig gekrümmte TPO_1 zu verbinden. Der Schenkel *TM* des Proportionalwinkels *EDM* ist in Fig. 110 so gewählt, dafs die sich ergebende freie Stützlinie TPO_1 die mittlere Wölblinie in *P* zwischen den Perpendikeln 5 und 6, also in einem Abstande zwischen 50 und 60° vom Scheitel *E* des Viertelkreises *ED* tangirt. Demnach kann die Stützung der Bogenmasse zu beiden Seiten des Scheitels bis zu Puncten *P* in der Richtung einer freien Stützlinie geschehen, die in Perpendikeln liegen, welche zwischen 50 und 60° vom Scheitel *E* des Viertelkreises *DE* abstehen. Die fernere Stützung von *P* aus nach den Bogenanfängen hin kann in der Richtung PO_1 der freien Stützlinie TPO_1 oder auch in der Richtung der mittlern Wölblinie, also von *P* aus in der Richtung *PF* statthaben. Damit die letztere Stützungsrichtung eintreten kann, mufs, unter übrigens erforderlichen Beschaffenheiten, der Stützbogen bis zur Höhe *P* angemessen hinterstützt sein.

Die nach der Vorschrift unter *f* zu findende freie Stützlinie *GHI* fordert den Proportionalwinkel CTM_1. Die Chorden aller Bögen

zwischen den Schenkeln dieses Winkels sind auf die entsprechenden Perpendikel 1, 2, 3 ... 9 von der Horizontale durch G aufzutragen. Der Berührungspunct H der freien Stützlinie GHI fällt zwischen die Perpendikel 6 und 7, doch dürfte derselbe dem Perpendikel 6 näher als dem Perpendikel 7 liegen.

Nach g ist der Scheiteldruck, der aus der Stützung in der Richtung der Stützlinie TPO_1 für die Tiefe von 1 Fuſs entspringt, weil QO_1 auf dem tausendtheiligen Maaſsstabe gemessen 0,462, folglich

$$O_1Q = 0{,}462\,A \text{ beträgt,}$$

$$C = \frac{A^2Bw}{0{,}462\,A}(0{,}1229351) = 0{,}2661\,ABw = 159{,}66\,w.$$

Der Scheiteldruck für die Stützlinie GHI auf die Tiefe von 1 Fuſs ist ebenfalls nach g, und weil sich

$$IQ_1 = 0{,}613\,A$$

durch Messung ergiebt,

$$C_1 = \frac{A^2Bw}{0{,}613\,A}(0{,}1229351) = 0{,}2006\,ABw = 120{,}33\,w.$$

Gemäſs h erhält man für den Winkel α_n, den die Richtung der freien Stützlinie TPO_1 im Endpuncte O_1 mit einer Horizontale einschlieſst,

$$cotg\;\alpha_n = \frac{C}{ABw(0{,}2146 + 0{,}15)} = \frac{0{,}2661\,ABw}{0{,}3646\,ABw} = 0{,}7298;$$

$$\alpha_n = 53^0\,53'.$$

Macht man $O_1Q_1 = 1$, $Q_1R = 0{,}7298$ und verbindet R mit O_1, so hat man die gesuchte Tangente O_1O_2 des Endpunctes O_1 der freien Stützlinie, also die Richtung, in welcher der gesammte Bogenschub bei der Stützung in der freien Stützlinie TP auf das Widerlager oder den Pfeiler hinter O_1 übergeht.

Für die freie Stützlinie GHI ist der Richtungswinkel ihres Endpunctes I mit einer Horizontale ebenfalls nach g

$$cotg\;\alpha_n = \frac{C_1}{ABw(0{,}2146 + 0{,}15)} = \frac{0{,}2006\,ABw}{0{,}3646\,ABw} = 0{,}5501;$$

$$\alpha_n = 61^0\,11'.$$

Für $IQ = 1$ und $QS = 0{,}55$ giebt die Linie SI die Tangente II_1 des Endpunctes I der freien Stützlinie GHI, also die Richtung, in welcher der gesammte Bogenschub auf das Widerlager oder den Pfeiler hinter I übergeht, wenn die Stützung in der freien Stützlinie GHI vor sich geht.

Nach *i* ist der ganze Bogenschub, wenn vom Scheitel aus die Stützung in der freien Stützlinie TPO_1 statt hat,

$$D_n = \frac{C}{\cos \alpha_n} = \frac{159{,}66\,w}{\cos 53^0\,53'} = 270{,}87\,w,$$

und wenn die Stützung in der Richtung der freien Stützlinie GHI vor sich geht, der gesammte Bogenschub gegen den Pfeiler oder das Widerlager hinter I

$$D_n = \frac{C_1}{\cos \alpha_n} = \frac{120{,}33\,w}{\cos 61^0\,11'} = 249{,}65\,w.$$

Der Krümmungshalbmesser der freien Stützlinie TPO_1 in ihrem Scheitel T ist nach *k*

$$\varrho = \frac{C}{Bhw} = \frac{159{,}66\,w}{3\,w} = 53{,}66 \text{ Fufs}$$

und der Krümmungshalbmesser der freien Stützlinie GHI in ihrem Scheitel ist

$$\varrho_1 = \frac{C_1}{Bhw} = \frac{120{,}33\,w}{3\,w} = 40{,}11 \text{ Fufs.}$$

Die Linie, in der sich ein elliptischer Brückenbogen mit massiver Hintermauerung oder Hinterfüllung und Ueberkiefsung, wie die Figur 110 einen solchen andeutet, bei regelrechter Ausführung vom Scheitel des Stützbogens aus stützt, ist, zufolge des zwanzigsten Abschnittes, die freie Stützlinie TPO_1, welche durch den Mittelpunct der Scheitelhöhe des Stützbogens hindurchgeht und die mittlere Wölblinie in einem Puncte P tangirt. Von diesem Berührungspuncte P ab geht die Stützung in der Richtung der mittlern Wölblinie fort, wenn der Stützbogen von seinem Anfange aus bis P empor für den sich absetzenden Horizontaldruck angemessen hinterstützt oder hintermauert wird; sie geht aber von P in der Richtung der freien Stützlinie fort, wenn sich die Wölbung des Stützbogens zwischen

P und O_1 dergestalt erhebt, dafs die hieraus entstehende mittlere Wölblinie ebenfalls dem Theile PO_1 der Stützlinie nahe liegt.

9) Bestimmung der freien Stützlinie eines gegebenen beliebigen Brückenbogens.

Nicht immer haben Brückenbögen eine kreisförmige oder elliptische innere Wölblinie bei einer horizontalen Brückenbahn und bei gleichmäfsiger Erfüllung des Raumes zwischen der innern Wölblinie und der Brückenbahn mit gleich dichtem Material; vielmehr werden häufig die innern Wölblinien aus Kreisstückbögen von verschiedenen Radien gebildet oder als sogenannte Korbbögen gestaltet. Es kommen ferner auch Brücken vor, bei welchen der Raum zwischen dem Stützbogen und der Brückenbahn nicht mit gleich schwerem Material, oft auch nicht mit Material durchgängig erfüllt ist. Zur Bestimmung der freien Stützlinie für alle diese Fälle und für die hiervon abhängigen Elemente einer Brückenbogenstützung sind die nachfolgenden Regeln bestimmt, die, weil sie allgemeine Gültigkeit haben, auch für Bögen Anwendung finden, die einen Kreis- oder Ellipsenbogen zur innern Wölblinie haben und deren Raum zwischen der letztern und der horizontalen Brückenbahn mit gleich schwerem Material gleichmäfsig dicht erfüllt ist.

Der Brückenbogen, auf den wir die nachstehenden Regeln zur Ermittelung der freien Stützlinie beziehen wollen, sei Fig. 111. Die innere Wölblinie desselben sei AB, die Brückenbahn DM, die gesammte Scheitelhöhe AD und die Scheitelhöhe des Stützbogens AC. Die Regeln selbst, durch welche eine vorläufige freie Stützlinie und die davon abhängigen Gröfsen abgeleitet werden können, sind folgende:

a) Der horizontale Abstand L, den das Perpendikel durch den Scheitel A vom Anfangspuncte B der innern Wölblinie hat, wird in n gleiche Theile getheilt und durch jeden Theilpunct ein Perpendikel gefällt. Der horizontale Abstand von je zwei neben einander stehenden Perpendikeln ist somit

$$\left(\frac{L}{n}\right)$$

Je kleiner die Entfernung von je zwei neben einander stehenden Perpendikeln ist, um so genauer wird die vorläufige freie Stützlinie.

b) Die vertikale Länge der vorgenannten Perpendikel zwischen der innern Wölblinie und der Brückenbahn, also die Höhe der Massenschicht, die sie durchschneiden, wird auf dem Maafsstabe, der dem Brückenbogen zugehört, gemessen.

Die Höhe, die sich so für das Perpendikel durch den Scheitel A ergiebt, bezeichnen wir mit h_0, die der folgenden mit h_1, h_2, h_3 ,.. und das durch den Anfangspunct B der innern Wölblinie mit h_n. Ist das zwischen dem Stützbogen und der Brückenbahn liegende Material leichter als das erstere, oder befinden sich zwischen dem Stützbogen und der Brückenbahn nicht mit Material ausgefüllte Räume, dann wird man statt der eigentlichen Brückenbahn DM eine Linie $\lambda\lambda$ angeben können, zwischen welcher und dem Stützbogen ein mit dem letztern gleich schweres Material dicht gelagert anzunehmen ist, das eben so viel Gewicht hat als die bestehende Massenanordnung zwischen dem Stützbogen und der Brückenbahn DM. Die Darstellung der Hülfsbegrenzung $\lambda\lambda$ wird nöthig, wenn der Stützbogen mit Kiefs und Thonschlag überfüllt ist oder wenn auf dem Stützbogen Gurtmauern, sogenannte Spandrill-Walls, stehen, die, entweder mit Platten abgedeckt oder mit kleinen Bögen überspannt, die eigentliche Brückenbahn bilden.

Für die letztgenannten Fälle sind unter h_0, h_1, h_2 ... h_n nur jene Höhen zu begreifen, die zwischen der innern Wölblinie AB und der durch Construction gefundenen Begrenzung $\lambda\lambda$ liegen.

c) Für jeden besondern Fall werden folgende Summen aufgesucht:

$$s_1 = 1\left(\frac{h_0 + h_1}{2}\right);$$

$$s_2 = 2\left(\frac{h_0 + h_2}{2} + h_1\right);$$

$$s_3 = 3\left(\frac{h_0 + h_3}{2} + h_1 + h_2\right);$$

$$s_4 = 4\left(\frac{h_0 + h_4}{2} + h_1 + h_2 + h_3\right);$$

$$s_5 = 5\left(\frac{h_0 + h_5}{2} + h_1 + h_2 + h_3 + h_4\right)$$

u. s. f.

$$s_n = n\left(\frac{h_0 + h_n}{2} + h_1 + h_2 + h_3 \ldots + h_{n-1}\right)$$

Ferner

$$(s) = \left(\frac{h_0 + 2h_1}{6}\right);$$

$$(s_2) = \left(\frac{h_0 + 5\,h_2}{6} + 1\,h_1\right);$$

$$(s_3) = \left(\frac{h_0 + 8\,h_3}{6} + 1\,h_1 + 2\,h_2\right);$$

$$(s_4) = \left(\frac{h_0 + 11\,h_4}{6} + 1\,h_1 + 2\,h_2 + 3\,h_3\right);$$

$$(s_5) = \left(\frac{h_0 + 14\,h_5}{6} + 1\,h_1 + 2\,h_2 + 3\,h_3 + 4\,h_4\right);$$

u. s. f.

$$(s_n) = \left(\frac{h_0 + (3\,n - 1)\,h_n}{2} + 1\,h_1 + 2\,h_2 + 3\,h_3 \ldots + (n-1)\,h_{n-1}\right).$$

d) Aus den Summen unter *c* bildet man

$$M_1 = \left(\frac{L}{n}\right)^2 w\left\{s_1 - (s_1)\right\};\; M_2 = \left(\frac{L}{n}\right)^2 w\left\{s_2 - (s_2)\right\};$$

$$M_3 = \left(\frac{L}{n}\right)^2 w \left\{s_3 - (s_3)\right\};\ M_4 = \left(\frac{L}{n}\right)^3 w \left\{s_4 - (s_4)\right\};$$

u. s. f.

$$M_n = \left(\frac{L}{n}\right)^2 w \left\{ s_n - (s_n) \right\}.$$

e) Der lothrechte Abstand des Endpunctes B einer vorläufigen freien Stützlinie TB des Bogens Fig. 111 von ihrem Scheitel, also ihr Durchnittspunct mit dem Perpendikel durch den Anfangspunct der innern Wölblinie, ist beliebig grofs zu wählen und sei Z_n. Für dieselbe, nämlich für die vorläufige freie Stützlinie, erhält man nun die Abstände in den Perpendikeln 1, 2, 3 ... n — 1 von der durch den Scheitel gezogenen Horizontale zu

$$Z_1 = \frac{Z_n}{M_n} . M_1;$$

$$Z_2 = \frac{Z_n}{M_n} . M_2;$$

$$Z_3 = \frac{Z_n}{M_n} . M_3;$$

$$Z_4 = \frac{Z_n}{M_n} . M_4$$

u. s. f.

$$Z_{n-1} = \frac{Z_n}{M_n} . M_{n-1}.$$

Die Zahlenwerthe Z_1, Z_2, Z_3, . . . Z_{n-1} werden von der Horizontale TN durch den Mittelpunct T der Scheitelhöhe aus auf die Perpendikel 1, 2, 3, 4 ... n — 1 aufgetragen und die gefundenen Puncte durch eine stetig gekrümmte Linie TB verbunden, welche die vorläufige freie Stützlinie giebt.

f) Von den durch Construction gefundenen Puncten der vorläufigen freien Stützlinie TB werden Perpendikel auf AE

gefällt, durch die Anschnittspuncte E, G ... aus dem Scheitel T der vorläufigen freien Stützlinie bis zu einer Linie TF Kreisbögen EF, GH ... beschrieben, die Chorden dieser auf die zugehörenden Perpendikel von der Horizontale TN aus angetragen oder

$$\text{Chorde } EF = NO,$$
$$\text{,, } GH = Q_1Q \text{ u. s. f.}$$

gemacht, die so gefundenen Puncte durch eine stetig gekrümmte Linie TQO verbunden und man hat abermals eine freie Stützlinie der gegebenen Massenanordnung. (M. s. Seite 204.)

Der Schenkel TF des Proportionalwinkels ETF kann immer so gewählt werden, dafs die mit dessen Hülfe abgeleitete freie Stützlinie TQO vom Scheitel T aus nahe über der mittlern Wölblinie vorbeigeht und sie in der Fortsetzung tangirt oder, dafern das Letztere nicht geschehen kann, dafs die entstehende freie Stützlinie doch am innigsten mit der mittlern Wölblinie zusammenfällt. Eine freie Stützlinie von dieser Beschaffenheit giebt nach Abschnitt zwanzig die Richtung, in welcher sich die Masse des Brückenbogens stützt, dafern diefs vermöge der Beschaffenheit der Widerlagsverhältnisse und der Dimensionen des Stützbogens überhaupt möglich ist.

g) Giebt das Widerlager am Anfange des Stützbogens nach, dann ist der Stand des letztern noch nicht gefährdet, dafern das Wölbmaterial fest genug ist, wenn jenes, nämlich das Widerlager, die Stützung der Wölbmasse in der Richtung einer freien Stützlinie CKK_1 gestattet, deren Scheitel mit dem Scheitel C der äufsern Wölblinie zusammenfällt und die in ihrer Fortsetzung die innere Wölblinie in einem Puncte K berührt. Der Horizontalschub oder Scheiteldruck, der aus dieser Stützungsrichtung entspringt, kann überhaupt als der geringste angesehen werden, bei welchem das Bestehen des Stützbogens noch nicht gefährdet ist, wenn durch eben diese Stützungsrichtung das Wölbmaterial bei C und K nicht zerdrückt wird.

Zur Herstellung der freien Stützlinie CKK_1 zieht man durch C eine Horizontale CN_1, vergröfsert den frühern Proportionalwinkel ETF zu ETF_1, trägt die Chorden der Bögen EF_1, GH_1 . . . auf die zugehörenden Perpendikel von der Horizontale CN_1 aus an, d. h. man macht

$$\text{Chorde } EF_1 = N_1K_1,$$
$$\text{,, } GH_1 = Q_2K \text{ u. s. f.}$$

Die gehörige Gröfse des Proportionalwinkels ETF_1 zur Bestimmung einer freien Stützlinie, welche von C ausgehend die innere Wölblinie in einem Puncte K berührt, ist durch einige Versuchsconstructionen leicht zu ermitteln.

h) Den Horizontal- oder Scheiteldruck, der bei der Stützung der Wölbbogenmasse in der freien Stützlinie TQO für die Tiefe 1 entsteht, giebt, in Beziehung auf die Fig. 111, die Gleichung

$$C = \frac{M_n}{(NO)}$$

Ebenso ist der Horizontaldruck im Scheitel, wenn die Stützung der Wölbbogenmasse in der Richtung der freien Stützlinie CKK_1 statt hat, mit Hinsicht auf die Figur

$$C_1 = \frac{M_n}{(N_1K_1)}$$

i) Für das Eigengewicht w eines Kubikfufses oder einer Kubikelle, je nachdem ein Fufs oder eine Elle als Längenheit angenommen wird, ist das Gewicht des Wölbbogens Fig. 111 für die Tiefe von 1 Fufs oder 1 Elle zwischen den Perpendikeln h_0 und h_n durch den Scheitel A und durch den Anfangspunct B der innern Wölblinie

$$W = \left(\frac{L}{n}\right) w \left\{\frac{h_0 + h_n}{2} + h_1 + h_2 + h_3 \ldots h_{n-1}\right\}.$$

k) Für den Winkel α_n, den die Richtung der freien Stützlinie TQO in ihrem Endpuncte O mit einer Horizontale einschliefst, besteht (m. s. Seite 15) die Gleichung

$$cotg\,\alpha_n = \frac{C}{W}.$$

Dieselbe Gleichung dient zur Bestimmung des Richtungswinkels, den jede andere freie Stützlinie des Bogens bei ihrem Durchschnitt mit der Vertikale durch den Anfangspunct B der innern Wölblinie mit einer Horizontale einschließt, nur muſs der der Stützlinie, für welche das α_n gelten soll, zugehörende Horizontal- oder Scheiteldruck statt C in die letzte Gleichung eingesetzt werden.

l) Der gesammte Bogenschub gegen die Vertikale durch den Bogenanfang, der entsteht, wenn sich die Bogenmasse wenigstens vom Scheitel aus und in dessen Nähe in der Richtung der freien Stützlinie TQO stützt, wird durch die Gleichung (m. s. Seite 16)

$$D_n = \frac{C}{\cos\alpha_n}$$

gefunden, in welcher C und α_n in der vorigen Bedeutung für die Stützung in der Linie TOQ zu nehmen sind.

m) Der Krümmungshalbmesser einer freien Stützlinie FQO in ihrem Scheitel T ist (m. s. Seite 27, II)

$$\varrho = \frac{C}{Hw},$$

wenn C den der Stützlinie zugehörenden Scheiteldruck, H die Scheitelhöhe AC des Stützbogens und w das Eigengewicht des Wölbmaterials bezeichnet.

Die vorbemerkten practischen Regeln von a bis mit g sind der Entwickelung entlehnt, die wir von Seite 233—244 gegeben haben. Die mit eben diesen Regeln dargestellte allgemeine Methode, die vorläufige freie Stützlinie einer ganz beliebigen Massenanordnung zu finden, ist etwas umständlich, aber keineswegs schwierig. Obschon wir eben diese Regeln bereits auf Seite 237 auf einen besondern Fall bezogen haben, halten wir es doch nicht für überflüssig, hier nochmals eine ähnliche Anwendung zu bringen. Als Aufgabe stellen wir uns die Bestimmung der freien Stützlinie des Brückenbogens Fig. 111, welcher der im Bau stehenden Eisenbahnelbbrücke

zu Dresden zugehört. Die innere Wölblinie dieses Bogens ist eine aus Kreisstückbögen zusammengesetzte sogenannte Korblinie *BAI*. Die äufsere Begrenzung des Stützbogens bildet, wie die Figur zeigt, keine zusammenhängende krumme Linie, sondern besteht aus Kreisstückbögen, die von der innern Wölblinie ungleiche Abstände haben, aber mit den zugehörenden Stücken der letztern concentrisch sind. Die Pfeiler, die Stützbögen und die Stirnmauern der genannten Brücke werden aus vorzüglich guten Sandsteinen hergestellt, der Raum zwischen den Stützbögen und der Brückenbahn aber mit grobem Kiefs erfüllt. Die lichte Spannweite *BI* der Strompfeiler beträgt 50 Ellen, die lichte Stichhöhe *EA* 13 Ellen, ferner beträgt die Scheitelhöhe des Stützbogens *AC* 2 Ellen und die ganze Scheitelhöhe *AD* bis zur Brückenbahn 3,8 Ellen. Das Gewicht des Füllmaterials zwischen dem Stützbogen, den Stirnmauern und der Fahrbahn eines jeden Bogens ist als gleich schwer mit dem Materiale anzunehmen, aus welchem der Stützbogen besteht. Darum nun ist die Masse zwischen der innern Wölblinie und der Brückenbahn als durchaus gleich schwer und gleich dicht gelagert zu betrachten: für die Tiefe 1 wird folglich die zu stützende Masse einerseits durch die innere Wölblinie, anderseits aber durch die Brückenbahn begrenzt, so dafs es hier der Bestimmung der Linie $\lambda\lambda$ nicht bedarf, deren wir unter *b* Erwähnung gethan haben, denn $\lambda\lambda$ fällt mit der Brückenbahn zusammen.

Für die Auffindung der freien Stützlinie des Bogens Figur 111 theilen wir den horizontalen Abstand zwischen dem Scheitel *A* und dem Anfange *B* des Stützbogens in $n = 25$ Theile, woraus sich die Länge eines solchen zu

$$\frac{L}{n} = \frac{25}{25} = 1 \text{ Elle}$$

ergiebt, und ziehen durch diese Theilpuncte Perpendikel.

Nach *b* ist die Länge der letzterwähnten Perpendikel zwischen der innern Wölblinie *BA* und der Brückenbahn durch Messung zu bestimmen. Man erhält so:

$h_0 = 3{,}8$ Ellen; $h_1 = 3{,}83$ Ellen; $h_2 = 3{,}88$ Ellen;
$h_3 = 3{,}95$ „ $h_4 = 4{,}01$ „ $h_5 = 4{,}13$ „
$h_6 = 4{,}28$ „ $h_7 = 4{,}45$ „ $h_8 = 4{,}66$ „

$h_9 = 4{,}90$ Ellen; $h_{10} = 5{,}14$ Ellen; $h_{11} = 5{,}43$ Ellen;
$h_{12} = 5{,}77$ „ $h_{13} = 6{,}10$ „ $h_{14} = 6{,}52$ „
$h_{15} = 7{,}00$ „ $h_{16} = 7{,}50$ „ $h_{17} = 8{,}08$ „
$h_{18} = 8{,}77$ „ $h_{19} = 9{,}48$ „ $h_{20} = 10{,}27$ „
$h_{21} = 11{,}17$ „ $h_{22} = 12{,}18$ „ $h_{23} = 13{,}35$ „
$h_{24} = 14{,}78$ „ $h_{25} = 16{,}80$ „

Zur bequemen Darstellung der nach *c* aufzusuchenden Summen bestimme man auf einander folgend

$$\frac{h_0 + h_1}{2};\ \frac{h_0 + h_2}{2};\ \frac{h_0 + h_3}{2};\ \frac{h_0 + h_4}{2} \text{ u. s. f.}$$

$$h_1:\ h_1 + h_2;\ h_1 + h_2 + h_3;\ h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \text{ u. s. f.}$$

$$\frac{h_0 + 2h_1}{6};\ \frac{h_0 + 5h_2}{6};\ \frac{h_0 + 8h_3}{6};\ \frac{h_0 + 11h_4}{6} \text{ u. s. f.}$$

$$1h_1;\ 1h_1 + 2h_2;\ 1h_1 + 2h_2 + 3h_3;\ 1h_1 + 2h_2 + 3h_3 + 4h_4 \text{ u. s. f.}$$

und leite hieraus die geforderten Summen

$$s_1;\ s_2;\ s_3;\ s_4 \text{ u. s. f.}$$
$$(s_1);\ (s_2);\ (s_3);\ (s_4) \text{ u. s. f. ab.}$$

Mit den letztgenannteu Summen erhält man nach *d*, weil

$$\frac{L}{n} = 1$$

ist, und wenn man M_3, M_5, M_7 u. s. f. als zur bildlichen Darstellung einer vorläufigen freien Stützlinie genügend aufsucht,

$$M_3 = s_3 - (s_3);\ M_5 = s - (s_5);\ M_7 = s_7 - (s_7) \ldots$$
$$M_{25} = s_{25} - (s_{25}) = 1681{,}72\,w.$$

Nach *e* wird, wenn man

$$Z_n = Z_{25} = 14 \text{ Ellen setzt,}$$

$$Z_3 = \frac{Z_n}{M_n} \cdot M_3 = \frac{14\,M_3}{1681{,}72\,w} = 0{,}149 \text{ Ellen;}$$

$Z_5 = 0{,}403$ Ellen; $Z_7 = 0{,}806$ Ellen; $Z_9 = 1{,}346$ Ellen;
$Z_{11} = 2{,}056$ „ $Z_{13} = 2{,}958$ „ $Z_{15} = 4{,}042$ „
$Z_{17} = 5{,}344$ „ $Z_{19} = 6{,}969$ „ $Z_{21} = 8{,}968$ „
$Z_{23} = 11{,}25$ „ $Z_{25} = 14$ „

Ebenfalls nach e sind vorstehende Zahlenwerthe von der Horizontale durch T aus auf die Perpendikel 3, 5, 7, 9 ... 25 aufzutragen und die Endpuncte durch eine stetig gekrümmte Linie TKB zu verbinden, welche eine vorläufige freie Stützlinie des Brückenbogens ist. Nach dem Verfahren unter f läfst sich eine freie Stützlinie TQO auffinden, die im Mittel durch die Mitte der Höhe des Stützbogens hindurchgeht. Bei regelrechter Einwölbung mufs sich die Bogenmasse sehr nahe in der Richtung dieser mittlern Stützlinie TQO stützen. Der lothrechte Abstand ihres Endpunctes O von ihrem Scheitel T ist

$$ON = 10,5 \text{ Ellen.}$$

Die Vorschrift unter g führt zur freien Stützlinie CKK_1, in deren Richtung sich die Bogenmasse noch mit dem geringsten Horizontaldruck stützen kann, wenn das Widerlager des Bogens oder der Pfeiler, gegen den sich der Bogen mit der einen Seite stützt, angemessen nachgiebt. Der lothrechte Abstand des Endpunctes K_1 der letztgenannten freien Stützlinie von ihrem Scheitel C ist

$$N_1K_1 = 14,6 \text{ Ellen.}$$

Für die mittlere freie Stützlinie TQO ergiebt sich der Scheiteldruck nach h zu

$$C = \frac{M_n}{(ON)} = \frac{1681,72\,w}{10,5} = 160,163\,w.$$

Dieser Druck vertheilt sich auf die Höhe von 2 und auf die Tiefe von 1 Elle, also auf die Fläche von 2 Quadratellen; auf 1 Quadratelle kommt somit ein Druck von

$$c = \frac{160,163\,w}{2} = 80,081\,w.$$

Das Gewicht von 1 Kubikelle Sandsteinmauerung beträgt durchschnittlich 8 Centner, wornach sich der Scheiteldruck für 1 Quadratelle zu

$$c = 640,648 \text{ Centner,}$$

und der Scheiteldrnck für 1 Quadratzoll zu

$$(c) = \frac{640,648 \times 110}{24^2} = 119,87 \text{ Pfund}$$

herausstellt.

Wenn die Massenstützung in der Richtung der freien Stützlinie CKK_1 statt hat, dann beträgt der Scheiteldruck gleichfalls nach *h*

$$C_1 = \frac{M_n}{(N_1 K_1)} = \frac{1681{,}72\,w}{14{,}6} = 115{,}18\,w.$$

Nach *i* ergiebt sich das Gewicht des Brückenbogens Figur 111 zwischen seinem Scheitel *A* und seinem Anfangspuncte *B* zu

$$W = \left(\frac{L}{n}\right) w \left\{179{,}93\right\} = 179{,}93\,w.$$

Für den Winkel α_n, den die Richtung des Endpunctes *O* der mittlern freien Stützlinie mit einer Horizontale einschliefst, erhält man nach *k*

$$cotg\; \alpha_n = \frac{160{,}163\,w}{179{,}93\,w} = 0{,}8957;\; \alpha_n = 48^0\,9'.$$

Die Tangente OO_1 des Punctes *O* der mittlern freien Stützlinie *OQT* wird erhalten, wenn man $O\lambda = 1$ und $\lambda\mu = 0{,}89$ oder $O\lambda = 10$ und $\lambda\mu = 8{,}9$ macht und von μ aus die Linie μOO_1 zieht.

Der gesammte Schub, den der Bogen Figur 111 im Endpuncte *O* der mittlern freien Stützlinie nach ihrer Richtung daselbst giebt, ist nach *l*

$$D_n = \frac{C}{cos\; \alpha_n} = \frac{160{,}163\,w}{cos\; 48^0\,9'} = 240{,}05\,w.$$

Endlich erhält man nach *m* für den Stützbogen Figur 111 den Krümmungshalbmesser der mittlern freien Stützlinie zu

$$\varrho = \frac{C}{Hw} = \frac{160{,}163}{3{,}8} = 42{,}147 \text{ Ellen.}$$

Die dem Brückenbogen Figur 111 zugehörende freie Stützlinie *TQO* macht eine Hintermauerung des Stützbogens nicht höher erforderlich, als sie die oberste wagrechte Pfeilerschicht schon angiebt, oder die ganze Bogenmasse wird sich durchgängig in der Richtung der freien Stützlinie stützen.

Die den Pfeiler gegen die Brückenbahn hin begrenzende Schicht in der Form eines Gegenbogens erscheint als ohne Bedürfnifs, ja

unter Umständen als nachtheilig. Wird dieser Gegenbogen vor dem Schlufs des Stützbogens aufgeführt, dann kann derselbe Veranlassung zur Höherstellung der Stützlinie, also zur Entstehung eines gröfsern Scheiteldruckes werden. Stellt man aber den Gegenbogen nach Schliefsung des Stützbogens her, dann ist derselbe sehr dicht zu schliefsen, wenn er etwas von der Spannung oder Belastung des Stützbogens in sich aufnehmen soll, und auch diefs kann nur unter Vermehrung des Scheiteldruckes geschehen. Bei halbkreisförmigen Stützbögen älterer Brücken hat man sich der Gegenbögen statt einer Hintermauerung bedient, d. h. um die Entstehung einer Bogenöffnung in den sogenannten Brechungspuncten bei der Ausrüstung der Stützbögen zu verhindern. Dieser Bestimmung hat der Gegenbogen für den Stützbogen Fig. 111 darum nicht zu genügen, weil, bei dichter Versetzung der Wölbsteine und guter Schliefsung des Bogens, derselbe zu flach ist, um eine Brechungsfuge zwischen seinem Widerlager und seinem Scheitel entstehen zu lassen.

Nach den obigen Bestimmungen verhält sich der Scheiteldruck in der Scheitelhöhe AC zum Bogendruck in der Nähe des Bogenanfanges wie 2:3. In eben diesem Verhältnisse die Scheitelhöhe zu der im Bogenanfange zu ordnen, kann nur empfohlen werden, oder es ist anzurathen, die äufsere Wölblinie des Stützbogens in der Scheitelnähe nicht tiefer, sondern gleich hoch mit der zweiten Abtheilung des Stützbogens daselbst zu halten.

Die Richtung OO_1 der mittlern freien Stützlinie des Bogens von ihrem Endpuncte O aus trifft in die Pfeilergrundfläche, woraus erkannt wird, dafs die Länge des Pfeilers, in der Ebene der Stirnfläche genommen, einen zuverlässigen Stand des Bogens sichert, ja dafs derselbe, ohne Gefahr herbeizuführen, noch erheblich kürzer zu fassen ist.

Nach dem Verfahren, das wir so eben practisch durchgeführt haben, läfst sich auch die freie Stützlinie To des freistehenden, d. h. nicht hinterfüllten und nicht mit Stirnmauern versehenen Stützbogens Figur 111 finden. Das Verfahren selbst erleidet nicht die geringste Aenderung, nur die Werthe h_0, h_1, h_2, h_3 . . . werden andere. In der letztgenannten Beziehung oder für die Bestimmung einer vorläufigen freien Stützlinie für den freien Stützbogen gehen h_0, h_1, h_2 . . . in die Höhen über, welche die in a Seite 400 vorgeschriebenen Per-

pendikel innerhalb der Masse des Stützbogens haben. Für den freien Stützbogen Figur 111 wird

$h_0 = 2$ Ellen; $h_1 = 2{,}1$ Ellen; $h_2 = 2{,}2$ Ellen; $h_3 = 2{,}3$ Ellen u. s. f.

10) Bestimmung der innern Wölblinie eines Stützbogens, mit dessen mittlerer Wölblinie die freie Stützlinie durchaus zusammenfällt.

Beliebig gewählte innere Wölblinien von Stützbögen bedingen, dafs die zugehörenden Linien der freien Stützung solcher nicht durchaus mit der mittlern Wölblinie der Stützbögen zusammenfallen, dafs eben defshalb die letztern bis zu einer gewissen Höhe angemessen hintermauert oder hinterstützt werden müssen, sollen sie sich nicht öffnen und in Folge dessen niederbrechen. Obschon wir die Puncte genau zu bestimmen vermögen, bis zu welchen hin ein beliebiger Stützbogen hintermauert werden mufs, um sicher zu stehen, so wird es doch oft wünschenswerth, ja nicht selten Bedürfnifs sein, auch einen Stützbogen herstellen zu können, mit dessen mittlerer Wölblinie die Linie der freien Stützung durchaus zusammenfällt, etwa dann, wenn der Kosten halber die Stirnmauern und die Hintermauerung aus einem durchaus unlagerhaften Steinwerk zusammenzusetzen sind.

Die Herleitung der innern Wölblinie eines Stützbogens, mit dessen mittlerer Wölblinie die Linie der freien Stützung durchaus zusammenfällt, haben wir von Seite 245—251 gegeben, und aus den dort geführten Untersuchungen ziehen wir die nachstehenden practischen Regeln, welche jedoch nur dann gelten, wenn der Raum zwischen der innern Wölblinie und der horizontalen Brückenbahn durchaus gleich dicht und mit gleich schwerem Materiale erfüllt ist. Den Brückenbogen, auf welchen wir die nachfolgenden Regeln beziehen wollen, stelle die Figur 113 dar, und für eben dieselbe sei die halbe lichte Spannweite $AB = S$, die lichte Höhe $BC = H = nS$, die ganze Scheitelhöhe $CD = h.nS$ und das Eigengewicht des Wölbmaterials gleich w. Somit ist

$$n = \frac{CB}{AB} \text{ und } h = \frac{DC}{BC}.$$

Die vorgenannten Regeln sind folgende:

a) Nachdem für die gegebene halbe lichte Spannweite $AB = S$, für die gegebene lichte Höhe BC und für die Scheitelhöhe CD

$$n = \frac{CB}{AB} \text{ und } h = \frac{DC}{BC}$$

gefunden sind, theilt man die lichte Höhe CB des Bogens in p, etwa 10 gleiche Theile, und zieht durch die Theilpuncte Horizontalen.

b) Die Länge y der Horizontalen von C nach B herab, wie FG, welche von der Vertikale CB aus bis zur innern Wölblinie AGC reichen, erhält man der Reihe nach durch Auflösung der Gleichung

$$y = S \, . \, \frac{log. \left\{ \frac{u + h + \sqrt{(u^2 + 2hu)}}{h} \right\}}{log. \left\{ \frac{1 + h + \sqrt{(1 + 2h)}}{h} \right\}},$$

wenn in dieselbe auf einander folgend 0,1; 0,2; 0,3 ... 0,9 statt u gesetzt wird, sobald man CB in 10 gleiche Theile getheilt hat. Ist CB z. E. in 6 gleiche Theile getheilt, dann mufs, um die Länge der auf einander folgenden Horizontalen durch diese Theilpuncte durch die vorstehende Gleichung zu erhalten, in dieselbe nach einander

$$^1/_6, \; ^2/_6, \; ^3/_6, \; ^4/_6, \; ^5/_6 \text{ für } u$$

eingeführt werden.

c) Die nach b berechneten Längen der Horizontalen durch die Theilpuncte auf CB werden angetragen und ihre Endpuncte durch eine stetig gekrümmte Linie CGA verbunden, welche die gesuchte innere Wölblinie und zugleich eine freie Stützlinie der Massenanordnung ist, die zwischen ihr und der Brückenbahn liegt.

d) Für die freie Stützlinie CGA ist der Scheiteldruck oder Horizontalschub

$$c = w \left\{ \frac{S}{2{,}30258 \, log. \left\{ \frac{1 + h + \sqrt{(1 + 2h)}}{h} \right\}} \right\}^2,$$

also auch

$$\sqrt{\frac{c}{w}} = \frac{S}{2{,}30258 \, log. \left\{ \frac{1 + h + \sqrt{(1 + 2h)}}{h} \right\}}.$$

e) Vom Mittelpuncte *T* der Scheitelhöhe *CI* des Stützbogens trägt man die innere Wölblinie *CGA* an, indem man auf den Perpendikeln durch *C*, G ... *A*

$$AQ = GP \ldots = CT$$

macht und die so bestimmten Puncte *Q*, *P* ... *T* durch eine stetig gekrümmte Linie verbindet.

f) Aus der vorläufigen freien Stützlinie *TPQ* findet man eine zweite *TLO* als mittlere Wölblinie des Stützbogens mittels des Proportionalwinkels *qno*, was wie folgend geschieht. Soll die mittlere Wölblinie des Stützbogens in der Vertikale aus dem Bogenanfange *A* durch *O* hindurchgehen und ist *TN* eine Horizontale durch den Mittelpunct *T* der Scheitelhöhe des Stützbogens oder durch den Scheitel *T* der Stützlinie *TQ*, so mache man $nq = NQ$, beschreibe aus *n* durch *q* einen Kreisbogen, mache dessen Chorde $qo = NO$, verbinde *o* mit *n* und man hat den erforderlichen Proportionalwinkel. Mit dem letztern erhält man aus irgend einem Puncte *P* der freien Stützlinie *TPQ* den vertikal darüber liegenden Punct *L* der mittlern Wölblinie *TLO*, wenn man mit dem vertikalen Abstande *PK* des Punctes *P* von der Horizontale durch *T* aus *n* einen Kreisbogen *pl* beschreibt und dessen Chorde von *K* nach *L* hin auf die Vertikale *KG* trägt, oder

$$KL = pl$$

macht. Erhält nach vorstehendem Verfahren die mittlere Wölblinie *TLO* einen zu grofsen Abstand von der innern Wölblinie *CGA*, dann ist der Proportionalwinkel *qno* für

die Herstellung jener kleiner, im entgegengesetzten Falle aber gröfser zu machen.

g) Aus der innern Wölblinie *CGA* und aus der mittlern *TLO* erhält man die äufsere Wölblinie des Stützbogens, wenn man aus beliebigen Puncten der mittlern Wölblinie Kreise beschreibt, welche die innere Wölblinie berühren, und wenn man von *I* aus eine stetig gekrümmte Linie zieht, welche die gezogenen Kreise ebenfalls berührt.

h) Der Scheiteldruck, der entsteht, wenn der Stützbogen in der Richtung seiner mittlern Wölblinie stützt, ist (m. s. Seite 198)

$$C = \frac{NQ}{NO} \cdot wc \text{ oder}$$

weil $NQ = CB = nS$ ist

$$C = \frac{nSc}{(NO)} = \frac{nSw}{(NO)} \left\{ \frac{S}{2{,}30258 \, log. \left\{ \frac{1 + h + \sqrt{(1 + 2h)}}{h} \right\}} \right\}^2.$$

i) Das Bogengewicht zwischen einer Vertikale durch den Scheitel *C* und einer Vertikale durch G ist für die Tiefe 1

$$W = wnS \sqrt{\frac{c}{w}} \cdot \sqrt{(u^2 + 2uh)},$$

wenn

$$u = \frac{CF}{CB}$$

gesetzt wird. Für das Bogengewicht zwischen dem Scheitel *C* und einer Vertikale durch den Bogenanfang *A* erhält man ferner für die Tiefe 1

$$W_n = wnS \sqrt{\frac{c}{w}} \cdot \sqrt{(1 + 2h)}.$$

k) Für den Winkel α, den die Richtung der mittlern Wölblinie *TLO*, welche zugleich freie Stützlinie ist, in einem Puncte *L* mit einer Horizontale einschliefst, ist (m. s. Seite 15)

$$cotg\,\alpha = \frac{W}{C} = \frac{1}{(NO)} \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{w\,(u^2 + 2uh)}\right)},$$

wenn u wieder die unter i festgestellte Bedeutung hat.

Für den Endpunct O der mittlern Wölblinie ist, wenn man deren Richtungswinkel daselbst mit einer Horizontale durch α_n bezeichnet,

$$cotg\,\alpha_n = \frac{W_n}{C} = \frac{1}{(NO)} \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{w\,(1 + 2h)}\right)}.$$

l) Nimmt man im Puncte L das Perpendikel $LK = 1$ und $KV = cotg\,\alpha$, verbindet V mit L und setzt auf LV durch L ein Perpendikel, so hat man die Fugenrichtung in L winkelrecht zur Richtung der Stützlinie. Ebenso $NO = 1$, $NM = cotg\,\alpha_n$ gemacht und M mit O durch die Linie MOO_1 verbunden, giebt die Richtung des gesammten Bogenschubs. Durch eine auf OO_1 winkelrecht aus O gezogene Linie erhält man die Richtung der letzten Fuge des Stützbogens, der alle Fugen parallel sein sollen, die von hier aus nach O_1 hin liegen.

m) Der gesammte Bogenschub im Endpuncte O der mittlern Wölblinie und freien Stützlinie TLO ist

$$D_n = \frac{C}{\cos\alpha_n},$$

und der Bogenschub oder Bogendruck im Puncte L ist

$$D = \frac{C}{\cos\alpha}.$$

n) Der Krümmungshalbmesser der mittlern Wölb- und Stützlinie TLO im Scheitel T ist (m. s. Seite 47)

$$\varrho = \frac{C}{hnSw}.$$

Zur Anwendung der vorstehenden Regeln wollen wir die innere Wölblinie und den Stützbogen eines Brückenbogens Figur 113 für eine halbe lichte Spannweite von $AB = 30$ Fufs, für eine lichte

Höhe von $BC = 40$ und für eine Scheitelhöhe von $CD = 4$ Fuſs, und die sonstigen auf den Stützbogen bezüglichen Gröſsen aufsuchen, dessen mittlere Wölblinie eine freie Stützlinie der Massenanordnung sein soll. Für die gestellte Aufgabe setzen wir ebenfalls voraus, es sei der Raum zwischen der innern Wölblinie und der Brückenbahn mit einem gleich dichten Materiale gleich-mäſsig erfüllt.

Nach *a* ist

$$S = AB = 30 \text{ Fuſs}; \quad nS = CB = \text{ Fuſs}; \quad n = \frac{CB}{AB} = \frac{4}{3};$$

$$h = \frac{DC}{BC} = 0{,}1.$$

Die lichte Höhe *CB* theilen wir, ebenfalls nach der Vorschrift unter *a*, in 10 gleiche Theile und ziehen durch die Theilpuncte Horizontalen.

In die unter *b* aufgeführte Gleichung ist der jetzige Werth des *h*, nämlich 0,1 einzusetzen. Multipliciren wir den Zähler und auch den Nenner der so entstehenden Gleichung mit 10, so geht sie über in

$$y = S \,.\, \frac{\log.\left(1 + u + \sqrt{(100\,u^2 + 20\,u)}\right)}{\log.\,(11 + \sqrt{120})} \text{ d. g.}$$

$$y = 30 \, \frac{\log.\left(1 + u + \sqrt{(100\,u^2 + 20\,u)}\right)}{1{,}34151}.$$

Weil wir die Höhe *CB* in 10 gleiche Theile getheilt haben, so ist, um auf einander folgend die Längen der durch die Theilpuncte gezogenen Horizontalen zu erhalten, nach einander

$$^1/_{10},\ ^2/_{10},\ ^3/_{10},\ ^4/_{10} \ldots \ ^9/_{10}$$

statt *u* in die letzte Gleichung einzusetzen, wodurch sich ergiebt

$y_1 = 12{,}79$ Ellen; $y_2 = 17{,}12$ Ellen;
$y_3 = 20{,}02$ „ $y_4 = 22{,}26$ „
$y_5 = 24{,}06$ „ $y_6 = 25{,}58$ „
$y_7 = 26{,}89$ „ $y_8 = 28{,}14$ „
$y_9 = 29{,}07$ „ $y_{10} = 30$ „

Nach *c* sind die verstehenden Zahlenwerthe auf die Horizontalen

aufzutragen, die zwischen C und B gezogen wurden, und durch ihre Endpuncte eine stetig gekrümmte Linie CGA zu legen, welche die gesuchte innere Wölblinie ist.

Zufolge d ist der Scheiteldruck, welcher der innern Wölblinie CGA zugehört, d. h. wenn die Massenstützung in der Richtung dieser erfolgen könnte

$$c = w \left\{ \frac{30}{2{,}30258 \, log. \, (11 + \sqrt{120})} \right\}^2 = 94{,}329 \, w$$

und ferner

$$\sqrt{\frac{c}{w}} = 9{,}7125.$$

Gemäfs der Vorschrift unter e ergiebt sich die vorläufige freie Stützlinie für die zu suchende mittlere Wölblinie des Stützbogens zu TPQ.

Nimmt man den Durchschnittspunct der zu bestimmenden mittlern Wölblinie des Stützbogens mit der Vertikale durch den Anfangspunct A des letztern in O an und zieht durch das Scheitelmittel T des Stützbogens eine Horizontale TN, dann ist für den Proportionalwinkel zur Bestimmung der mittlern Wölblinie

$$nq = NQ$$

und die Chorde qo des aus n durch q beschriebenen Bogens qo gleich NO. Um aus irgend einem Puncte P der vorläufigen freien Stützlinie TPQ den vertikal darüber liegenden Punct L der mittlern Wölblinie zu erhalten, haben wir mit dem vertikalen Abstande PK des Punctes P von der Horizontale TN aus dem Scheitel n des Proportionalwinkels einen Bogen pl zu beschreiben und dessen Chorde von K nach L hin zu tragen. Durch die Verbindung beliebig vieler auf solche Weise bestimmter Puncte erhält man die mittlere Stützlinie TLO des Stützbogens.

Mittels des unter g genannten Verfahrens ist ferner aus der innern und mittlern Wölblinie die äufsere aufzusuchen.

Bei der regelrechten Stützung des Stützbogens, nämlich in der Richtung seiner mittlern Wölblinie, erhält man nach h den Horizontaldruck zu

$$C = \frac{nS \, . \, c}{(NO)}.$$

Auf dem der Figur 113 zugehörenden Maafsstabe gemessen, ergiebt sich

$$NO = 35{,}2 \text{ Ellen.}$$

Diesen Werth sowie die Werthe für *nS* und *c* in die letzte Gleichung eingeführt, und man erhält

$$C = \frac{40 \times 94{,}329\, w}{35{,}2} = 107{,}19\, w.$$

Wird der Punct *G* der mittlern Wölblinie durch die dritte Horizontale *FG* bestimmt, dann ist nach *i* das Gewicht des Brückenbogens für die Tiefe 1 zwischen dem Scheitel und dem Perpendikel, durch *G*, weil $u = {}^3/_{10}$ ist,

$$W = w \,.\, nS \,.\, \sqrt{\frac{c}{w}} \,.\, \sqrt{(0{,}09 + 0{,}06)} = 150{,}46\, w.$$

Ebenfalls nach *i* erhält man das Bogengewicht für die Tiefe 1 innerhalb der Perpendikel durch den Bogenanfang und durch den Scheitel zu

$$W_n = w \,.\, nS \,.\, \sqrt{\frac{c}{w}} \,.\, \sqrt{(1 + 0{,}2} = 425{,}57\, w.$$

Nach *k* ergiebt sich für den Winkel α, den die Richtung der mittlern Wölblinie im Puncte *L* mit einer Horizontale einschliefst,

$$cotg\, \alpha = \frac{C}{W} = \frac{107{,}19\, w}{150{,}46\, w} = 0{,}7124;\ \alpha = 54^0\ 32'.$$

Für den Richtungswinkel α_n, unter welchem die mittlere Wölblinie in ihrem Endpuncte gegen eine Horizontale gerichtet ist, erhält man gleichfalls nach *k*

$$cotg\, \alpha_n = \frac{C}{W_n} = \frac{107{,}19\, w}{425{,}57\, w} = 0{,}2519;\ \alpha_n = 75^0\ 52'.$$

Nach der Vorschrift unter *l* giebt *LV* die Richtung der mittlern Wölblinie in *L*, wenn $LK = 1$ und $KV = 0{,}7124$ und ferner *MO* die Richtung der mittlern Wölblinie in ihrem Endpuncte, wenn $ON = 1$ und $NM = 0{,}2519$ gemacht wird. Gemäfs *m* ist der Bogendruck im Puncte *L* der mittlern Wölblinie

$$D = \frac{C}{cos\, \alpha} = \frac{107{,}19\, w}{cos\ 54^0\ 32'} = 184{,}74\, w$$

und der Bogenschub oder Bogendruck im Endpuncte O der mittlern Wölblinie

$$D_n = \frac{C}{\cos \alpha_n} = \frac{101,19\,w}{\cos 75^0\ 52'} = 438,99\,w.$$

Der Scheiteldruck C, der Bogendruck D in L und der Bogendruck D_n in O verhalten sich wie

$$107,19 : 184,74 ; 438,99$$

und in eben diesem Verhältnisse müssen die Höhen des Stützbogens, winkelrecht zur Richtung der mittlern Wölblinie genommen, im Scheitel T, im Puncte L und im Bogenanfange genommen werden, soll durch die Bogenlast eine durchaus gleichmäſsige Belastung des Stützbogens erreicht werden. In diesem Verhältnisse stehen die Höhen des Stützbogens Fig. 113 nicht. Ist die Höhe des letztern im Bogenanfange O groſs genug für den Bogendruck, den die Masse daselbst hervorbringt, um mit Sicherheit Stützung zu finden, dann ist es, namentlich wegen der überschreitenden Lasten, sogar räthlich, von hier ab nach dem Scheitel hin dem Stützbogen eine gröſsere Höhe zu geben, als sie der Bogendruck, den das Bogengewicht allein bedingt, erfordert.

Der Krümmungshalbmesser endlich, welcher der mittlern Wölb- und Stützlinie des Stützbogens Fig. 113 zugehört, ist nach n

$$\varrho = \frac{C}{hnSw} = \frac{107,19\,w}{4\,w} = 26,79 \text{ Fuſs}.$$

11) Bestimmung der Brechungspuncte eines freistehenden gewölbten Bogens.

Unter den Brechungspuncten eines gewölbten und freistehenden Bogens begreift man jene, in welchen sich die Fugen eines solchen unter Umständen öffnen und von welchen aus auch das Zerdrücken oder Zerbrechen der Wölbsteine beginnt. Die Brechungsfugeu sind nicht mit jenen Fugenöffnungen zu verwechseln, die sich während der Einwölbung eines Bogens in Folge der Senkung des zugehörenden nicht genügend steifen Lehrgerüstes nach und nach herausstellen. Während bei schwachen Lehrgerüsten nach Herstellung einer gewissen Bogenstrecke von beiden Anfängen aus sich erst die

Widerlagsfugen und darauf höher liegende Fugen öffnen, die erst geöffneten sich aber allmälig wieder schliefsen, zeigen sich die sogenannten Brechungsfugen erst nach dem Bogenschlufs und mit der Entfernung des Lehrgerüstes, also dann, wenn die Selbststützung des Bogens eintritt.

Bei freistehenden, d. h. nicht mit Stirnmauern etc. hintermauerten oder hinterfüllten Rundbögen liegt, wenn sich Brechungsfugen zeigen, eine im Scheitel, die sich gegen die innere Wölbfläche öffnet, eine zweite vom Scheitel ab nach den Bogenanfängen hin, die sich beide gegen die äufsere Wölbfläche hin öffnen, und ferner vom Scheitel aus auf jeder Bogenhälfte eine dritte Brechungsfuge in der Nähe der Bogenanfänge, von welchen sich jede gegen die innere Wölbfläche hin öffnet, so dafs sich an jedem freistehenden gewölbten Bogen gleichzeitig fünf Brechungspuncte herausstellen müssen. Ist die Entstehung der Brechungspuncte in der Nähe der Bogenanfänge verhindert, dann können sich auch die übrigen nicht bilden und der Bogen wird, aufser wenn das Wölbmaterial für den Bogendruck zu schwach ist, nicht niederbrechen. Für die Aufsuchung der Brechungspuncte eines Bogens besteht folgende ganz einfache Regel:

> Man sucht eine der Massenanordnung des Stützbogens zugehörende vorläufige freie Stützlinie, legt ihren Scheitel auf den der äufsern Wölblinie und leitet hieraus jene freie Stützlinie mittels eines Proportionalwinkels (m. s. *g* Seite 404) ab, welche die innere Wölblinie tangirt. Dieser Berührungspunct ist der dem Scheitel am nächsten liegende Brechungspunct, und der in der Nähe der Bogenanfänge liegende Brechungspunct ist der Durchschnittspunct der vorbestimmten die innere Wölblinie berührenden freien Stützlinie mit der Aussenseite des Wölbbogens oder mit der Aussenseite des Pfeilers, gegen den sich der Bogen stützt.

Die Stützung eines freistehenden gewölbten Bogens in der Richtung einer freien Stützlinie, deren Scheitel mit dem der äufsern Wölblinie zusammenfällt, und welche in ihrem Fortgange die innere Wölblinie tangirt, mufs als die äufserste Grenze angesehen werden, bis zu welcher herab die Stützung überhaupt möglich ist. In der Wirklichkeit kann diese äufserste Grenze nur bei einem aufserge-

wöhnlich festen Materiale ohne Bogenbruch nahe erreicht werden. Bei einem minder festen Materiale macht sich der Eintritt der vorgenannten Stützungsrichtung durch ein Abdrücken oder Absplittern der Wölbsteine in den Brechungspuncten bemerkbar, welcher Erscheinung gewöhnlich der Bogenbruch nachfolgt. Auch ein freistehender Wölbbogen hat, aus Gründen, die wir im XX. Abschnitte vorgeführt haben, das Bestreben, sich vom Scheitel ab in der Richtung einer freien Stützlinie zu stützen, die mit seiner mittlern Wölblinie noch am innigsten zusammenfällt, oder überhaupt in der Richtung jener freien Stützlinie zu stützen, in welcher die geringste Verkürzung stattfindet. Jene Stützungsrichtung, nämlich vom Scheitel ab in der Nähe der mittlern Wölblinie, erleidet nur dann eine Aenderung, wenn der Endpunct der entsprechenden Stützlinie keine Stützung findet. Der letztere rückt dann so tief herab, der Scheitel der Stützlinie aber so hoch empor, bis die Stützung überhaupt möglich wird. Die äufserste Lage, in welche solchergestalt die Stützungslinie kommen kann, ist die oben bezeichnete oder eine freie Stützlinie der Massenanordnung, deren Scheitel mit dem der äufsern Wölblinie zusammenfällt und welche überdiefs die innere Wölblinie tangirt.

Was die Bestimmung einer vorläufigen freien Stützlinie der Massenanordnung eines gegebenen freistehenden Bogens anlangt, so kann man sich hierbei der allgemeinen Methode bedienen, die wir unter 9 Seite 400 vollständig aufgezählt und überdiefs durch ein Beispiel erläutert haben, sowie ferner, wenn die innere und äufsere Wölblinie des freistehenden Bogens Kreisbögen sind, der Tabelle *G* auf Seite 264 und 265, insoweit es deren Umfang gestattet. Die Art und Weise, wie die letztere zur Bestimmung einer vorläufigen freien Stützlinie eines freistehenden Bogens zu gebrauchen ist, haben wir bereits an zwei Beispielen auf Seite 266 — 274 dargethan.

12) Bestimmung der Höhe, bis zu welcher ein freistehender Wölbbogen hintermauert sein muss, um sich nach Entfernung der Lehrgerüste nahe in der Richtung seiner mittlern Wölblinie stützen zu können.

Die Regel, mittelst welcher die Höhe gefunden wird, bis zu der ein gegebener Bogen ohne Stirnmauern und ohne Hinterfüllung vor dem Ausrüsten hinterstützt werden mufs, um sich nahezu in der Richtung seiner mittlern Wölblinie stützen zu können, ist folgende:

Für die Massenanordnung des gegebenen Wölbbogens, der z. B. Stützbogen eines Brückenbogens werden soll, sucht man eine zugehörende freie Stützlinie auf, deren Scheitel durch den Mittelpunct der Höhe des Bogens im Scheitel geht, und leitet aus dieser mittels eines Proportionalwinkels jene freie Stützlinie ab, die vom Scheitel der mittlern Wölblinie aus über dieser fortläuft und die letztere in einem Puncte tangirt. Dieser Berührungspunct giebt die Höhe an, bis zu welcher jeder Wölbschenkel von seinem Anfange aus zu hinterstützen ist, bevor das Lehrgerüste entfernt wird.

Die eben angeführte Regel findet durch den zwanzigsten Abschnitt ihre Begründung.

Die Hinterstützung der Wölbschenkel eines freistehenden Bogens bis zum Berührungspuncte der freien Stützlinie der Bogenmasse, die durch den Scheitel der mittlern Wölblinie geht, mit der letztern, pflegt man massiv herzustellen, doch ist diefs kein nothwendiges Erfordernifs; einzelne Mauern, parallel den Stirnmauern, deren Entfernung von einander nicht allzu grofs genommen wird, werden in der Regel ebenfalls genügen.

Die Bestimmung einer vorläufigen freien Stützlinie der Masse eines gegebenen Bogens kann nach der unter Nummer 9 Seite 400 angegebenen allgemeinen Methode oder auch, wenn die innere und äufsere Wölblinie des gegebenen Bogens Kreisbögen sind, mit Hilfe der Tabelle G Seite 264 und 265 geschehen. Zur nähern Erläuterung wollen wir noch zwei Beispiele anreihen. Das erste soll die Bestimmung der Hintermauerungshöhe eines freistehenden halbkreisförmigen Stützbogens zum Gegenstande haben, von welchem der Radius der innern Wölblinie 12,5 Ellen, der der äufsern 14,1 Elle und die Scheitelhöhe 1,6 Ellen betragen möge. Hiernach ist die äufsere Wölblinie der innern concentrisch und, in Beziehung auf die Tabelle G Seite 264 und 265

$$R = \frac{14,1}{12,5} = 1,128\, r, \text{ wofür gesetzt werden kann}$$

$$R = 1,13\, r.$$

Ferner ist

$$h = \frac{1,6}{12,5} = 0,128.$$

Die Abscissen einer vorläufigen freien Stützlinie des angenommenen Bogens liegen zwischen jenen, welche die Tabelle G für $R = 1,12\,r$ und $R = 1,14\,r$ angiebt, und sind genügend genau das arithmetische Mittel der in der Tabelle enthaltenen Werthe, d. h. die Werthe der Abscissen, welche in den mit $R = 1,12\,r$ und $R = 1,14\,r$ überschriebenen Vertikalspalten liegen, werden addirt und durch 2 dividirt. Hiernach erhält man:

$$x_5 = 0,000000 + 0,003798\,h;$$
$$x_{10} = 0,000004 + 0,015077\,h;$$
$$x_{15} = 0,000022 + 0,033494\,h;$$
$$x_{20} = 0,000068 + 0,058489\,h \text{ u. s. f.}$$

Ferner, wenn für h der oben bestimmte Werth eingesetzt wird,

$$x_5 = 0,0005;\quad x_{10} = 0,0019;\quad x_{15} = 0,0043;$$
$$x_{20} = 0,0076;\quad x_{30} = 0,0163;\quad x_{40} = 0,0274;$$
$$x_{50} = 0,0396;\quad x_{60} = 0,0515;\quad x_{70} = 0,0617;$$
$$x_{80} = 0,0687;\quad x_{90} = 0,0713.$$

Das überdiefs noch einzuschlagende Verfahren ist im Allgemeinen das nämliche, das wir unter Nummer 7 Seite 381 angegeben haben. Die letztbestimmten Abscissen multipliciren wir demgemäfs mit einem Zahlenfactor, der hier $\frac{100}{7}$ sein soll, und erhalten dadurch

$$x_5 = 0,007;\quad x_{10} = 0,027;\quad x_{15} = 0,062;$$
$$x_{20} = 0,110;\quad x_{30} = 0,233;\quad x_{40} = 0,391;$$
$$x_{50} = 0,566;\quad x_{60} = 0,736;\quad x_{70} = 0,881;$$
$$x_{80} = 0,981;\quad x_{90} = 1,019.$$

Den freistehenden Bogen mit den oben festgestellten Maafsen, und auf den sich die vorstehenden Abscissen beziehen, stelle die Figur 114 dar. Zur bildlichen Darstellung einer vorläufigen freien Stützlinie eben dieses Bogens sind durch Puncte der innern Wölblinie Perpendikel zu füllen, die von ihrem Scheitel um

5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 Grad

abstehen. Von den Durchschnittspuncten dieser Perpendikel mit der

Horizontale TN aus dem Mittelpuncte T der Scheitelhöhe AB sind ferner die Zahlenwerthe der letztbestimmten Abscissen

$$x_5, x_{10}, x_{15} \text{ etc.}$$

anzutragen. Zu diesem Ende werden entweder diese Zahlenwerthe

$$x_5 = 0{,}007;\ x_{10} = 0{,}027;\ x_{15} = 0{,}062 \text{ etc.}$$

von einem tausendtheiligen Maafsstabe abgenommen, dessen Einheit der Radius der innern Wölblinie ist, oder es werden eben diese Abscissen mit dem Radius 12,5 Ellen der innern Wölblinie multiplicirt und alsdann vom wahren Maafsstabe genommen, der dem Bogen zugehört. Wählen wir die letzte Methode, dann erhalten wir

$X_5 =$ 0,09 Ellen; $X_{10} =$ 0,34 Ellen; $X_{20} =$ 1,38 Ellen·
$X_{30} =$ 2,91 „ $X_{40} =$ 4,89 „ $X_{50} =$ 7,08 „
$X_{60} =$ 9,20 „ $X_{70} =$ 11,01 „ $X_{80} =$ 12,26 „
$X_{90} =$ 12,74 „

Die durch diese Abscissen bestimmten Endpuncte der mehrgedachten Perpendikel mit einer stetig gekrümmten Linie TQ verbunden, und man hat die gesuchte vorläufige freie Stützlinie des Bogens. Aus dieser nun läfst sich mittels einiger Versuchsconstructionen mit einem Proportionalwinkel leicht jene freie Stützlinie TPO ableiten, welche die mittlere Wölblinie in P berührt, und bis zu diesem Puncte empor mufs der Bogen hintermauert werden, bevor dessen Lehrgerüste zu entfernen ist, soll die Stützlinie vom Scheitel ab so genau mit der mittlern Wölblinie zusammenfallen, als diefs die Umstände nur gestatten. Leiten wir aus der vorläufigen freien Stützlinie TQ eine noch andere BHR her, deren Scheitel mit der der äufsern Wölblinie zusammenfällt und welche überdiefs die innere Wölblinie in H tangirt, dann überzeugen wir uns, dafs im vorliegenden Falle und bei sehr harten Wölbsteinen, und weil die Tangente des Punctes R der freien Stützlinie BHR die äufsere Wölblinie nahe an ihrem Anfange durchschneidet, eine nur geringe Uebermauerungshöhe den Bogenniederbruch zu verhindern im Stande ist.

Ist es auch möglich, den Niederbruch eines Bogens mit einer beträchtlich geringern Höhe der Hintermauerung, als bis zum genannten Berührungspuncte P Figur 114, unter Umständen wohl auch ohne alle Hintermauerung zu verhindern, so ist diefs doch nicht räthlich, weil hierbei gern Ecken der Wölbsteine abgedrückt oder die

Mörtellagen zwischen den letztern verdrückt und hiermit eine zu grofse Beweglichkeit des Bogens veranlafst wird, die sich unfehlbar mit der Aufführung der Uebermauerung herausstellen mufs.

Das zweite Beispiel für die Bestimmung der Hintermauerungshöhe eines Bogens bestehe in der Ermittelung eben dieser Höhe für den Stützbogen *CAI* Fig. 111, welcher die Form der Stützbögen für die in Dresden erbaut werdende Eisenbahnbrücke über die Elbe darstellt. Weder die innere noch die äufsere Wölblinie dieses Bogens ist ein Kreisbogen, wefshalb wir die unter Nummer 9 Seite 400 aufgeführte Methode zur Herleitung einer vorläufigen freien Stützlinie verwenden müssen. Die Hauptabmessungen eben dieses Bogens haben wir bereits auf Seite 407 gegeben. Theilen wir auch für den vorliegenden Zweck die halbe lichte Spannweite in 25 gleiche Theile, ziehen durch alle diese Theilpuncte Perpendikel und messen die Höhen derselben, insoweit sie innerhalb der Bogenmasse liegen, so erhalten wir

$$\frac{L}{n} = \frac{25}{25} = 1 \text{ Elle und ferner}$$

$h_0 = 2$ Ellen; $h_1 = 2{,}1$ Ellen; $h_2 = 2{,}2$ Ellen; $h_3 = 2{,}3$ Ellen;
$h_4 = 2{,}35$ „ $h_5 = 2{,}37$ „ $h_6 = 2{,}38$ „ $h_7 = 2{,}39$ „
$h_8 = 2{,}40$ „ $h_9 = 2{,}41$ „ $h_{10} = 2{,}42$ „ $h_{11} = 2{,}43$ „
$h_{12} = 2{,}45$ „ $h_{13} = 2{,}80$ „ $h_{14} = 2{,}84$ „ $h_{15} = 2{,}86$ „
$h_{16} = 2{,}90$ „ $h_{17} = 3{,}05$ „ $h_{18} = 3{,}10$ „ $h_{19} = 3{,}20$ „
$h_{20} = 3{,}40$ „ $h_{21} = 3{,}70$ „ $h_{22} = 4{,}58$ „ $h_{23} = 5{,}50$ „
$h_{24} = 6{,}85$ „ $h_{25} = 8{,}75$ „

Verfahren wir ferner nach der Anleitung unter Nummer 9 Seite 400, so finden wir:

$s_1 = 2{,}05$; $s_2 = 8{,}40$; $s_3 = 19{,}35$; $s_4 = 35{,}10$;
$s_5 = 67{,}53$; $s_6 = 95{,}34$; $s_7 = 128$; $s_8 = 163{,}52$;
$s_9 = 207{,}95$; $s_{10} = 255{,}30$; $s_{11} = 307{,}62$; $s_{12} = 365{,}10$;
$s_{13} = 434{,}20$; $s_{14} = 507{,}64$; $s_{15} = 586{,}95$; $s_{16} = 672{,}80$;
$s_{17} = 767{,}98$; $s_{18} = 869{,}40$; $s_{19} = 979{,}45$; $s_{20} = 1102{,}00$;
$s_{21} = 1236{,}90$; $s_{22} = 1428{,}24$; $s_{23} = 1630{,}24$; $s_{24} = 1881{,}72$;
$s_{25} = 2202{,}63$.
$(s_1) = 1{,}033$; $(s_2) = 4{,}266$; $(s_3) = 9{,}900$; $(s_4) = 18{,}041$;
$(s_5) = 28{,}663$; $(s_6) = 41{,}726$; $(s_7) = 57{,}230$; $(s_8) = 75{,}193$;

$(s_9) = 95{,}305$; $(s_{10}) = 118{,}580$; $(s_{11}) = 144{,}043$; $(s_{12}) = 172{,}105$; $(s_{13}) = 204{,}947$; $(s_{14}) = 243{,}020$; $(s_{15}) = 284{,}347$; $(s_{16}) = 328{,}990$; $(s_{17}) = 378{,}090$; $(s_{18}) = 431{,}912$; $(s_{19}) = 490{,}190$; $(s_{20}) = 554{,}557$; $(s_{21}) = 627{,}356$; $(s_{22}) = 716{,}440$; $(s_{23}) = 829.917$; $(s_{24}) = 975{,}142$; $(s_{25}) = 1166{,}400$.

Nach *d* Nummer 9 Seite 402 wird mit Weglassung des *w*

$M_1 = 1{,}017$; $M_2 = 4{,}134$; $M_3 = 9{,}450$; $M_4 = 27{,}059$; $M_5 = 38{,}867$; $M_6 = 53{,}614$; $M_7 = 70{,}770$; $M_6 = 88{,}327$; $M_9 = 112{,}645$; $M_{10} = 136{,}720$; $M_{11} = 163{,}577$; $M_{12} = 192{,}995$; $M_{13} = 229{,}253$; $M_{14} = 264{,}620$; $M_{15} = 302{,}603$; $M_{16} = 343{,}810$; $M_{17} = 389{,}890$; $M_{18} = 437{,}488$; $M_{19} = 489{,}260$; $M_{20} = 547{,}443$; $M_{21} = 609{,}544$; $M_{22} = 711{,}800$; $M = 800{,}323$; $M_{24} = 905{,}578$; $M_{25} = 1036{,}23$.

Zufolge *e* Nummer 9 Seite 403 wird endlich, wenn man $Z_n = Z_{25} = 14$ Ellen setzt,

$$Z_1 = \frac{14}{1036{,}23} \times 1{,}017 = 0{,}014 \text{ Ellen und überdiefs}$$

$Z_2 =$	0,056 Ellen;	$Z_3 =$	0,128 Ellen;	$Z_4 =$	0,366		
$Z_5 =$	0,525 „	$Z_6 =$	0,724 „	$Z_7 =$	0,956		
$Z_8 =$	1,193 „	$Z_9 =$	1,522 „	$Z_{10} =$	1,847		
$Z_{11} =$	2,210 „	$Z_{12} =$	2,607 „	$Z_{13} =$	3,097		
$Z_{14} =$	3,375 „	$Z_{15} =$	4,088 „	$Z_{16} =$	4,645		
$Z_{17} =$	5,268 „	$Z_{18} =$	5,911 „	$Z_{19} =$	6,610		
$Z_{20} =$	7,396 „	$Z_{21} =$	8,236 „	$Z_{22} =$	9,617		
$Z_{23} =$	10,813 „	$Z_{24} =$	12,249 „	$Z_{25} =$	14.		

Mit diesen Abscissen ergiebt sich *TI* als eine vorläufige freie Stützlinie des Stützbogens, aus der sich mittels des Proportionalwinkels *pIq* die mit der innern Wölblinie noch am innigsten zusammenfallende freie Stützlinie *TV* ableitet. Zufolge der Lage dieser freien Stützlinie bedarf der Stützbogen einer besondern Hintermauerung nicht, um nach seinem Schlufs ausgerüstet werden zu können, wenn nur von *V* aus die geforderte horizontale und vertikale Stützung vorhanden ist.

Mittels eines Proportionalwinkels *pIr* erhalten wir aus der vorläufigen freien Stützlinie *TI* jene, welche vom Scheitel *C* der äufsern

Wölblinie ausgeht, die innere im Puncte *Y* tangirt und die Vertikale durch den Anfangspunct *I* jener durchschneidet. Bei mangelhafter Einwölbung und Schliefsung eines Bogens nähert sich die entstehende Stützungsrichtung der freien Stützlinie *CYU*, doch kann aus dieser Richtung der Stützung des freistehenden Stützbogens kein Oeffnen des Bogens in den Puncten *B* und *Y* entstehen, weil die Tangente UU_1 des Punctes *U* der freien Stützlinie *CYU* in die Pfeilerbasis fällt. Eine Verschiebung des freistehenden Stützbogens *CAI* ... auf den Horizontalfugen durch und unter *I* kann auch nicht statthaben, weil, mit Hinsicht auf den Reibungscoefficenten, der Winkel zu grofs ist, in welchem der ganze Bogendruck bei *U*, wenn sich die Stützung der Richtung *CYU* nähert, die horizontale Richtung durchschneidet.

13) Bestimmung der Hintermauerungshöhe und der Brechungspuncte der Stützbögen von Brückenbögen.

Weil die mittlere Wölblinie eines Stützbogens für einen Brückenbogen im Allgemeinen nicht durchaus, sondern nur vom Scheitel ab nahezu mit der Richtung einer freien Stützlinie der Massenanordnung zusammenfällt, weil ferner die letztere die mittlere Wölblinie in einem Puncte tangiren und von hier aus überschreiten wird: so mufs offenbar der Stützbogen, weil bestimmungsgemäfs in dessen Richtung die Massenstützung vorzugsweise geschehen soll, von diesem Berührungspuncte aus mit einer Hinterstützung versehen sein, die fähig ist, jenen Horizontalschub in sich aufzunehmen, welcher nothwendig abgesetzt werden mufs, um die Stützung in der Richtung der mittlern Wölblinie zu ermöglichen (m. s. Abschnitt 6 Seite 35). Die practische Regel nun, die wir zur Aufsuchung der Hintermauerungshöhe eines vorgeschriebenen Stützbogens aufstellen können, ist folgende:

> Man sucht für die gegebene Massenanordnung des Brückenbogens nach Nummer 7 Seite 381, oder nach Nummer 9 Seite 400 eine vorläufige freie Stützlinie und leitet hieraus mittels eines Proportionalwinkels jene ab, welche vom Scheitel der mittlern Wölblinie aus oberhalb dieser liegt und sie ferner tangirt. Vom Bogenanfange bis zu diesem Berührungspuncte empor mufs der Stütz-

bogen mit horizontaler Hinterstützung versehen werden, soll der letztere auch vom genannten Berührungspuncte ab niederwärts die Massenstützung in seiner Richtung besorgen. Eine Hinterstützung wird unnöthig, wenn der Berührungspunct der freien Stützlinie mit der mittlern Wölblinie vor dem Bogenanfange nicht eintritt.

Es ist Gebrauch, die Hinterstützung eines vorgeschriebenen Stützbogens durch massives Mauerwerk herzustellen, doch ist der Zweck derselben auch durch einzelne Mauern, sogenannte Spandrill-Walls, parallel den Stirnmauern zu erreichen, wenn diese nur angemessen nahe aneinander stehen.

Sehr gewöhnlich ergiebt sich die erforderliche Hinterstützungshöhe eines freistehenden Stützbogens höher, als sie derselbe fordert, wenn die Hinter- und Ueberfüllung auf denselben gebracht ist. Von den beiden Hintermauerungshöhen eines Stützbogens, nämlich der für den freistehenden Stützbogen und jener für eben denselben im vollendeten Zustande des Brückenbogens, behält man die höhere als Hinterstützungshöhe bei.

Für den Brückenbogen Fig. 108 berührt die freie Stützlinie der Massenanordnung (m. s. Seite 387) die mittlere Wölblinie in einem Puncte *P*, der in einem Perpendikel liegt, das vom Scheitel der innern Wölblinie um nahe 60 Grad absteht. Bis zur Höhe dieses Punctes *P* der mittlern Wölblinie ist der Stützbogen von seinem Anfange aus zu hintermauern.

Der Kreisstichbogen Figur 109 bedarf keiner Hintermauerung, weil kein Berührungspunct der freien Stützlinie mit der Wölblinie, aufser im Scheitel, eintritt.

Für den elliptischen Stützbogen Fig. 110 findet in *P* eine Berührung zwischen der mittlern Wölblinie und der freien Stützlinie statt, und bis zu diesem Puncte empor ist der Stützbogen zu hintermauern.

Der Stützbogen des Brückenbogens Fig. 111 fordert keine Hinterstützung, weil die mittlere freie Stützlinie nahezu durchgängig mit der mittlern Wölblinie zusammenfällt.

Der Stützbogen vom Brückenbogen Fig. 113 bedarf, bis zur Brückenbahn belastet oder nach der Seite 416 gemachten Voraussetzung mit Material überfüllt, das gleich schwer mit dem des ersten

ist, ebenfalls keiner Hintermauerung, weil dessen mittlere Wölblinie eine freie Stützlinie der Massenanordnung ist.

Bei mangelhafter Schliefsung eines Stützbogens oder bei zu dicken Mörtellagen, die den Wölbsteinen gegeben sind, kommt es vor, dafs mit der Herstellung der Hinter- und Ueberfüllung etc. behufs der Gestaltung der Brückenbahn noch Fugenöffnungen im Wölbbogen entstehen, die sich als eine Folge des Setzens eines Stützbogens herausstellen. Noch häufiger wird das Oeffnen von Lagerfugen eines Stützbogens dadurch veranlafst, dafs die Hintermauerung des Stützbogens nicht dicht genug ist, um den nothwendig abzusetzenden Horizontalschub in sich aufnehmen zu können, oder dafs diese dem Horizontaldrucke ausweicht. In allen diesen Fällen nähert sich die Richtung der Stützung der gesammten Bogenmasse einer freien Stützlinie der letztern, deren Scheitel mit dem der äufsern Wölblinie zusammenfällt, und welche überdiefs die innere Wölblinie berührt. Diesen Berührungspunct pflegt man den Brechungspunct, besser Drückungspunct der innern Bogenhälfte eines Stützbogens zu nennen. Es ist dieser Punct jener Brechungspunct eines Bogens (m. s. Seite 421), der zwischen dem Scheitel und dem Anfange des Bogens liegt, und ist folglich der Berührungspunct jener freien Stützlinie der Massenanordnung mit der innern Wölblinie, die durch den Scheitel der äufsern Wölblinie hindurchgeht.

In der Nähe des Drückungs- oder Brechungspunctes werden nicht selten die Kanten der Wölbsteine, die der innern Wölbfläche zugekehrt sind, abgedrückt, und von hier aus ferner die Wölbfugen gegen die äufsere Wölbfläche hin geöffnet. Die eben erwähnten zwei Erscheinungen für sich oder auch in Verbindung mit einer Oeffnung der Scheitelfuge des Stützbogens gegen die innere Wölbfläche hin und ein Abdrücken der Wölbsteine am Scheitel der äufsern Wölbfläche bezeugen den Eintritt der Stützung der Masse in der Nähe jener freien Stützlinie, deren Scheitel mit dem der äufsern Wölblinie zusammenfällt und die überdiefs die innere Wölblinie tangirt. Die Drückungsfugen eines Stützbogens, dafern sie nicht durch ein Ausweichen der Bogenanfänge bedingt sind, also als eigentliche Brechungsfugen auftreten, zeigen sich nur in Folge der oben erwähnten Umstände und beurkunden eine nachlässige oder eine mangelhafte Bauführung.

Bemerkte Druckfehler.

Seite	15	Zeile	7	v. o.	$C(tg\alpha_2 - tg\alpha_1)$ für $(Ctg\alpha_2 - tg\alpha_1)$.
„	187	„	2	v. u.	die zu 5,10 für die 5,10.
„	197	„	1	v. o.	$\frac{u^2+2}{6}$ für $\frac{u^2+2}{2}$.
„	211	„	8	v. o.	R für P.
„	225	„	14	v. o.	$wr^3 \times$ für $wr \times {}^3$.
„	235	„	9	v. u.	M_n für M.
„	251	„	12	v. o.	x für w.
„	257	„	13	v. u.	$l^2 - 3l\lambda$ für $l - 3l\lambda$.
„	261	„	8	v. u.	R^2 und r^2 für $R2$ und $r2$.
„	266	„	5	v. u.	Fig. 86 für Fig. 85.

Bemerkte Druckfehler.

Seite 15 Zeile 7 v. o. $C(tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1)$ für $(C\,tg\,\alpha_2 - tg\,\alpha_1)$.

" 187 " 2 v. u. die zu 5,10 für die 5,10.

" 197 " 1 v. o. $\frac{u^2+2}{6}$ für $\frac{u^2+2}{2}$.

" 211 " 8 v. o. R für P.

" 225 " 14 v. o. $wr^2\times$ für $wr\times^2$.

" 235 " 9 v. u. M_n für M.

" 251 " 12 v. o. x für w.

" 257 " 13 v. u. $l^2 - 3M$ für $1 - 3M$.

" 261 " 8 v. u. R^2 und r^2 für $R2$ und $r2$.

" 266 " 3 v. u. Fig. 86 für Fig. 85.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

In der

Arnoldischen Buchhandlung

in **Dresden** und **Leipzig**

sind erschienen und in allen Buchhandlungen zu erhalten:

Bruhn, Dr. H., Steinkohlenbüchlein, oder Eigenschaften, Gewinnung, Benutzung etc. der Steinkohle. Zweite Ausgabe. Mit 2 Tafeln Abbildungen. gr. 8. 1845. broch. 10 Ngr.

Günther, Ch. A., vollständige practische Anweisung, technische Gegenstände in Hinsicht der Umrisse, des Lichtes und der Schatten geometrisch richtig zu zeichnen. gr. 8. Mit 8 Kupfertafeln in Folio. 1823. 4 Thlr.

Heine, G., Darstellung der allgemeinen Baukunde, zum Gebrauche als Leitfaden bei Vorträgen über dieselbe in Gewerb- und Baugewerbschulen, sowie zur Selbstbelehrung für Baugewerken, Bauliebhaber und Cameralisten, als zweite Auflage des kurzen Unterrichts in der bürgerlichen und Landbaukunde. Mit 309 Figuren auf 26 Steintafeln. gr. 8. 1842. 4 Thlr.

— — Handbuch der landwirthschaftlichen Baukunde, zur Selbstbelehrung für Baumeister, Landwirthe und Kameralisten, sowie zum Gebrauche als Leitfaden bei Vorlesungen. Zweite wohlfeilere Ausgabe. Mit 20 Steindrucktafeln. gr. 8. cart. 1843. 3 Thlr.

— — das im Königreiche Sachsen geltende Baurecht. Ein Handbuch zum Gebrauch als Leitfaden bei Vorträgen in Bauschulen, sowie zur Selbstbelehrung für Jeden, der mit dem Bauwesen in Berührung kommt. Unter juristischer Beihilfe bearbeitet. Erster Theil. Die das Bauwesen betreffenden Rechtsmaterien. gr. 8. 1846. broch. 1 Thlr.

Hörnig, G. S., Grundsätze und Erfahrungen in Betreff der verschiedenen Zimmerarbeiten bei dem Land- und Wasserbau, nebst einem Anhange über einige Lehren der Arithmetik und Geometrie; ein Handbuch für Zimmerleute und Bauliebhaber, in Fragen und Antworten. Mit 21 grofsen Steindrucktafelu. gr. 8. 1834. 3 Thlr.

— — Theoretisch-praktisches Handbuch der verschiedenen Maurerarbeiten bei dem Land- und Wasserbau für Maurer und Bauliebhaber, in Fragen und Antworten bearbeitet. Mit 28 grofsen Steindrucktafeln. gr. 8. 1836. 3 Thlr. 7½ Ngr.

Lohrmann, W. G., die Sammlung der mathematisch-physikalischen Instrumente und der Modellkammer in Dresden. Nebst einer Ansicht des mathematischen Salons in Dresden. 8. 1835. broch. 11½ Ngr.

Netto, F. A. W., Anweisung zur Selbsterlernung der Radir- und Aetzkunst in Kupfer; gröfstentheils aus eigner Erfahrung abgeleitet und zum allgemeinen Gebrauch für Künstler, sowie für Ingenieurs und Artilleristen, Berg- und Forstmänner, welche ihre Zeichnungen auf diese Art vervielfältigen wollen. Mit einer Kupfertafel. 8. 1815. 12½ Ngr.

Schubert, J. A., Elemente der Maschinenlehre. Erste Abtheilung. Vom Materiale der Maschinentheile und deren Construction oder von den Hölzern und Metallen, vom Formen, von den Gufsmodellen und vom Giefsen der Metalle, vom Verzinnen und Löthen und von den Verbindungen, von den Formen und der Construction der wichtigsten Maschinentheile. Mit 22 grofsen Steindrucktafeln. gr. 8. 1842. broch. 7 Thlr. 15 Ngr.

Schubert, J. A., Elemente der Maschinenlehre. Zweite Abtheilung. Von der Bearbeitung fester Körper im Allgemeinen, von den einfachen Körpern und von den Werkzeugsmaschinen. Mit 35 grofsen Steindrucktafeln. gr. 8. 1844. broch. 10 Thlr.

— — Handbuch der Mechanik für Praktiker, oder: Grundlehren der Mechanik, auf die Construction der Maschinen und auf die Baukunst bezogen. Erster Band: Statik fester Körper. Mit 3 Kupfertafeln. 8. 1831. 1 Thlr. 15 Ngr.

v. **Trautzschen,** H., die bürgerliche Baukunst für angehende Forstmänner und Landwirthe. 8. 1823. broch. 22½ Ngr.

Wagner, C. F., Anleitung zur Ausmittelung der Gröfse verschiedenartig geformter Gefäfse, nach gegebenen Bedingungen durch geometrische Constructionen, für Gewerbtreibende. Mit 28 Tafeln. gr. 8. 1838. broch. 3 Thlr.

Wagner, G., die Aesthetik der Baukunst; ein Leitfaden zum Selbstunterrichte und Handgebrauche für Architekten, Maurer-, Zimmer-, Steinmetzmeister und Freunde der Baukunst. Mit 603 lithographirten Figuren auf 13 Tafeln. gr. 8. 1838. broch. 4 Thlr. 15 Ngr.

v. **Westphalen,** J. Graf, Vorschlag: die projectirte Eisenbahn von Prag nach Dresden von Aufsig aus nicht an der Elbe her, sondern gegen das Erzgebirge und über dasselbe von Herbitz aus mittelst stehender Dampfmaschinen und selbstwirkender Bahnen, wobei Gegengewichte in sehr kraftersparende Anwendung kommen, auszuführen und erst wieder in der Gegend von Pirna, ohnweit Zehista das von da breite Elbthal zu gewinnen, nebst Beschreibung eines unendlich billigen und leicht herzustellenden Drahtglocken-Telegraphen, der den Vortheil vor anderen bisher vorgeschlagenen und angewendeten Telegraphen hat, dafs er auf jeder Stelle der Bahn benutzt werden kann, mit Rücksicht auf die allgemeine Anwendung dieses sehr einfachen und sicheren Systems da, wo das Terrain sonst durch viel längere und höchst kostspielig auszuführende Locomotivbahnen, ohne gröfsere Geschwindigkeit zu erlangen, die Anlage und den Betrieb der betreffenden Bahnstrecke aufserordentlich viel theurer (über 4½ Millionen fl. C. M.) machen würde. Mit 4 Steindrucktafeln. 4. 1844. broch. 1 Thlr. 10 Ngr. (Commission.)

— — Ueber den Gebrauch der Turbinen im Verein mit stehenden Dampfmaschinen bei'm Ersteigen und von Wasserdruckwerken bei'm Herunterkommen der Convois auf Gebirgseisenbahnen, Anwendung dieses Systems sowohl zur Uebersteigung des Erzgebirges zwischen Aufsig und Pirna als auch des Sömmering von Glöcknitz bis Mürzzuschlag auf der Wien-Triester Bahn. Ferner: Beschreibung einer Vorrichtung zu aufserordentlich bedeutender Verminderung der Reibung und Abnutzung der Turbinenzapfen, nebst einem Anhange über die nicht wohl mögliche, wenigstens nicht vortheilhafte Anwendung der atmosphärischen Eisenbahn zur Uebersteigung der Berge. Mit 5 lithographirten Tafeln und einer Karte. 4. 1844. broch. 1 Thlr. 25 Ngr. (Commission.)

Druck der Teubner'schen Officin in Dresden.

Knode.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schubert, Johann Andreas,

Theorie der Construction steinerner Bogenbrücken

Bd.: 1

Dresden [u.a.] 1847

A.hydr. 72 g-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10059986-5